

## 前 言

导弹是一个复杂的工程系统，包含着许多分系统和部件。在导弹的总体设计工作中，必须恰当处理各个分系统之间的关系。因此，所谓“导弹设计原理”，并不是一门单独的学科，而是多种学科的综合运用。

不仅专门从事导弹总体设计工作的科技人员需要从总体上了解导弹的设计原理，而且，在导弹技术领域工作的各种专业科技人员和从事管理、制造、试验及使用工作的技术人员也需要了解导弹总体设计的原理。这样，他们才能在处理本职业务同总体设计的关系问题时取得主动。

因此，在编写本书时，不仅考虑到教学的需要，还力求照顾到各有关方面的科技人员有可能以自学的方式研读本书。

近年来，在反坦克导弹等小型战术导弹领域中的研究工作非常活跃，在设计思想、设计方案、作用原理方面都出现了很多独特的发展。但是，世界上现已出版的屈指可数的论述导弹总体设计原理的书籍文献，通常只以大型导弹做为讨论对象，极少注意反坦克导弹等小型战术导弹的设计特点。

所以，在编写本书时，力求反映反坦克导弹的设计特点。但是，另一方面，我们相信，通过对于反坦克导弹设计的特殊问题的深入研究，也有可能帮助读者对于导弹设计的普遍性原理获得更深刻的理解。

当前，在导弹的设计工作中，计算机是必不可少的工具。为了能够把导弹的设计过程编成计算机程序，首先必须建立数学模型。就是说，对导弹系统工作的物理过程进行数学的抽象。此外，为了正确地分析和理解计算机的运算结果，也需要设计人员对于导弹系统的工作过程的物理本质有清楚的认识。

所以，在编写本书时，力求阐明导弹系统工作过程中的主要物理概念；必要的计算及例题的引入，只是为了有助于读者加深对于物理概念的理解，而不是为了追求个别计算数据的高度精确性。

在绪论和第一章中，阐明了反坦克导弹发展的规律性和设计的指导思想。

在第二章“总体方案的确定”中，读者可以领会反坦克导弹系统各组成部分之间的相互配合而又相互制约的复杂关系。任何一个有创造性的设计师，他的设计思想首先要体现在总体方案的先进性和高度的协调性之中。

为了把总体方案置于合理可行的基础上，还必须从各方面进行定量的分析。这就是后面第三章～第八章所要解决的问题。

第三章讨论基准弹道的设计和主要设计参数的选择问题。这一部分工作的中心是确定导弹的速度图，主要为发射装置及动力装置的设计提出总体要求。

第四章讨论三点法导引弹道和导入段弹道的设计。工作的中心是确定导弹的需用过载，但问题的关键往往在于启控点散布。

第五章讨论制导系统的设计中的各种总体问题。包括射手反应延迟造成的系统稳定性问题，还有动态误差和起伏误差问题，并比较详细地研讨了脉冲调宽式控制系统以及弹体滚转情况下的设计问题。

第六章介绍了自动导引的反坦克导弹的设计问题。包括基准弹道的分析、导引弹道的设计、变参数系统的稳定性及导弹脱靶量等问题。

第七、八章分别论述了导弹外形设计，弹体载荷分析，以及强度计算问题，并简要介绍了有限单元法原理。

在“总结及展望”中，对导弹总体设计的全过程做了概括，并介绍了利用计算机进行一体化设计的前景。

在附录一及附录二中，简要介绍了国外反坦克导弹的研制和发展情况；附录三介绍了本书所采用的坐标系。

在阅读本书时，要求读者具有工科高等院校的数学、力学知识（包括概率论、拉氏变换及线性代数的基本概念）；最好还应具有一定的导弹概论、空气动力学、飞行力学和自动控制理论方面的知识。

本书第八章是由李名兴同志编写的。文仲辉、姚德源、陆秀娣等同志参加了第六章、第七章及附录的编写工作。在编写过程中，除上述诸同志外，还有苗瑞生、黄一鸣、俞仁顺、韩洪波及夏咸松等同志，对书中内容提供了许多宝贵意见。

在本书的编写过程中，还受到有关单位许多同志的大力支持和帮助。王兴治和赵家崢同志组织和主持了对书稿的审校工作。参加审校工作的还有姜明顺、陈洪印、吴立新、吴文杰、李杰斌、代福民、邹淦声、张秀英、李锡伯、蒋伯如等同志。他们都对初稿提出了很多宝贵的意见。尤其是，本书的某些部分，乃是主要参考了姜明顺（§4-3-6）、吴文杰（§4-2-7及§4-4）、陈洪印及邢文兴（§5-5-9）等同志提出的理论见解而写出的。在此谨向为本书的出版做出贡献的众多同志一并表示深挚的感谢。

然而，由于编著者本人的水平不高，实际经验又少，书中错误不妥之处仍所难免，诚恳希望读者及各方面同志继续提出指正意见。

# 目 录

绪论	1
§ 0-1 反坦克导弹的发展	1
§ 0-2 反坦克导弹在战争中的地位和作用	2
§ 0-3 反坦克导弹同一般导弹技术及科学技术之间的关系	2
§ 0-4 反坦克导弹的研制过程	4
第一章 关于反坦克导弹的战术技术要求	7
§ 1-1 战术技术的意义	7
§ 1-2 有效射程范围	7
§ 1-3 射击精确性	8
§ 1-4 威力	10
§ 1-5 导弹系统的可靠性	10
§ 1-6 导弹武器的安全性	12
§ 1-7 导弹系统对于实战条件的适应性	13
§ 1-8 勤务处理过程中的方便性及安定性	15
§ 1-9 大量生产时的经济性和工艺性	15
§ 1-10 反坦克导弹武器系统有效性的综合评价	16
第二章 反坦克导弹总体方案的分析	17
§ 2-1 反坦克导弹的战斗部方案	17
§ 2-1-1 战斗部类型的确定	17
§ 2-1-2 关于战斗部破甲威力的分析	17
§ 2-1-3 聚能破甲战斗部的结构参数	19
§ 2-1-4 战斗部方案同总体的协调	19
§ 2-1-5 自毁战斗部	20
§ 2-2 反坦克导弹的制导系统方案	20
§ 2-2-1 制导系统的类型及特征	20
§ 2-2-2 以光学装置实现三点法导引的几个总体问题	23
§ 2-2-3 控制指令的调制方式	25
§ 2-2-4 将控制指令转化为舵上控制力的方法	26
§ 2-2-5 舵机构造及弹上能源的类型	28
§ 2-2-6 弹体滚转同制导系统的关系问题	29
§ 2-3 反坦克导弹的弹道方案及发射、动力装置方案	30
§ 2-3-1 反坦克导弹的弹道方案	30
§ 2-3-2 反坦克导弹的发射方案	30
§ 2-3-3 反坦克导弹的动力装置	31
§ 2-4 反坦克导弹的空气动力外形及总体结构方案	32
§ 2-4-1 气动外形方案	32
§ 2-4-2 总体部位安排	33
§ 2-4-3 弹体的结构	35
第三章 反坦克导弹的基准弹道及主要设计参数	37
§ 3-1 速度图设计	37

§ 3-1-1	基准弹道和速度图 .....	37
§ 3-1-2	第一代反坦克导弹的速度图设计 .....	37
§ 3-1-3	第二代反坦克导弹的弹道分段及速度图设计 .....	38
§ 3-2	起飞段的速度及行程 .....	39
§ 3-2-1	按理想速度计算起飞段速度 .....	39
§ 3-2-2	起飞段速度的简化计算 .....	42
§ 3-2-3	空气阻力及重力对于起飞段速度的影响 .....	42
§ 3-2-4	由预定的起飞段速度反求起飞发动机应装燃料重量 .....	44
§ 3-2-5	导弹在起飞段上的行程 .....	45
§ 3-3	导弹在续航段上平飞的条件 .....	46
§ 3-4	续航段上的速度 .....	48
§ 3-4-1	规定及假设 .....	48
§ 3-4-2	续航段速度的计算 .....	49
§ 3-4-3	速度计算公式的无量纲形式 .....	53
§ 3-5	续航段上的行程 .....	54
§ 3-5-1	运动方程 .....	54
§ 3-5-2	运动方程的无量纲化 .....	55
§ 3-5-3	运动方程的积分 .....	57
§ 3-6	无动力水平飞行中的速度及行程 .....	60
§ 3-7	导弹设计参数的分析及选择 .....	61
§ 3-7-1	设计参数及其选定原则 .....	61
§ 3-7-2	导弹设计参数的选择和优化的一般原理 .....	63
§ 3-7-3	续航段等速飞行的反坦克导弹的设计参数的选定 .....	65
§ 3-7-4	续航段加速飞行的反坦克导弹的设计参数的选定 .....	70

#### 第四章 反坦克导弹的导引弹道的分析和设计 .....

§ 4-1	三点法导引的运动学分析 .....	80
§ 4-1-1	三点法导引的理想弹道 .....	80
§ 4-1-2	导弹的理想飞行时间与飞行路程 .....	82
§ 4-1-3	三点法导引理想弹道的曲率 .....	83
§ 4-1-4	导弹的机动能力、需用过载和可用过载 .....	89
§ 4-2	启控点散布 .....	91
§ 4-2-1	反坦克导弹设计中的启控点散布问题 .....	91
§ 4-2-2	关于弹道散布的一般研究方法的概念 .....	91
§ 4-2-3	各种扰动因素对弹道方向角偏差的影响分析 .....	97
§ 4-2-4	各种扰动因素对弹道的线偏差的影响分析 .....	105
§ 4-2-5	弹道方向角偏差同线偏差之间的相关性——偏差相关系数 .....	106
§ 4-2-6	启控点偏差及散布的计算 .....	108
§ 4-2-7	反坦克导弹启控点的散布域 .....	110
§ 4-3	反坦克导弹的导入段的分析及设计 .....	111
§ 4-3-1	反坦克导弹的导入段问题 .....	111
§ 4-3-2	第一代反坦克导弹的理想导入段弹道 .....	112
§ 4-3-3	第一代反坦克导弹的最小有效射程和可能攻击区 .....	117
§ 4-3-4	第一代反坦克导弹的线性导入段弹道 .....	120
§ 4-3-5	关于第一代反坦克导弹的操纵方法 .....	124
§ 4-3-6	第二代反坦克导弹的导入段弹道 .....	125
§ 4-4	启控状态的调整 .....	134
§ 4-4-1	启控域及散布域 .....	134
§ 4-4-2	调整启控状态的几种方法 .....	136
§ 4-4-3	改变发射定向器仰角对启控点散布域的影响 .....	136



§ 4-4-4 自主控制对启控点散布域的影响 .....	137
§ 4-4-5 启控前弹道的调整设计 .....	138
<b>第五章 反坦克导弹系统的动力学分析及设计 .....</b>	<b>140</b>
§ 5-1 弹体环节的动态特性及动力学参数的选择 .....	140
§ 5-1-1 引言和主要假定 .....	140
§ 5-1-2 反坦克导弹在控制作用下的运动方程 .....	142
§ 5-1-3 传递函数的概念 .....	147
§ 5-1-4 弹体环节及运动学环节 .....	150
§ 5-1-5 弹体环节的分析及简化 .....	152
§ 5-1-6 弹体环节对几种简单指令的响应特性 .....	154
§ 5-1-7 导弹的法向过载同弹体环节动态特性的关系 .....	161
§ 5-1-8 在扰动控制运动中导弹重心位置的变化 .....	163
§ 5-1-9 弹体环节的频率特性 .....	165
§ 5-1-10 弹体环节的参数选择问题 .....	173
§ 5-2 三点法导引的反坦克导弹系统的稳定性 .....	176
§ 5-2-1 引言 .....	176
§ 5-2-2 射手环节的数学模型 .....	177
§ 5-2-3 反坦克导弹系统的开环和闭环传递函数 .....	180
§ 5-2-4 含有射手环节的反坦克导弹系统的稳定性 .....	182
§ 5-2-5 等效的固有振荡频率及相对阻尼系数 .....	193
§ 5-3 三点法导引的反坦克导弹的制导误差 .....	196
§ 5-3-1 引言 .....	196
§ 5-3-2 导弹系统的动态误差计算 .....	197
§ 5-3-3 减小动态误差的途径 .....	201
§ 5-3-4 制导过程中的随机干扰因素及起伏误差 .....	203
§ 5-4 脉冲调宽式控制系统的设计特点 .....	209
§ 5-4-1 脉冲调宽指令信号及其引起的舵控力的谐波分析 .....	210
§ 5-4-2 同脉冲调宽控制方式有关的总体设计问题 .....	215
§ 5-5 弹体滚转的反坦克导弹的动力学及设计问题 .....	217
§ 5-5-1 引言 .....	217
§ 5-5-2 不滚转的导弹的俯仰与偏航运动的复合 .....	218
§ 5-5-3 弹体滚转的导弹的陀螺效应及马格努斯效应 .....	220
§ 5-5-4 滚转导弹的运动方程 .....	224
§ 5-5-5 滚转导弹的自由运动及动态稳定性 .....	226
§ 5-5-6 滚转弹体的舵上控制力 .....	236
§ 5-5-7 滚转导弹弹体环节的传递函数及控制运动 .....	248
§ 5-5-8 滚转导弹弹体环节的频率特性 .....	255
§ 5-5-9 滚转导弹的转速选择 .....	256
<b>第六章 自动导引反坦克导弹的设计问题 .....</b>	<b>260</b>
§ 6-1 自动导引反坦克导弹的基准弹道 .....	260
§ 6-1-1 自动导引反坦克导弹的弹道类型 .....	260
§ 6-1-2 捕获目标的条件 .....	260
§ 6-1-3 基准弹道的分析 .....	262
§ 6-1-4 抛射弹道的分析 .....	264
§ 6-2 自动导引的比例导航法 .....	268
§ 6-2-1 导引规律和比例导航法 .....	268
§ 6-2-2 对自动导引头的要求 .....	269
§ 6-2-3 导引头的类型及动态特性 .....	269
§ 6-3 比例导航的理想弹道及其线性化 .....	271

§ 6-3-1 比例导航的理想弹道 .....	271
§ 6-3-2 比例导航的直线弹道 .....	272
§ 6-3-3 比例导航的导引弹道的线性化 .....	274
§ 6-4 比例导航的导弹系统的动力学分析 .....	276
§ 6-4-1 比例导航的导弹系统的动态特性 .....	276
§ 6-4-2 比例导航的导引过程的分段 .....	279
§ 6-5 自动导引反坦克导弹的脱靶量 .....	280
§ 6-5-1 脱靶量及其产生原因 .....	280
§ 6-5-2 瞬间脱靶量 .....	281
<b>第七章 反坦克导弹的外形设计 .....</b>	<b>283</b>
§ 7-1 反坦克导弹的可用攻角确定 .....	283
§ 7-1-1 可用攻角及其确定原则 .....	283
§ 7-1-2 升力及阻力随攻角的变化 .....	283
§ 7-1-3 升阻比及最有利攻角 .....	284
§ 7-1-4 可用攻角的选定 .....	285
§ 7-2 弹翼形状及弹翼面积的设计 .....	287
§ 7-2-1 弹翼设计的基本问题 .....	287
§ 7-2-2 导弹的可用过载同弹体外形的关系 .....	289
§ 7-2-3 在可用攻角已定的情况下设计弹翼 .....	292
§ 7-2-4 在可用攻角 $\alpha_{可用}$ 随展弦比 $\lambda_{W}$ 变化的情况下设计弹翼 .....	294
§ 7-3 弹翼位置的确定 .....	296
§ 7-4 操纵器位置的确定 .....	298
§ 7-4-1 根据可用攻角来计算操纵器位置 .....	298
§ 7-4-2 根据可用过载来设计操纵器位置 .....	300
§ 7-5 滚转导弹的空气动力设计问题 .....	301
§ 7-5-1 导旋方式及滚转力矩 .....	302
§ 7-5-2 导弹的稳态滚转运动 .....	306
§ 7-5-3 等加速导弹的滚转运动 .....	307
§ 7-5-4 滚转导弹的转速设计 .....	309
§ 7-5-5 卷弧形弹翼的设计问题 .....	312
<b>第八章 作用在弹体上的载荷及主要部件的强度计算 .....</b>	<b>314</b>
§ 8-1 弹体载荷分析 .....	314
§ 8-1-1 载荷及过载系数 .....	314
§ 8-1-2 导弹弹体载荷的设计情况 .....	316
§ 8-1-3 安全系数和剩余强度系数 .....	319
§ 8-2 弹身的载荷及强度 .....	320
§ 8-2-1 弹身上的载荷 .....	321
§ 8-2-2 弹身内力图 .....	321
§ 8-2-3 弹身的强度计算 .....	325
§ 8-3 弹翼的载荷及强度分析 .....	328
§ 8-3-1 弹翼载荷 .....	328
§ 8-3-2 弹翼的强度分析 .....	330
§ 8-4 有限单元法原理简介 .....	336
§ 8-4-1 弹性力学的一些基本概念 .....	337
§ 8-4-2 平面应力问题的基本方程及边界条件 .....	338
§ 8-4-3 平面应力问题的有限单元法 .....	344
<b>第九章 总结及展望 .....</b>	<b>359</b>

附录 .....	362
附录一 国外反坦克导弹概况一览表 .....	362
附录二 典型反坦克导弹的评介 .....	366
附录三 关于坐标系的规定 .....	380
附录四 拉氏变换简表 .....	382
附录五 正态分布函数 $\phi(x)$ 表 .....	383
附录六 弹道表(按“加尔涅定律”) .....	384
附录七 计算导弹滚转角速度的 $I(x)$ 函数表 .....	387
符号表 .....	387
主要参考文献 .....	399

# 绪 论

## § 0-1 反坦克导弹的发展

反坦克导弹是一种战斗武器，它在战斗中的对立面主要是敌方坦克。所以，它的产生和发展是同坦克的产生及发展相联系的；更广泛地说，它是同战争方式的发展相联系的。

在第一次世界大战时期，在战场上出现了坦克。紧接着，出现了以坦克为目标的各种反坦克武器。但是在很长的时期内，没有一种武器能十分有效地在战场上同坦克抗衡。

在第二次世界大战末期，随着火箭、导弹技术的发展，有的国家开始研制反坦克导弹，但并未在战场上实际应用。

第二次世界大战以后的三十多年来，许多国家竞相大力发展火箭导弹武器，其中包括反坦克导弹。据公开资料报道，所研制的反坦克导弹型号达三十种以上，其中比较成功并大量装备了部队的约有二十余种型号。此外，还不断地有新的型号投入研制。

反坦克导弹的发展，有一个从低级到高级的历史过程。从世界范围看，从四十年代中期到六十年代初期的 15~20 年间是发展的第一个阶段，在这个时期中研制的导弹都是属于所谓“第一代”反坦克导弹。第一代反坦克导弹的技术特点可以归纳为四点，即：目视瞄准（坦克）、目视跟踪（导弹）、手动操纵（手柄）、有线传输（指令）。第一代反坦克导弹系统的构造比较简单，只包括光学瞄准具、控制盒、导线及导弹。射手借助瞄准镜来瞄准目标并跟踪导弹，同时按三点法原理，根据导弹偏离瞄准线（从瞄准镜到目标的连线）的情况，操纵控制盒上的手柄，控制盒按照手柄的偏斜方向及偏斜程度形成控制指令，通过导线传往导弹，借助弹上接收机、舵机及操纵器形成舵控力，改变导弹的飞行姿态，进一步改变飞行方向，操纵导弹向瞄准线靠拢。

第一代反坦克导弹的构造虽然简单，作战效果却相当显著。只是，这种导弹对于射手的要求太高，即便是经过严格挑选和训练的射手，也很难把这种导弹的命中率提高到 80% 以上。在实战条件下，一般的命中率只能达到 50% 左右。

从六十年代初期到七十年代末期的 15~20 年间，是反坦克导弹技术发展的第二阶段。在这个阶段中，许多国家研制了“第二代”的反坦克导弹，它与第一代导弹相比，其主要特点是，把“目视跟踪导弹”改变为“红外线测角仪自动跟踪导弹”，并且将“手动操纵手柄”改进为“自动形成控制指令”。在导弹系统的构造上，增加了一个红外测角仪。它同光学瞄准镜同轴安装，并能根据导弹偏离瞄准线的情况自动输出一个误差信号；根据这个误差信号即可进一步形成控制指令。于是，在导弹发射之后，射手就只需把瞄准镜中的十字线始终对准目标的中心就行了，其他的操纵导弹的工作都能由仪器自动地完成。这样就大大地提高了反坦克导弹的性能。在有效射程范围内，一般的第二代反坦克导弹的命中率可达到 90% 左右。

大多数的第二代反坦克导弹都是从第一代导弹的技术基础上发展起来的，保持了原有的“目视瞄准目标”和“有线传输指令”两个特点。

在第二代导弹发展的同一时期中，有些国家还研制了一些不用导线传输控制指令的反

坦克导弹，如“橡树棍”、“阿克拉”、“海尔法”和“铜斑蛇”等。由于这些导弹撇开了传统的导线，而采用了红外线传递指令或激光制导等新方法，所以有些人把这些导弹称为“第三代”反坦克导弹。

但是，另一方面，从战术使用的角度讲，这些导弹除了可采用火炮发射或者具有较高的飞行速度之外，在“目视瞄准目标”方面仍然离不开射手（或另一个瞄准手）。所以，也有些人反对把这些导弹列为“第三代”，而认为它们仍然属于“第二代”，只不过在速度（或射程）方面性能有所改进。这后一种意见还认为，真正的第三代反坦克导弹，应该能做到“发射后就不再管”（fire and forget）的地步。这种意见可能有其一定的道理。

抛开关于“第三代”导弹的定义的争论不谈，问题的实质是，反坦克导弹下一步的发展方向是什么？看来，不容置疑的是进入八十年代之后，反坦克导弹技术正面临着一个新的飞跃发展的阶段。

### § 0-2 反坦克导弹在战争中的地位和作用

在现代战争中，反坦克导弹究竟能够发挥怎样的作用呢？

现代战争中包含多种多样的战斗，坦克及反坦克武器之间的战斗只不过是其中的一种战斗形式。在反坦克武器中又包含了多种多样的武器，而反坦克导弹仅是其中的一种武器。为了取得反坦克战斗的胜利，必须组织协调各种反坦克武器之间的配合。

所以，不应该把反坦克导弹在战场上的作用抬高到不适当的地位。

然而，另一方面，从当前的实际情况出发，又应该对反坦克导弹在战场上的作用给以足够的重视。这是由于反坦克导弹本身具有许多优点：足够的射程、很高的命中率、可致坦克于死地的破甲威力、小巧轻便（因而便于运动及隐蔽）……。所以，在同拥有强大的装甲力量的敌人进行生死较量的时候，反坦克导弹是比较理想的防御性武器之一。

具体地说，一辆坦克的造价大约相当于数十枚以至上百枚反坦克导弹；一辆坦克需要三名乘员，而一个反坦克战斗小组却可以携带好几发导弹；坦克炮的直接瞄准有效射程为1500米左右；而反坦克导弹的最大有效射程一般可达3000米左右。所以，在拥有性能良好的反坦克导弹的条件下，在一场组织得很好的反坦克战斗中，防守的一方能使拥有大量坦克的敌方遭到惨重损失，而自己付出的代价却小得多。

在1973年10月6日爆发的第四次中东战争里，交战双方都出动了大量的坦克，同时，也使用了各种各样反坦克武器——其中包括大量的反坦克导弹。这是第一次大量地使用了反坦克导弹的战争，从公开透露的情况来看，反坦克导弹的作战效果是很显著的。

中东战争对反坦克导弹的作战效果进行了实战的检验，并引起各国对发展反坦克导弹普遍予以重视。今后反坦克导弹技术的发展，将在一定程度上影响作战方式和其它军事技术的发展；而军事技术的发展又会反过来影响反坦克导弹技术的发展。

### § 0-3 反坦克导弹同一般导弹技术及科学技术之间的关系

反坦克导弹是一种结构简单，成本较低的导弹，同其它类型的导弹相比，它具有自己的特点。

反坦克导弹的主要特点是：战斗部能破坏装甲，射程较近，速度大多较低，重量轻，

体积小，结构简单，生产成本低，生产量大和使用操作简便等。

反坦克导弹又与一般导弹具有许多共同点：受控飞行，射击精确性高，构造复杂（具有大体相同的组成部分），研制周期较长，产品换代较快等。

特别值得注意的是，反坦克导弹与其它导弹在技术上有互相渗透的现象。例如，弹体滚转和脉冲调宽式控制是首先在反坦克导弹上被采用，后来在某些地-空导弹和地-地导弹中也被采用。

反坦克导弹同常规炮兵武器在技术上互相渗透的现象也很多。例如，无座力管式发射以及近来的制导炮弹，就是显著的例子。

反坦克导弹以及一般导弹的发展，同一般的科学技术和工业基础的发展是密切相关的。

事实上，早在四十年代以前，现代火箭及导弹技术的出现就是以当时的航空工程和空气动力学、无线电和电子学、自动控制理论和技术、化学工业、冶金工业、精密机械工业……的高度发展为前提的。此后，导弹技术的每一步发展都可以从当时的科学技术的重大发展和突破中找到根据。例如，第二次大战之后，红外技术的发展，为六十年代以后第二代反坦克导弹的发展提供了可能；六十年代激光技术的出现，又为七十年代里激光制导反坦克导弹的发展开辟了道路；近来的现代控制理论、计算技术和微电子学、集成光学、毫米波技术、热成像技术和图象识别技术等，为导弹制导技术开辟了全新的发展领域。

然而，导弹技术的发展，也不是完全被动地由其它科学技术所决定的。在近代的科学发展过程中，不乏这样的事例。导弹技术（或者更一般地说，军事技术）在其探索性的发展中，所提出的一些概念、问题和要求，往往给予基础科学及应用科学的发展以强烈的刺激。原子能、计算技术及航天技术的发展就是其中最突出的例子。

另一方面，导弹技术的发展，还有许多内部因素。值得深思的情况是科学技术新成果运用到导弹技术中的速度往往比运用到一般的工程技术中还要慢。以激光技术为例，六十年代初期发现了激光，几年之后即在许多领域内获得应用，然而在导弹技术中，激光的应用却要迟得多，直到七十年代末期激光制导的导弹还未投入使用。造成这种情况的原因是复杂的。相当重要的一个原因是——导弹技术是具有高度综合性的技术。任何一种新的科学技术成果，都不能简单地直接拿来就用，而是要同导弹中的其他组成部分协调配合，最终体现于导弹武器总体性能的重大改进，才是有实际意义的。有一个可说是失败的例子，就是法国研制的激光驾束反坦克导弹“阿克拉”。该弹从1962年开始研制，1973年定型，但不能大量生产和装备部队，据说主要是由于生产成本太高。这个例子说明，新技术本身虽然好，但是把它应用于导弹技术之后能否取得总体性能的全面改进则是另一个问题。新技术的出现为导弹技术的发展提供了新的可能性。然而要把这种可能性转化为现实性，却还需要多方面因素的协调配合，在这里，导弹的总体设计工作将起重要作用。

另外一个可能的原因是，导弹研制工作的周期一般都很长。因此，同一般的工程技术相比，科技新成果在导弹技术中开花结果的时间常常要迟一些。

新的科学技术成果在导弹技术中不能及时得到采用的现象应尽快改变。这需要多方面的努力才能得到解决。现在，许多国家在导弹的研制工作中都有一个“预研”的阶段（在美国叫做“探索性发展阶段”，在苏联叫做“草图前设计阶段”）。在这个预研阶段中，要把新的导弹设计概念同新的科学技术成果结合起来，验证它们的可行性，发展它们的相容性，

以及提高新技术的可靠性。在此之后，才进入正式的研制阶段。这可能是促使科学技术新成就尽快在导弹技术中获得应用的较好的办法。

## § 0-4 反坦克导弹的研制过程

研制任务可能是各种各样的，如仿制和独立设计就大有不同，改型设计和全盘创新也不一样。甚至，在不同的国家，研制程序也略有不同，不能一概而论。这里仅介绍一般的研制阶段的划分原则：

### 一、提出新武器系统的设想

一个新的武器系统，为了在性能上超越老的武器系统，总得有所创新，提出新的设计概念或设想。这种新的设计概念及设计思想，不应是凭空产生的，而应是经过调查研究及科学分析之后产生的。一方面要根据实际作战的需要，并考虑到敌方的装备及作战方式的发展趋势；另一方面，还要根据我国的科学技术和生产工艺的实际情况，既充分利用早已成熟的研制成果和有效的经验，又尽可能采用最新的科学技术成就。就是说，新的武器系统，在战术上应该是先进的，在技术上应该是经过努力后能够实现的。

### 二、预研和战术技术论证阶段

预研阶段由研制导弹的单位或受委托的科研单位进行。战术技术论证阶段则由军方及研制导弹的单位共同进行。这两个阶段应该是同时并进互相交叉的。

一个新的武器系统的设想，在战术上是否真的具有优越性？它的有效性到底怎样？对于各项战术技术指标究竟应做如何的规定才合理？这些问题都应经过战术技术的论证给予回答。此外，武器性能的先进性不是绝对不变的，例如一种设计中的武器，若在五年内可以定型，可能算是先进的，但十年后才能定型，先进性就要打折扣了，这因为敌人也在研制和发展新的武器。所以，在确定战术技术要求的时候，应该充分地考虑到所需的研制周期。

一个新的武器系统方案的提出，在技术上总得采用一些新的原理或者独特的先进措施，才可能超越旧武器的性能。因此，总是有一些关键性的科学技术问题需要解决，只有突破这些关键，新武器系统才有可能实现。预研阶段就是解决这些关键性的科学技术问题的阶段。在预研阶段中，也可能需要对关键性部件进行飞行试验，来检验它的工作原理和基本性能，通常，应尽可能利用飞机或旧有的导弹改装后进行实验。

### 三、初步设计阶段

初步设计，有时又称为草图设计，方案设计，或总体设计。这一阶段的基本任务是全面地设计整个导弹系统的各组成部分，确定它们的主要特点、主要性能、主要参数以及各部分之间的相互关系，目的是保证满足战术技术要求。

这一阶段结束时，应提出导弹系统总体方案的设计说明书及总体方案草图。

### 四、技术设计阶段

技术设计是设计工作全面展开的阶段。在此阶段中，承担任务的各有关单位，分别进行各部件的具体细节的设计工作，直到提出每个零件的加工图纸、每个部件的装配图纸、全导弹系统的总装配图纸，以及一切有关的技术文件。

在技术设计中，往往需要进行大量的部件地面试验，如发动机部件的地面试验，舵机部件的地面试验，制导系统的模拟试验，弹体模型的吹风试验和弹体结构的强度试验等，以

考查并改进部件的局部性能。大量的地面实验对于保证武器系统的可靠性及安全性也是极为必要的步骤。

### 五、样机试制

各部件的设计工作完成后，即投入生产试制，并制出少量的样机。试制工作的目的，不仅是提供样机，而且也是为了考查新设计的工艺性。此外，新的产品往往要求采用新的工艺技术。因此，有时也必须要求生产试制部门进行新工艺的研究。

样机制成后，必须经过严格的质量检验。往往有这种情况，由于任务紧迫或缺少经验等原因，试制后的样机质量可能不合格，但未经严格检验就进行飞行试验，结果必然造成失败。这样，不仅浪费了人力、物力，而且使实验的结果难于分析，损失了大量的时间。所以，样机的工艺质量是保证研制工作少走弯路的关键。

### 六、飞行试验

飞行试验是导弹研制工作中最重要的一环，因为设计工作本质上是人们的主观对于导弹这个客观事物的认识，只有飞行实验才是对这种认识的实践检验。

通常飞行实验不可能一次成功。飞行实验的失败，正是深入发现导弹的内部矛盾，进一步摸清其运动规律的关键时刻。正是因为在地面条件下无法全面考验导弹的性能，不能暴露其全部矛盾，所以才需要进行飞行实验。从这个意义上说，有几次飞行实验的失败乃是正常的合乎规律的事情。问题在于要从实验中（不论是成功的、基本成功的或是失败的）总结经验教训，发现矛盾及探索规律，才能取得尽快的成功。试验中，应对飞行过程进行细致地观察，并取得一系列的数据；实验后，对实验结果进行详尽地记录和分析。

通常，在飞行实验中应该使用一整套弹道测量及无线电遥测的设备，来取得导弹的飞行状态及弹上各系统工作情况的数据。如果没有这些设备，就需要以足够的力量来研制这些设备。

一次飞行实验不可能考查导弹的全部性能，只能着重地考查导弹的某几方面的性能。为此，每次飞行试验都应有明确的实验目的及详尽的试验大纲，并据此安排试验设备及试验规程。

### 七、设计定型

飞行实验后，根据出现的问题，需要对设计进行修改，并再次试制和试验。这样经过几次反复之后，可使导弹样机的性能完满地符合战术技术要求。这时即可进行设计定型。

设计定型前，应对导弹研制过程中的全部技术资料进行总结，整理出一套技术文件和定型图纸，并按此生产出一小批定型用样机，用来进行设计定型试验。

定型试验是在接近实战的环境下，以各种条件进行射击实验。实验的目的是综合地、全面地考查并鉴定导弹的战术技术性能。

定型实验成功后，应整理出定型报告，报请有关领导部门审批。

若有关领导部门认为这一项产品的战术技术性能是可取的，则对它进行国家鉴定。如果鉴定结果是满意的，才能投入正式生产。

以上所述的反坦克导弹研制过程的各阶段不是截然划分的，而是互相交错的。以初步设计而论，在技术设计，样机试制，飞行实验以及反复改进的过程中，都会提出初步设计中考虑不周到或不妥当的问题，需要由负责初步设计的部门来重新协调其他各部门之间的



关系，甚至需要重新修改初步设计等。

上述的研制过程，可用下面的流程图表示，见图 0-1。

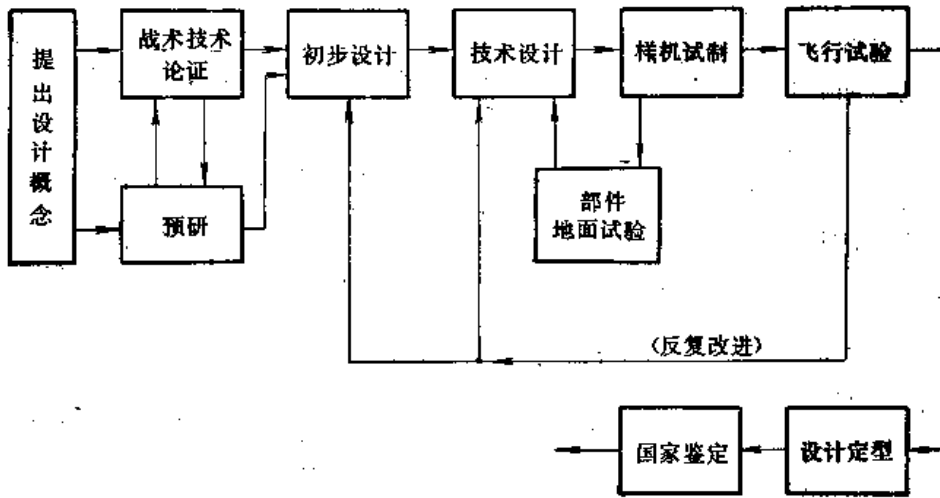


图0-1 导弹研制过程

既然反坦克导弹的研制过程如此复杂，显然在我们这样一本篇幅有限的讲义里，不可能详尽涉及研制过程的一切方面及可能出现的一切问题。我们在这里只能探讨一下“初步设计”的一般原理。

我们希望，读者在读过本书之后，主要地并不是学到若干反坦克导弹设计的具体知识，而是能学到一些分析问题的一般方法和思路；同时也要了解一些导弹设计工作中的基本原理和常用的概念。

随着反坦克导弹技术的不断发展，随着客观条件的改变，在我们面前将要不断地出现新的技术问题，对于具体的问题需要用具体的方法去解决。所以，在这本讲义中处理问题的某些具体方法，肯定不是绝对的，也不是可以到处搬用的，倒不如把它们看做是一种特殊性的“例子”。

理论来源于实践，反坦克导弹的设计思想和设计理论，也是要在实践中发展的，在实践中可以借鉴旧的理论，但不应该受它的局限。

# 第一章 关于反坦克导弹的战术技术要求

## § 1-1 战术技术要求的意义

任何一种武器，在战术技术性能上总是有别于他种武器，而且在性能上应超过它的上一代产品，否则就没有研制的必要。

“战术技术要求”就是人们对于所设计的武器系统的战术技术性能所规定的要求。战术技术要求通常应由使用部门提出，并会同设计部门、生产部门协商确定下来，做为武器系统设计的基本根据。

对于反坦克导弹系统的战术技术要求，主要应包括以下各方面：

射程，射击精确性，威力，可靠性，使用的安全性，发射的快速性，战斗使用的简单方便性，全天候使用及抗干扰要求，在阵地上的隐蔽性，行军携带的轻便性及机动能力，勤务处理的方便性及安定性，大量生产的经济性及工艺性，等等。

战术技术性能是决定着一个新的武器系统研制成败的根本问题，又是决定着武器研制工作发展方向的原则问题。在这方面是充满了矛盾的，并且正是由于这些矛盾的存在，才促使各种武器系统的不断发展和改进。事实上，任何一种武器系统的发展历史，就是不断地解决上述诸矛盾的过程史。

下面对各项战术技术性能要求逐个进行分析。

## § 1-2 有效射程范围

反坦克导弹的有效射程范围，是指最大有效射程及最小有效射程之间的范围。显然，导弹应具有尽可能大的有效射程范围。

考虑射程时，不能孤立地考虑反坦克导弹这一种武器，而应从多种反坦克武器的系列来统一考虑。对付极近距离的目标，反坦克手雷及炸药包也很有效；对付 300 米以内的目标，反坦克火箭筒的效果也很好；对付 1000 米以内的目标，无座力炮的命中精度与反坦克导弹可以媲美。因此，反坦克导弹的独特优越性是在 1000 米以上的较远射程内才能突出地表现出来。在实际战斗中，需要把各种反坦克武器综合地配置在具有一定纵深的阵地上，并且使它们能够互相支援、互相掩护，协力配合打击敌方坦克。

**最小有效射程** 小于最小有效射程的距离称为“死区”。对进入死区内的目标，反坦克导弹基本上是无能为力的。没有死区的导弹当然是合乎理想的。然而，从技术现实性上考虑，导弹不可能没有死区。第一，反坦克导弹上的引信必须有一定的炮口保险距离，这个距离应保证射手位于自己发射的导弹的战斗部爆炸威力圈之外，根据这一理由，现有的反坦克导弹至少有 25 米的死区；第二，导弹发射后，必须经过一段过渡过程（常称“导入段”），才能使制导系统稳定有效地工作。在导入段结束之前，导弹的命中率是非常低的，为了不浪费昂贵的导弹，必须把导入段结束以前的距离规定为死区。对于大多数第一代反坦克导弹，这个距离为 300~500 米；对于第二代导弹，这个距离也在几十米以上。

**最大有效射程** 能够对反坦克导弹进行有效制导的最远射程，就是最大有效射程。在2000米以外的距离上，敌方坦克的直射火力对导弹阵地的威胁很小。因此，当目标位于2000米以外和最大有效射程以内时，对于反坦克导弹来说，这是最有利的战机。显然，最大有效射程愈远愈好。

然而，受到各种技术现实性的限制，现已研制成功的第一代和第二代的反坦克导弹的最大有效射程还没有超过4公里的，仅有几个例外：如法国的SS-12，最大射程为6公里，但该弹重达75公斤，主要用于舰艇上，并不是主要用来反坦克的；美国的海尔法（研制中）最大有效射程约为9公里，但该弹是从直升飞机上发射的；美国的铜斑蛇（研制中）最大有效射程约为20公里，但该弹是并非通常的直接瞄准，而是以曲射弹道飞行的间接瞄准。在地面上以直接瞄准法进行射击的反坦克导弹，受到地形、地物的影响，很难使射程大幅度地提高。

**可能攻击区** 第一代反坦克导弹在阵地上的位置距射手总有十余米以上的距离，因此，导弹的发射位置及射向一般不便临时改变。

若目标不是恰好出现在预定的射向上，导弹的实际射程范围就会进一步缩小。如果目标出现在预定射向的侧方或后方，导弹将根本不可能飞到目标附近。只有当目标位于导弹前方的某个扇形区域内的条件下，才有可能对目标进行有效的攻击；这个扇形区域就被称为“可能攻击区”（如图1-1）。

第二代导弹的射手可以随时改变导弹的射向，所以不存在这个问题。

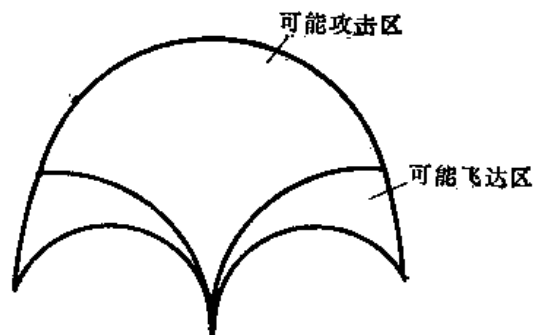


图1-1 可能攻击区

### § 1-3 射击精确性

在反坦克导弹目前的发展水平情况下，只有直接命中坦克才可能摧毁它。所以，反坦克导弹必须具有高度的射击精确性。衡量反坦克导弹射击精确性的指标不只一种，其中之一就是所谓“命中概率”。命中概率的意思是，在一定的射击条件下，若用同一型号的反坦克导弹进行大量的射击试验，在全部无故障地飞抵目标附近的导弹之中，有的命中了目标，有的没有命中；对结果进行统计之后，就可以认为

$$\text{命中概率} = \frac{\text{命中数}}{\text{可靠飞行的导弹总数}}$$

注意，第一，由于这里所要考察的是射击的精确性问题，所以，需要以“可靠飞行”做为前提条件。就是说，命中概率是一个条件概率；第二，所谓“一定的射击条件”是相当广泛的规定，如一定的射程（及射向），一定的目标外形及目标运动速度，一定的气象条件……等；第三，试验的次数必须足够多，试验次数愈多，所得到的命中概率数据的置信度愈高，事实上，借助少数几次飞行试验是不可能获得可信赖的命中概率数据的。

另一种衡量导弹射击精确性的方法，是在一定的射击条件下，研究导弹的弹着点在靶板上的散布的统计特征。

不论是多么精确的导弹，在多种随机干扰因素的综合作用下，弹着点总是要有散布的。在多次射击中，弹着点的散布规律将服从高斯的正态分布定律。若瞄准点即为靶板的中心点（图 1-2），则在没有系统偏差的情况下，弹着点将对称地分布在  $oy$  轴及  $oz$  轴的两侧；但由于系统误差的作用，弹着点的分布将具有一定的不对称性。分布的不对称性表现为散布中心（平均弹着点）同预定的瞄准中心  $o$  不重合，设散布中心的坐标为  $(\bar{y}, \bar{z})$ 。于是，按二维的正态分布定律，导弹命中于靶板上任一点  $(y, z)$  的概率密度  $p(y, z)$  将是

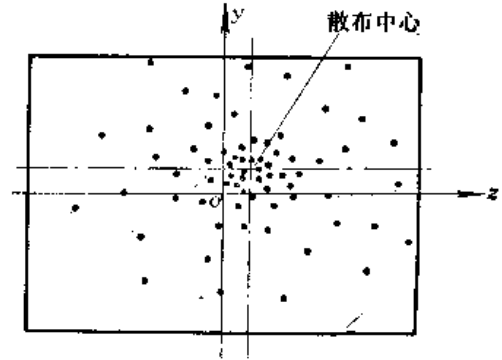


图1-2 弹着点在靶板上的散布

$$p(y, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_z} \exp\left[-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (1-3-1)$$

其中  $\sigma_y$  (及  $\sigma_z$ ) —— 弹着点散布在纵向 (及横向) 的标准偏差。

可见，导弹的射击精确性决定于散布中心的坐标  $(\bar{y}, \bar{z})$  及散布的标准偏差  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$ 。射击的瞄准愈准确，则散布中心就愈接近于预定的瞄准中心。对于一般的反坦克导弹系统，瞄准误差是很小的，散布中心很接近于  $o$  点，即  $\bar{y} = \bar{z} \approx 0$ 。导弹的制导系统愈是能够有效地克服各种随机干扰的作用，弹着点就愈是密集于散布中心附近，标准偏差  $\sigma_y$  及  $\sigma_z$  就愈小。因此，反坦克导弹的射击精确性可主要用散布的标准偏差  $\sigma_y$  及  $\sigma_z$  来衡量。

若导弹射击试验的次数为  $n$ ，每次射击的弹着点坐标为  $(y_i, z_i)$ ，则可按下式算出射击散布的标准偏差

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \quad (1-3-2)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1}} \quad (1-3-3)$$

实验次数  $n$  增加，按上式计算所得的标准偏差就愈准确。

在导弹的弹着点散布的统计特征量  $(\bar{y}, \bar{z}$  及  $\sigma_y, \sigma_z)$  同导弹向确定的目标射击时的命中概率  $P_m$  之间有着密切的关系。事实上，应有

$$P_m = \iint_{S_T} p(y, z) dy dz = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_T} \exp\left[-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right] d\left(\frac{y}{\sigma_y}\right) d\left(\frac{z}{\sigma_z}\right) \quad (1-3-4)$$

其中  $S_T$  —— 目标在靶板上的投影面积。

由于  $S_T$  的轮廓很复杂，故上式积分不易精确算出。近似计算时，可先用一些简单的矩形来逼近坦克的轮廓外形，然后再进行计算。

**例题1-1** 设某反坦克导弹在有效射程范围内的射击散布的标准偏差  $\sigma_y = \sigma_z = 0.5$  米，

而坦克的正面轮廓可用  $1.8 \times 2.7$  米<sup>2</sup> 的等效矩形面积来代替。试求导弹的命中概率。

解 假定散布中心就是等效矩形的中心, 则由式(4)即可得导弹的命中概率  $P_m$  为

$$P_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\left(\frac{0.9}{0.5}\right)}^{+\left(\frac{0.9}{0.5}\right)} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right) d\left(\frac{y}{\sigma_y}\right) \int_{-\left(\frac{1.35}{0.5}\right)}^{+\left(\frac{1.35}{0.5}\right)} \exp\left(\frac{-z^2}{2\sigma_z^2}\right) d\left(\frac{z}{\sigma_z}\right) \\ = 2\Phi(1.8) \cdot 2\Phi(2.7)$$

其中  $\Phi(x)$ ——从中心起算的正态分布函数, 见书末附录五表

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx \quad (1-3-5)$$

由附录五表查得:  $\Phi(1.8) = 0.4641$ ,  $\Phi(2.7) = 0.4965$ 。

于是

$$P_m = 2 \times 0.4641 \times 2 \times 0.4965 = 0.9217$$

### § 1-4 威力

反坦克导弹的威力, 表现在导弹命中目标并且战斗部可靠起爆之后, 使敌方坦克失去战斗力的程度及概率。

为了使敌人坦克失去战斗力, 常规的反坦克导弹的战斗部必须首先能够击穿坦克装甲。所以, 经常以战斗部所能击穿的装甲厚度做为衡量其威力的重要指标。

在击穿装甲之后, 战斗部的后效物质还应具有足够的剩余能量, 以进一步杀伤坦克内部的乘员, 破坏其内部设备, 并引燃其油箱或弹药等。这就是战斗部的后效威力。

在采用聚能射流破甲战斗部的情况下, 适当设计战斗部的结构, 可以使破甲深度达到很深, 但穿孔的直径却很小; 也可以使破甲深度较浅, 但穿孔的直径却较大。在后一种情况下, 破甲的后效威力及毁伤目标的程度和概率也比较大。因此, 对于破甲穿孔的直径也应该有适当的要求。

由于反坦克导弹比较常规炮弹昂贵得多, 所以, 一般总是希望它的战斗部具有足够的破甲深度和后效威力, 以保证命中预定目标并可靠起爆之后, 能够以近于 100% 的概率使目标失去战斗力, 这个概率称为战斗部毁伤目标的条件概率  $P_d$  (在命中目标并可靠起爆条件下)。

### § 1-5 导弹系统的可靠性

可靠性是指导弹武器的整个系统在整个工作过程中 (从投入战斗起到击毁敌方目标止) 不出故障地可靠工作的有把握程度。

实际发射导弹的情况并不总是很顺利的。例如, 在点火系统发生故障的情况下, 导弹就发射不出去; 在控制系统或弹体结构发生毛病的情况下, 导弹就不能正常飞行。甚至, 即便导弹已经命中目标, 引信也可能瞎火而使战斗部不能正常起爆; ……。

可靠性可用一个概率  $P$  来衡量。有人把这种用来衡量可靠性程度的概率值称为“可靠度”, 但也有人仍笼统地称之为“可靠性”。

导弹系统的可靠度  $P$ , 应由大量的实验来决定, 即

$$P_r = \frac{\text{无故障工作的次数}}{\text{导弹系统总的实验次数}}$$

实验的条件当然应加以确定，例如，指定的射程（或飞行时间）、指定的环境条件等。

然而，事实上，全系统的实验次数是不可能很多的。为了估计全系统的可靠性，应该尽可能地利用由分系统实验、部件实验和元件实验所获得的可靠度数据。

为了研究问题方便，可以把导弹系统的工作过程分成两个阶段——飞行阶段和命中后阶段，因而相应地就有飞行可靠性和命中后可靠性（或战斗部工作可靠性）。整个导弹系统的可靠度  $P_r$ ，则是这两部分可靠度的乘积

$$P_r = P_f \cdot P_w \quad (1-4-1)$$

飞行可靠度  $P_f$  是导弹的起飞发射系统、推进系统、制导系统及弹体结构系统等部分的正常工作可靠度的总乘积，即

$$P_f = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot \dots \quad (1-4-2)$$

战斗部工作的可靠度  $P_w$  主要由碰触装甲后引信正常起爆的概率决定。

每一个分系统和部件的可靠度，又是由其中所包含的一切为保证系统正常工作所需的元件的可靠度的乘积所决定的。

所以，要预测导弹系统的可靠度，理论上需要预知系统中每一个部件和元件的可靠度，然而，这是很困难的。实践上，应该在研制过程的每次实验中积累每一个部件的可靠度数据，然后获得整个导弹系统的可靠度数据。

在这里，应该顺便谈一谈，保证导弹系统可靠性的一般原则和方法。

导弹系统的可靠性问题，是在导弹的研制、生产和使用的全过程中所形成的导弹质量问题。所以，要想改进导弹的可靠性，必须在研制、生产和使用导弹的每一个环节上，都密切注意可靠性问题。

拿导弹系统的研制过程来说，实际情况往往是不得不把相当大量的时间用来解决可靠性问题。

由于导弹系统中包含的元件总数很多，并且绝大多数元件都是同导弹系统的正常工作有密切关系的，因此，保证每一个元件的可靠性乃是保证全导弹系统可靠性的基础。所以，在导弹系统中采用的每一个元件都应该是性能稳定、质量可靠的。

导弹系统愈复杂，为了保证总体的可靠性，对于系统中每个元件的可靠性要求就愈高。假定，导弹系统中含有  $n$  个元件，且每个元件都具有同样的可靠度  $P_{r,e}$ ，则全系统的可靠度  $P_r$  应是

$$P_r = (P_{r,e})^n \quad (1-4-3)$$

由式 (1-4-3) 可见，若每个元件的可靠度  $P_{r,e}$  不变，则当  $n$  增大时，全系统的可靠度  $P_r$  将迅速降低。因此，使导弹系统的结构尽可能地简单合理，减少不必要的复杂性，往往是增进可靠性的最好办法。

然而，导弹武器本质上是一种复杂的系统，一味地追求结构简单必将影响其它方面的性能。在系统的复杂性不可能改变的前提下，必须从众多的分系统、部件和元件中，逐级分析研究，找出最不可靠的薄弱环节，给以加倍的注意。

事实上，导弹系统中各元件的可靠性是不可能一样的，有的元件可靠性很高，有的元

件可靠性较低。那些可靠性最低的元件就是系统中最薄弱的环节,系统的可靠性将主要决定于这些薄弱环节的可靠性。很显然,系统的可靠性不可能超过最薄弱环节的可靠性;并且,在一般情况下,系统的可靠度将接近于诸薄弱环节的可靠度之乘积。因此,改进这些薄弱环节的可靠性,往往能显著地改进全系统的可靠性。

为了找出这些对可靠性影响最大的薄弱环节,必须长期地、系统地积累每一次故障的资料。从局部的地面试验到全弹的飞行试验,从试制第一台样机到最后一发定型试验,对每一个微小的可靠性事故都要进行彻底的分析,一定要找到事故的真正原因,必要时应该进行故障的模拟试验。只有把故障的真正原因弄清楚了,才能提出有效的措施来改进可靠性。

对于能够重复使用的元件和部件,可以进行总装前检验(如对陀螺、舵机和电子元件);甚至在导弹服役期间,也可以进行定期的检验(如对控制盒)。

采用并联的备用件往往可以显著地提高元件组合的可靠性。若一个元件的可靠度为  $P_{r,e}$ , 把  $m$  个同样的元件并联以后,元件组合的可靠度  $P_{r,o}$  将是

$$P_{r,o} = 1 - (1 - P_{r,e})^m \quad (1-4-4)$$

例如,若  $P_{r,e} = 90$ ,  $m = 2$ , 并联后元件组合的可靠性将提高为

$$P_{r,o} = 1 - (1 - 0.90)^2 = 0.99$$

但是,并联备用件的使用经常受到重量、体积的限制;特别是有些元件在并联使用后性能参数要发生变化,为了发挥并联备件的作用,还要加装故障监测装置及自动切换装置,无形中又增加了复杂性。所以,只能在不致影响部件的性能参数,并且体积和重量不太大的情况下采用。有些只能一次使用的重要元件,如火箭发动机的点火器等,不可能在总装前进行试验检测,采用并联备件的方法来提高其可靠性是特别合适的。

对于不可能采用并联备件的一次使用的元件和部件(如火箭发动机、缠有导线的线管等等)应在总装前从每批中抽样进行试车或进行解剖分析。对于某些对环境敏感的部件,应该进行环境试验和储存试验,必要时在加强的条件下进行这些试验。以上都是为了保证导弹系统的可靠性常常采用的措施。

当然,为了保证实现导弹的高度可靠性,在生产过程中还应该采取合适的工艺装备及工艺过程,并且进行严格的质量控制。在勤务处理和使用过程中,也要遵守必要的可靠性规章。

在考虑可靠性的时候,应该充分认识到武器是在敌我双方进行生死搏斗的战场条件下使用的,敌人必然要采用各种手段来破坏我方武器的顺利使用。因此应该避免采用容易被敌人干扰和破坏而失去可靠性的设备。

例如,有线制导的反坦克导弹,有可能出现断线事故。虽然,导线这一元件的可靠性较差,但是绝大多数反坦克导弹仍然采用有线制导,这是为什么呢?主要原因之一就是,它与无线制导相比,很难受到敌人的干扰;在考虑到敌人干扰的条件时,有线制导比无线制导的可靠性反而要高得多。

## § 1-6 导弹武器的安全性

任何一种武器在正常的使用条件下,都绝对不允许伤害或危及己方人员的安全。

安全性差的武器,从广义上说也是可靠性不好的武器。但安全性的意义往往比可靠性

更重要。因为，安全性不好的武器不仅不能有效地打击敌人，甚至还会伤害自己，会使战士对于自己手中的武器失去信心；在客观上，可能起到敌人的武器所起不到的作用。所以，必须要求武器系统是绝对安全的。

起飞发动机不正常的点火（包括爆炸、迟发火、断续燃烧等）都可能造成安全性事故。此外，引信的过早解除保险也可能造成安全性事故。

如果在发射时，射手必须紧靠在导弹近旁，那么应特别注意安全操作。

## § 1-7 导弹系统对于实战条件的适应性

导弹武器系统在战斗使用中可能遇到复杂的环境和条件，因此，对它还应提出使用方面的要求。这些要求是根据实战需要提出来的。

### 一、射击的快速性

在反坦克战斗中，敌方可能把大量的坦克集中于狭窄的阵地正面上，进行突然的冲击。同时，坦克的行驶速度相当高，若以每小时 60 公里计，三分钟即可冲过三公里的纵深。因此，反坦克导弹的射手必须争取在短暂的战机之内，尽量多发射几枚导弹。

但是，目前的第一代和第二代导弹还只能容许单发操纵。因此，射击的快速性是值得注意的问题。

射击的快速性，主要取决于导弹的飞行速度。此外，它同射击过程的辅助动作所占时间也有一定关系（例如装填导弹的时间）。

射击的快速性可以用一个战斗单位在一定时间之内完成射击的导弹数目来衡量。

### 二、射击操作的简便性

这是反坦克导弹这种近战武器的一种很重要的性能，其中又包含了几方面的问题。

#### （一）发射准备简单性

反坦克导弹的射手在占领阵地以后，必须首先稳妥地安置导弹的发射装置，布置控制电缆，安装瞄准具及控制盒等等。显然这些准备工作愈简单，就愈有利于战斗。

通常用“从行军转入战斗状态所需的时间”来衡量这一性能。

#### （二）操作简单性

事实上，正是这一问题成为反坦克导弹从第一代向第二代发展的关键。对于第一代反坦克导弹来说，操作方式是目视瞄准、目视跟踪、人力操纵。导弹系统的构造虽很简单，但对射手的要求很高。在导弹的全飞行过程中，射手必须高度集中精力，才能不致失误。因此，采用这种操作方式，难于提高命中率。此外，射手必须经过严格的挑选和长期的训练，这个不利因素是带有战略性的问题。

第二代反坦克导弹只要求目视瞄准，而把跟踪并操纵导弹的工作交给了红外测角仪，从而大大减轻了射手的负担，提高了命中率。另一方面，对于射手的训练工作也简单多了。

但是，第二代导弹在飞行的全过程中仍需由射手参予瞄准目标。在此长过程中，一名射手只能对付一个目标，战斗效率有限；此外，在战场上，射手自己也是敌人攻击的目标，若射手在导弹已发射但尚未飞抵目标的过程中伤亡，飞行中的导弹也就失去了操纵，不能再完成战斗任务。因此，从战术上来说，最理想的情况应是把导弹发射出去就不必再



管，让导弹完全自动地飞向目标。显然，这种理想的操作方式将使导弹系统显著地复杂化。

### （三）发射并操纵导弹所需人数

目前，大多数情况是一名射手可以发射并操纵一发反坦克导弹。但是，也有需要两名以上的射手协作来发射并操纵一发导弹的情况（如美国的铜斑蛇）。

理想的情况是，两名射手可同时发射并操纵多发导弹，分别对付多个目标。但是这样将导致导弹系统结构的复杂化。

### 三、武器系统在阵地上的隐蔽性

反坦克导弹系统在阵地上应便于隐蔽，以减少在敌方突然打击下受到的损失和伤亡。如英国的斯文费厄导弹，它能使整个导弹系统隐蔽在障碍物后面。

此外，导弹在发射时的火焰、烟迹和吹起的尘土也会暴露阵地，也应尽可能采取技术措施予以解决。

### 四、导弹系统在行军时的轻便机动性

反坦克导弹主要是一种步兵武器，它应便于步兵携带，爬山涉水。因此，对于导弹的重量及武器系统的全重应加以限定。

导弹若能方便地装在吉普车、装甲车或直升飞机上，可提高它的行军机动性。在对导弹的射程、威力、射击精确性的要求很高的情况下，导弹系统的全重有可能增大到不便于步兵携带的程度，这时，只能装车或装机使用。

导弹外形应设计得紧凑一些，力求减小运输时的体积，这样既便于单兵携带，又可在车、机上多载导弹。

### 五、对气象、气温及能见度条件的适应性

气温影响火箭发动机的压力、推力及工作时间，以及导弹的飞行弹道。在战术技术要求中通常规定，武器应能在高低温为 $-40\sim+50^{\circ}\text{C}$ 的环境下正常使用（有些情况下，高低温范围还要大）。这对导弹的设计带来一定困难。为了适应高低温变化的情况，有时不得不附加上一些调整措施。例如，曾有人建议采用可调整的火箭发动机喷口；还有人建议在不同气温时采用不同的导弹。这些措施由于使用操作时不简便，极少被实际采用。

气象条件（风、雨、雪、冰雹）对于导弹的飞行也是有影响的，在极恶劣的气象条件下，导弹的结构甚至可能受到破坏。一般应对正常运用导弹武器的气象条件做出规定。

黑夜、浓雾、烟幕等，使能见度降低，给反坦克导弹的发射和操纵造成困难。先进的武器系统，大都采用特殊的器材来克服这些困难。

理想的武器系统应能全天候使用，但实际上很难做到。

### 六、导弹系统的抗干扰能力

在实际战斗中，敌方对我方发出的导弹进行干扰的方法是很多的。充分估计敌人进行干扰的可能，并采取相应的措施来提高导弹系统的抗干扰能力，是导弹设计工作中的重要问题。然而，要想让某一种武器能够对抗一切可能的干扰，是不现实的。情况往往是，某种武器可以对抗某些干扰，但在另外一些干扰作用下却变得无效。所以，在战术技术要求中，对于导弹武器所能对抗的干扰类型，应该有尽可能明确的规定。

第一代反坦克导弹的抗干扰能力是最强的。对第一代反坦克导弹进行干扰的办法主要

是以烟幕或强光中断射手目视瞄准目标和跟踪导弹的过程。另一个办法就是以火力压制反坦克导弹射手，或偶然地也能破坏指令传输导线。

第二代反坦克导弹的抗干扰能力就稍差一些。除了上述对第一代导弹进行干扰的方法之外，还可能以伪造的红外源迷惑红外测角仪；在夜间，坦克车上的灯光就可能成为这样的干扰源；在白天，则需通过特殊物质的高温燃烧来形成红外干扰源。为了提高第二代反坦克导弹对抗这种类型的干扰的能力，必须提高弹上红外光源的功率，或者对弹上红外光源进行调制处理。

对于向目标自动导引的导弹进行干扰的方法就更多了。因此，提高未来的第三代反坦克导弹的抗干扰能力将是一个重要的问题。

### § 1-8 勤务处理过程中的方便性及安定性

对导弹系统的勤务处理是指贮存、运输、检测及维修等一系列的后勤服务工作。导弹系统的设计应尽量考虑到这些工作的方便性，并保证导弹系统的质量在勤务处理过程中不致变坏。

在导弹长期贮存过程中，有许多元件是容易变质的，如：火箭发动机中的推进剂及隔热层，导弹结构中的塑料元件、电缆导线的绝缘包皮、电池的电解质，……等。所以，应该尽可能采用在长期贮存过程中质量安定的元件，并规定导弹的贮存条件及贮存期限。

导弹的包装能够严重地影响导弹在贮存及运输过程中的安定性。包装良好的导弹，可以经受住高低气温的多次循环变化，外界湿度的变化（以至将整个包装导弹浸泡在水中），各种频率的振动及冲击的作用等。而包装不良的导弹却会发生金属零件锈蚀、电气元件变质等不允许的现象。目前的趋势是，将导弹的密封包装筒做为发射装置的一部分，并从包装筒中直接发射出去。这样一来，直到导弹发射前的最后一瞬间，导弹的密封包装也不会被破坏。

理想的导弹系统，应该不需经过任何检测及维修工作，随时都可投入战斗。但实际上很难做到这一点，往往必须定期地，或在临战前对导弹系统的性能进行检测。在设计导弹时应力求把这些工作简化到最低限度，并保证最必要的检测工作能够迅速确实的完成。如果导弹系统中的某些零、部件失效，有时可允许更换，但更换工作应尽量简单（为保证补给、更换工作能顺利进行，导弹的零、部件必须具有一定的互换性）。

### § 1-9 大量生产时的经济性和工艺性

反坦克导弹的产量数以万计，在设计时应考虑其生产成本。通常，导弹的构造愈简单，其生产成本愈低。

导弹所用材料应立足于国内，并应尽量少用稀缺材料。

设计导弹时，应考虑到工艺上能够实现，并便于大量生产。各零件应有合理的精度及公差要求。

一个导弹是由许多零、部件组合而成的，它们往往分散在许多工厂或车间进行生产，然后集中到一个车间进行总装。在设计工作中应合理地划分部件，使各部件的生产、检验及调整工作能独立地分散进行（尽量避免互相牵制），同时还要考虑装配过程的工艺性，使装

配工作能顺利进行。

设计中还要考虑到，火工品的装配应尽可能在全部装配工作的最后阶段进行，并且要考虑到装配工作的安全性，使火工品的装配工作尽可能简单，没有严重的冲击，避免带电的操作等。

### § 1-10 反坦克导弹武器系统有效性的综合评价

上面对反坦克导弹武器系统的战术技术要求的各个方面进行了分析。但是，如果对两个以上的导弹武器系统进行综合评价，则是一个更复杂的问题。

归根结底，如果一种武器能够对敌方造成最大的损失，而自己方面的损失却最小，那么，这种武器的战斗效果就最高。因此，在使用一种武器的战斗过程中，敌人的损失程度同自己的损失程度的比值，可以做为衡量这种武器的战斗效果的指标。这个比值就是武器的“有效性”，也称为武器的“效率”。

在武器的有效性中，对敌方造成的损失最大和对自己造成的损失最小常常是矛盾的要求。此外，怎样才算敌方损失最大和自己损失最小？也可以有几种不同的观点。

比较普遍的一种提法，是把单发导弹摧毁敌方目标的全概率（简称摧毁概率）做为衡量敌方损失程度的一种指标。摧毁概率  $P_d$  的定义是：导弹可靠地发射和飞抵目标、命中目标、战斗部被可靠地引爆，并使敌方目标失去战斗力的概率，即

$$P_d = P_f P_m P_w P_k \quad (1-10-1)$$

对导弹武器有效性的问题进行全面的研究是很复杂和很迫切的任务，必须从战斗的全局来考虑。从设计的角度来说，各种导弹武器的有效性如何，必须在具体使用条件下来考虑。能够适应一切条件的万能的武器是没有的。设计师只能根据所规定的具体条件来寻求使武器的有效性最高的设计方案。然而战争是千变万化和不断发展的。所以，设计师常常也必须在多种条件中寻求某种折衷的、更具通用性的方案，并不断地改进和革新旧的武器系统，以适应未来战争的需要。

## 第二章 反坦克导弹总体方案的分析

反坦克导弹系统是一个复杂的武器系统，包括很多组成部分。因此，要顺利地完成一个导弹的研制工作，必须组织起多方面的科学技术部门及生产部门，分工合作，大力协同。其中每个部件、元件的研制，都需要专业化程度很高的技术，只能分散在各个专门的科研、生产单位进行。但是，每个部件的研制工作又都必须服从于统一的总体技术方案，互相之间协调配合，组成一个综合性很高的整体。

在制定导弹的总体方案时，应该根据战术技术要求，统筹解决以下各方面的问题：

第一，战斗部（及引信）的型式及主要技术指标。

第二，导弹制导系统的基本作用原理、制导装置的类型、特点及主要技术指标。

第三，导弹的飞行弹道方案、发射及动力装置（发动机）的方案及技术指标。

第四，各部件在导弹上的布局安排，弹体的空气动力外形及弹体结构的型式。

第五，在发射准备工作及导弹的发射、飞行过程中，导弹系统中各部件的动作时间顺序表（参阅附录二，米兰和陶式导弹的例子）。

以上诸方面的问题，互相有交叉影响。一个好的总体方案，应该周到妥善地克服各部分之间的矛盾，使各部件应有的性能都得到充分发挥，并使各部件的作用协调一致，紧密配合，构成一个完整的武器系统。

### § 2-1 反坦克导弹的战斗部方案

#### § 2-1-1 战斗部类型的确定

现有的反坦克导弹的战斗部，都是利用锥孔装药所产生的高速射流来破坏敌方坦克的装甲，无一例外。这种战斗部统称为“破甲战斗部”。破甲战斗部的威力作用，依靠的是战斗部所装炸药的化学能量，因而不需要导弹具有很大的速度（事实上，导弹的速度太大时，反而会给破甲战斗部的设计带来一些困难）。此外，人们对于它的研制和使用已积累了较丰富的经验。

然而，坦克的装甲也在发展之中，如多层装甲、复合装甲等相继出现。聚能射流破甲战斗部对于这些新型装甲的威力作用，在不同程度上有所降低。因此，各种新的战斗部方案也是层出不穷的。然而新的战斗部方案往往对导弹系统其它部件有新的要求，甚至涉及全新的设计概念。

#### § 2-1-2 关于战斗部破甲威力的分析

##### 一、破甲威力诸因素

破甲深度是形成破甲威力的重要因素。此外，在破甲深度一定的前提下，穿孔直径愈大，后效威力及击毁目标的程度和概率也愈大。此外，采用特殊的可燃物质，使其随聚能

射流进入装甲内部，可以进一步增大后效威力，这是近来研究的趋势之一。

## 二、静破甲深度及其规定

在静止试验条件下测量得的破甲深度，称为“静破甲深度”。反坦克导弹聚能装药战斗部的静破甲深度，必须远远超过敌方坦克装甲的厚度，才能保证导弹在命中并正常起爆条件下具有高的毁伤目标的概率。这是由于：

第一，反坦克导弹命中目标时，弹轴方向一般地并不垂直于装甲（图 2-1）。

第二，当导弹碰击装甲瞬间，由于导弹同钢板之间有相对运动，而使破甲条件恶化。

第三，聚能射流在穿透装甲之后，还应具有一定的后效作用。

考虑到上述因素，为了使导弹在命中目标并且在正常起爆的条件下毁伤坦克，其战斗部的静破甲深度应满足如下条件

$$L_j \geq \frac{b}{\cos \varphi} \cdot k + \Delta L \quad (2-1-1)$$

其中  $L_j$ ——静破甲深度；

$b$ ——坦克装甲厚度；

$\varphi$ ——着角；

$k$ ——考虑到导弹对于钢板有相对运动的修正系数。实际上，当导弹转速小于 30 转/秒，并且  $\varphi \leq 70^\circ$  时， $k \approx 1$ ；

$\Delta L$ ——为了保证后效作用所需之破甲裕量，根据经验统计，应使  $\Delta L = 140 \sim 250$  毫米，在此条件下，破甲后的射流还足以在 3 米内贯穿油箱或弹药仓。

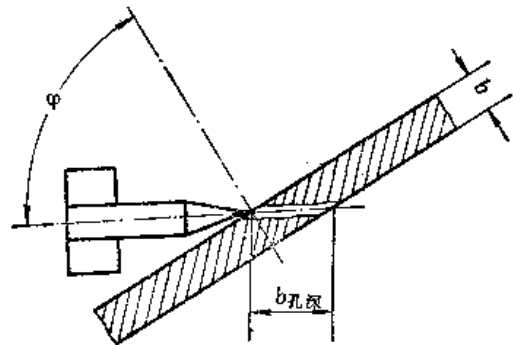


图 2-1 破甲深度同钢板厚度及着角之关系  
 $b$ —钢板厚度； $\varphi$ —着角，即弹轴同钢板法线的夹角。

## 三、战斗部结构因素对破甲威力的影响

(一) 战斗部所装炸药的爆速及装药密度 炸药爆速和装药密度愈大，则在同一结构条件下产生的聚能射流破甲威力愈大。

(二) 药型罩材料 以紫铜做的药型罩，其破甲性能较好，故被普遍采用。但是，用铀 238（提炼铀 235 所剩下的废渣）制成的药型罩，破甲性能进一步提高，已引起人们的注意。

(三) 炸药柱的尺寸 在形状相似，并且其他条件相同的情况下，炸药柱的外径  $d$  直接同破甲深度成正比。

(四) 药型罩的形状 通常采用圆锥形的药型罩。喇叭形的药型罩可以增加破甲深度，但形成射流的稳定性差，而且工艺复杂，所以很少采用。圆锥形药形罩（紫铜的）的锥顶角  $2\alpha$  对破甲深度的影响，可参看下表所列在典型条件下（炸药爆速为 8300 米/秒）的实验数据。

锥顶角 ( $2\alpha$ )	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$
静破甲相对深度 $\left(\frac{L_j}{d}\right)$	6.3	5.56	5.3	5.13	4.95

当锥顶角  $2\alpha$  增大时，静破甲深度  $L_j$  有所降低，但射流稳定性提高，穿孔直径也增大，通常把锥顶角选为  $2\alpha = 35^\circ \sim 60^\circ$ 。在战斗部直径较大时，倾向于把药型罩锥顶角也

选得大一些。

(五) 炸高 在静破甲试验中, 药型罩锥形底部端面至钢靶的距离称为静止炸高。在每一具体条件下都存在一个最有利的静止炸高  $H_J$ 。在最有利炸高下, 可获得最大的静破甲深度。通常, 最有利静止炸高  $H_J$  是药型罩直径  $d$  的 1~3 倍。当药型罩锥顶角  $2\alpha$  愈大时, 最有利炸高的相对值  $\frac{H_J}{d}$  也愈大 (图2-2)。

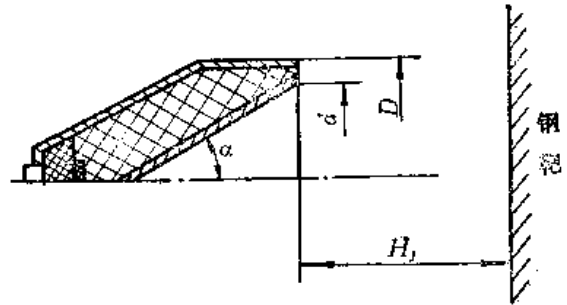


图2-2 影响威力的战斗部结构因素

(六) 隔板 在起爆药柱和药型罩之间设置由惰性物质做成的特殊形状的隔板, 可以提高破甲深度。但是, 其破孔直径较小, 破甲稳定性较差。

(七) 工艺质量 若战斗部的药型罩及药柱的形状及质量分布有不对称之处, 则对破甲性能有一定的影响。

### § 2-1-3 聚能破甲战斗部的结构参数

战斗部的直径  $D$  基本上决定了炸药柱及药型罩的直径  $d$ 。所以, 在保证破甲射流的稳定性及适当的穿孔直径的前提下, 适当设计的破甲战斗部, 其直径  $D$  基本上就决定了静破甲深度  $L_J$ 。按目前一般水平, 有如下估算关系式:

$$L_J = (5-6)D \quad (2-1-2)$$

反之, 根据对战斗部的静破甲深度  $L_J$  的要求及战斗部研制水平, 即可确定战斗部的直径  $D$  的合理范围。

战斗部的长度基本上由炸药柱长度及风帽长度决定, 而风帽长度应略大于最有利静止炸高  $H_J$ , 大出的部分相当于在瞬发引信的作用时间内导弹向靶板面继续前进的距离。在设计战斗部风帽的长度时, 应考虑到导弹命中目标瞬间的速度。

战斗部的重量及重心位置, 将影响总装后导弹的重量及重心位置, 应严格控制, 不使其超过规定的公差范围。

### § 2-1-4 战斗部方案同总体的协调

除上述之外, 在战斗部方案同总体方案之间, 还有以下几方面应加以协调:

#### 一、导弹命中目标时的姿态

导弹命中目标时, 其弹轴方向若能大体上同装甲的法线一致, 则能取得最好的破甲效果。考虑到坦克装甲都具有一定的坡度, 导弹若能从上向下攻击, 则将处于更优越的态势。对于通常以水平飞行的导弹, 也应尽可能要求命中瞬间的攻角不要太大, 以免增大着角。此外, 由于命中瞬间导弹的姿态不同, 战斗部的实际炸高也将发生变化, 在设计风帽的外形时, 应考虑到这一因素 (图2-3)。

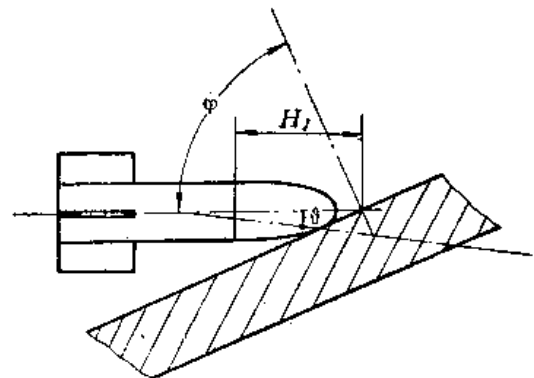


图2-3 风帽外形及导弹姿态对实际炸高的影响

## 二、导弹命中目标时的速度

导弹命中目标时的速度最好不要变化太大，否则将使实际炸高变化较大，影响破甲威力。提高引信的瞬发性，可以减弱这种不利影响。

## 三、引信解除保险的方式

引信解除保险的方式应确保导弹系统的安全性。特别是，如果在发射过程中导弹的起飞点火系统发生故障未能使导弹射出，引信的保险绝不能解除。有些导弹是在飞出一定距离之后，利用已被放出的导线上的张力来把引信的保险解除的。

## 四、自动导引的制导方式对战斗部的影响

在自动导引的反坦克导弹上，导引头位于战斗部的前方，将对聚能射流破甲战斗部的威力产生一定的影响。此外，由于自动导引的反坦克导弹的飞行速度可能超过音速，故应注意头部的空气动力加热及防热问题。

### § 2-1-5 自锻 (Self-forging) 战斗部

自锻战斗部可说是聚能射流破甲战斗部的旁支。如果一个聚能战斗部的药型罩锥顶角超过了大约  $100^\circ$ ，那么，在起爆以后，金属药型罩并不形成通常的射流，而形成一种较射流短粗的金属射弹（具有前端小后端大的形状），并以超过 2000 米/秒的速度向前射出。这个自锻的金属射弹在钢靶上的穿甲深度，虽不如金属射流的破甲深度大，但是，却不受炸高的影响，甚至，在它飞过数十米距离之后，只要打中钢靶，仍能穿透一定深度。所以，自锻战斗部能更有效地击穿多层装甲。实际上，它的威力作用机理，基本上是动能穿甲原理。

利用自锻战斗部的特点，可能设计出全新的反坦克导弹。例如，导弹可以不必直接命中坦克，只需使战斗部在一定距离内及一定方向上起爆，就能使自锻金属射弹打中目标；当然，为此制导系统必须有特殊的工作原理。

### § 2-2 反坦克导弹的制导系统方案

#### § 2-2-1 制导系统的类型及特征

##### 一、导引及控制

为了保证导弹以较高的概率直接命中在规定射程范围内运动的目标，反坦克导弹的制导系统必须具备两个方面的基本功能：

第一，测量导弹的实际飞行弹道相对于理想弹道的偏差，并针对这个运动偏差形成适当的操纵指令。这就是“导引”的功能。完成导引功能的设备组合，称为“导引系统”。

第二，按照导引系统所提供的操纵指令，产生一定的控制力，以便修正导弹的实际飞行弹道，使它尽量地符合于理想弹道。这就是“控制”的功能。完成“控制”功能的设备组合，称为“控制系统”。

导引过程的实质，是获取、处理、形成并传递制导所需的信息。控制过程的实质，是按照导引信息来修正导弹的运动。在反坦克导弹发展的实际历程中，导引系统的发展是最主要的问题。导引系统的类型是划分第一代、第二代和第三代的主要标志。然而，控制系

统同导引系统总是密切而不可分开的,一定的导引系统总要有一定的控制系统同它相适应。所以,统称为“制导”系统。

## 二、按“三点法导引”原理工作的制导系统

第一代及第二代反坦克导弹普遍采用三点法导引原理。三点法导引以基准线作为“瞄准线”,即从射手的瞄准具到目标轮廓的中心点之间的视线。三点法的理想弹道,是把导弹视为一个质点并使它始终沿瞄准线运动而形成的弹道。实际上,导弹经常要偏离瞄准线。从射手的瞄准具到弹上被跟踪点(如曳光管)之视线称为“跟踪线”,在跟踪线与瞄准线之间的夹角即“误差角”。测量此误差角之大小及方向,并计及瞄准具至导弹的距离,即可获得导弹偏离瞄准线的信息。根据这一信息,即可形成适当的操纵指令。

## 三、目视瞄准、目视跟踪、手动操纵及有线传输指令的制导系统

这就是第一代反坦克导弹所采用的按三点法导引原理工作的制导系统方案。这一方案的优点是:比较简单,成本较低,具有较高的可靠性及灵活性。它的缺点是:射手的负担重(操作极为紧张),并需经严格的训练;命中率较低,而且导弹的飞行速度不能太高,以适应射手的反应能力。

## 四、目视瞄准、红外测角仪自动跟踪目标、自动形成操纵指令并有线传输指令的制导系统

这就是大多数第二代反坦克导弹制导系统的方案。这一方案基本上保留了第一代导弹制导系统的优点,而且具有新的特点;

第一,射手的负担大为减轻,从而能大大缩短训练时间;

第二,提高了命中率;

第三,由于红外测角仪的反应速度比较快,所以导弹的飞行速度有所提高。

这一方案的缺点是:

1. 仍需要射手参予导弹的整个导引过程;
2. 依靠导线来传输指令,影响导弹飞行的速度及射程,而且不便于从火炮中发射导弹。

## 五、有线导弹的速度极限问题

第一代反坦克导弹及大多数第二代反坦克导弹采用了有线传输指令的方案,这是它们的优点,而不是缺点。因为在这些导弹的具体情况下,采用这一方案,能以较小的代价,较好地完成传输指令的任务。

采用导线传输指令所带来的缺点,主要是:1. 导弹不便于从火炮中发射。如橡树棍、阿特拉斯、阿克拉及铜斑蛇等从火炮中发射的反坦克导弹,都避免采用导线传输指令的方案;2. 若导弹的速度较高,则需要提高导线强度,所以超音速的反坦克导弹如海尔法也不采用导线传输指令的方案。

关于导弹速度及导线强度之间的关系可简单分析如下:

假定导弹以一定的速度飞行,并且导线从导弹中的线轴上释放出来的过程是稳定的;暂且假定导线同导弹放线口之间没有摩擦力的作用。实验和理论分析都表明,导线从线轴上释脱后将形成螺旋状。刚放出的导线在靠近线轴处具有较小的螺距,在远离线轴处的导线具有较大的螺距。随着导弹向前飞行,导线螺旋以同样的速度跟随着导弹运动,实际上



是以波的形式沿导线传播。可以设想，假若已放出的导线为无限长，则在无限远的导线固定点处将不受这种螺旋式波动的影响，如图2-4所示。由于导线释放的过程是稳定的，故在微元时间  $dt$  之内，将有质量为  $(\rho_T v dt)$  的导线从弹上释脱下来。这里， $\rho_T$  为单位长度导线的质量。若把导弹及全部已释放的导线视为一个系统，则在微元时间  $dt$  之内，此系统所失去的动量将为  $\rho_T v^2 dt$ 。因此，在无穷远处的导线固定点所给予导线的张力  $T$  必须是

$$T = \rho_T v^2 \quad (2-2-1)$$

这个张力  $T$  是在导线释脱过程中克服导线的惯性力所必须的。所以，若导线所能承受的张力为  $[T]$ ，则导弹的速度将不能超过按下式所算出之极限值

$$v \leq \sqrt{\frac{[T]}{\rho_T}} \quad (2-2-2)$$

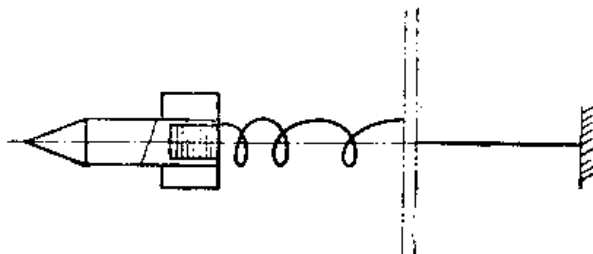


图2-4 从导弹上释放出的导线

实际情况中，导线还受到放线口的摩擦力，及导弹加速运动阶段（尤其是刚发射时）的冲击力。为承受冲击力，导线的开始数米到数十米的长度上应特别加强。摩擦力只能由实验测得，其大小同惯性张力  $T$  大约具有同一数量级。

考虑到摩擦力及加速飞行中的情况，导弹飞行的速度比按 (2-2-2) 式所算出的还应小得多。

例如，美国的陶式导弹，在以导线传输指令的导弹之中是飞行速度最大者，它的导线是采用镀银的钢琴弦线，抗拉强度极限为 44 牛顿，线密度为 0.105 克/米。按式 (2-2-2) 计算，只考虑放线惯性力时，飞行速度极限将为

$$v < \sqrt{\frac{44}{0.105 \times 10^{-3}}} = 645 \text{ 米/秒}$$

陶式导弹的实际最大速度只约为 360 米/秒。考虑到放线口摩擦力、加速飞行引起的冲击力以及必要的强度裕量，它的实际速度大约只是按 (2-2-2) 式算出的速度极限值的 55%，这应该是可以理解的。无论如何，从 (2-2-2) 式可看出，要想进一步提高有线导弹的飞行速度，就必须同时设法提高导线的抗拉强度和降低它的线密度。

## 六、驾束导引

驾束导引也是一种三点法导引，导弹沿着指向目标的电磁波束飞行。弹上装有测量导弹偏差的装置及形成控制指令的计算装置。所以，在驾束导引中，不必再从地面向导弹传输遥控指令。驾束导引的导弹也有很好的射击精确性，但是它的弹上设备较为复杂。此外，它的地面操纵站必须用一束辐射能照射目标，这样更容易暴露自己的阵地。只有法国研制的阿克拉导弹曾经采用激光驾束的导引方案（该弹尚未装备部队）。但是，驾束导引具有的优点是，若以毫米波进行驾束导引，有可能不受烟幕等敌方干扰的影响。

## 七、半主动寻的导引

这种导引方案需要有一个瞄准手用一束能量高度集中的激光或毫米波向敌方坦克照射，借助反射的电磁波能量，使弹上的寻的导引头获得导引信息。铜斑蛇导弹就是采用激

光半主动寻的导引的(见附录二)。这一方案属于“末段制导”范畴,因此,在导弹飞行弹道的前半段可以完全不进行制导,这就为大幅度地提高导弹的射程及射速创造了有利的条件。但是,在导弹制导过程中,始终需要一名瞄准手向目标照射能量,并且瞄准手必须同导弹发射阵地保持密切的联系,这就限制了这一导引方案的战术灵活性。

#### 八、被动或主动寻的导引

为了克服半主动导引方案中需要一个瞄准手用激光标志器照射目标所产生的缺点,在第三代反坦克导弹中势必将采用被动或主动寻的导引的方案。为此,必须突破的技术问题是,如何由导引头把坦克目标从地面背景中自动分辨出来。目前,在红外成象、相干光辨识目标、毫米波辐射探测和毫米波雷达等多种技术途径上正进行着大量的探索和研究工作<sup>(1~4)</sup>。

### § 2-2-2 以光学装置实现三点法导引的几个总体问题

#### 一、光学瞄准具及射手

对于第一代反坦克导弹来说,光学瞄准具及射手都是导引系统的重要组成部分。光学瞄准具将远处的目标及导弹放大到适于分辨的程度;射手凭视觉观察导弹上的曳光管对于坦克轮廓的中心点的偏差,从而获得导引所需的信息;然后,根据经验及判断,来移动操纵手柄,给出相应的控制指令。

对于第二代反坦克导弹来说,光学瞄准具及射手仍然是导引系统的重要组成部分。射手操纵光学瞄准具的瞄准轴线,使十字线始终对准坦克轮廓的中心,从而为红外测角仪提供测角的基准线。

由光学瞄准具及射手组成的导引系统具有很多优点:人的视觉器官具有高度的敏感性和分辨率,并具有适当的三维分辨能力,可准确地区别形状和敌友;借助光学望远镜可以探测很远的目标;借助夜视仪器可在黑暗中探测目标。此外,人的自觉意志可以在复杂的战斗环境中使系统具有高度的适应能力。

这种系统的主要缺点是,射手的主观特征(经验、生理状态和精神状态)对导引系统的工作质量影响太大。

#### 二、射手凭视觉器官发觉瞄准偏差的能力

视觉器官发觉瞄准偏差的能力同“分辨率”略有不同。在正常的光照条件下人眼可以把张角为 $1'$ 的两个点状目标分辨出来。这个分辨率是很高的。但是,在导弹射手向坦克瞄准时,他需要发觉导弹上的曳光管是否偏离了坦克轮廓的中心点(第一代导弹),或者需要发觉坦克轮廓的中心点是否偏离了瞄准具中的十字线(第二代导弹),这是一种发觉瞄准偏差的能力。坦克轮廓的中心点并无显著标志,射手只能根据观察进行判断。这时,瞄准的精确性同坦克目标在瞄准具中所显示的影象的大小是有关系的。要进行精确的瞄准,射手必须在导弹曳光管或者瞄准镜十字线对于坦克轮廓中心只有微小偏离的时候,就能发觉这个偏离。根据对枪炮瞄准手的类似的实验研究(见图2-5)<sup>(5)</sup>,如果目标在显示器中呈现的影象视角很小,那么,只有在瞄准点偏离目标中心点很大时,视觉器官才能发觉这一偏离。当目标增大时,可被视力发觉的瞄准偏差将迅速减小。当目标视角大约为半度的情况下,可被发觉的瞄准偏差约为7% (瞄准点至目标中心之偏差相对于目标本身尺寸之

百分比)。此后，继续增大目标视角，对于改进瞄准偏差已无显著效果。在极限情况下，可被视力发觉的瞄准偏差约为5%。上述研究结果可帮助我们合理地确定瞄准具望远镜的放大倍率，其原则是，瞄准具的放大倍率，应该使位于最大有效射程上的目标在瞄准具中的影象的视角不小于半度左右。按此原则确定的瞄准具放大倍率，可以保证射手以合理的敏锐性发觉瞄准偏差。

**例题** 坦克的高度约为2米，导弹的最大有效射程为3000米。要求合理地确定望远镜的放大率，使瞄准误差致过大。

若目标出现在3000米处，在不用望远镜时，坦克的高度在射手眼中的视角为

$$\phi_0 = \frac{2}{3000} \text{ 弧度} = 0.0382^\circ$$

利用望远镜时，应将坦克影象的视角放大至 $0.5^\circ$ 左右，故望远镜的合理放大率应是

$$M = \frac{0.5^\circ}{0.0382^\circ} = 13$$

超过13倍的放大率是不必要的，可适当减小。例如，若取 $M=8$ ，则目标影象高度的视角为 $\phi = 0.0382^\circ \times 8 = 18'$ 。由图2-4中曲线可知，在此条件下，可被发觉的瞄准误差约为10%（即0.2米，尚不算太大）。但当继续减小望远镜的放大率时，将会使瞄准误差迅速增大，这是不适宜的。

### 三、对光学瞄准具的要求

在总体设计中，应对光学瞄准具的放大倍率、视场角及孔径提出综合的要求。关于放大倍率已如上述。在确定视场角指标时，应考虑以下因素：

第一，足够大的视场角，以便于发射前搜索目标；

第二，在受到各种随机干扰的情况下，导弹的起飞弹道将会产生散布。这时，瞄准具的设计应该保证导弹的启控点位于其视场之内；

第三，对第一代反坦克导弹来说，在目标有横向运动的情况下，即便射手在一段时间内不调整瞄准具，目标仍不致逸出视场；

第四，对第一代反坦克导弹来说，应使瞄准具的视场覆盖大半个可能攻击区。

但是，在望远镜的放大倍率、视场角及入射孔径之间有一定的制约关系。在孔径一定的条件下，放大倍率愈大，视场角就愈小；或者，在放大倍率一定的条件下，视场角愈大，孔径也必须增大。望远镜的成本及体积是随着孔径的增大而急剧增大的。所以，常常要在放大倍率同视场角之间寻求折衷的解决办法。

为了解决这个矛盾，可以采用自动变换视场角的办法。在导弹刚发射不久，尚未导入到瞄准线上时，瞄准望远镜应有较大的视场，却不需要太高的放大倍率。在导弹已稳定地进入瞄准线之后，瞄准望远镜应该有较大的倍率，却不再需要太大的视场。所以，最好是使瞄准望远镜具有两种以上的视场（及相应的两种以上的放大倍率），并能在适当的时刻自动转换。

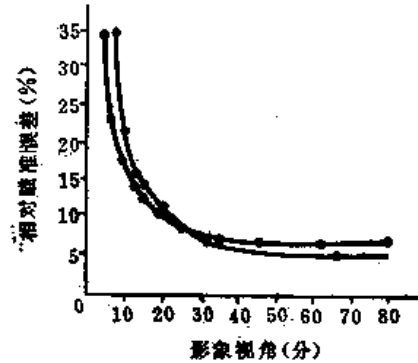


图2-5 目标视角对于可被发觉的瞄准偏差的影响

#### 四、对红外测角仪的要求

在第二代反坦克导弹的导引系统中，红外测角仪是关键部件。红外测角仪的光学系统，往往同射手瞄准具共用一个物镜并同轴安装。为了尽量避免杂散光的干扰，红外测角仪光学系统的视场应远小于瞄准具的视场。但是，红外测角仪的视场缩小之后，就增加了在飞行过程中丢失导弹的危险。所以，在采用红外测角仪跟踪导弹的情况下，应该对导弹在整个飞行过程中（尤其是在无控段及导入段）的弹道波动情况进行仔细的分析。此外，应有适当的技术措施来保证红外测角仪同光学瞄准具的同轴性，并能以专用的装置经常进行检测及校正。

和瞄准具类似，红外测角仪也应该具有两个以上的视场，并能自动转换。

### § 2-2-3 控制指令的调制方式

#### 一、信息及信号

导引系统输入的是关于导弹飞行误差的“信息”，输出的是控制指令的“信号”。信号不等于信息。信息是所要传递的情报或消息的内容。而信号则是表达信息的某种形式。同一种信息可以用多种不同形式的信号来表达。例如，图 2-6 中表示的七种形式的信号，实际上表达的是同一个信息。

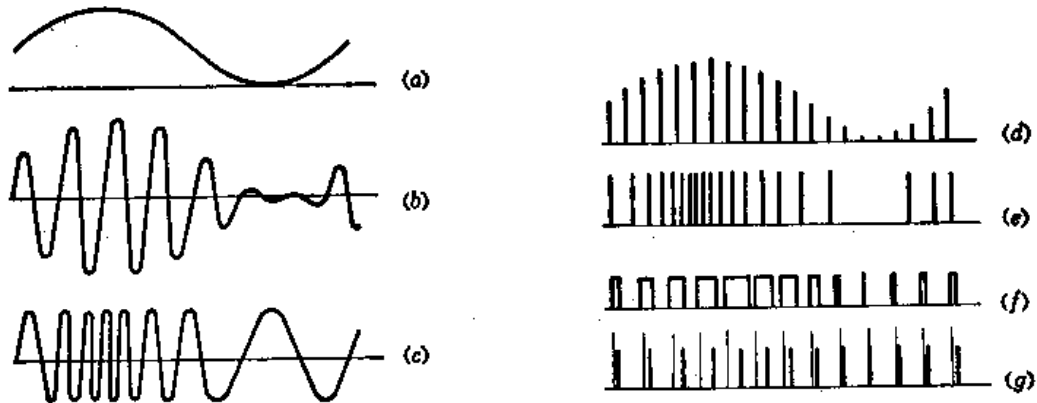


图2-6 调制信号的几种方式

(a) 直流缓变信号；(b) 调幅的交流高频信号；(c) 调频的交流高频信号；(d) 调幅的脉冲信号；(e) 调频的脉冲信号；(f) 调宽的脉冲信号；(g) 调相的脉冲信号。

#### 二、信号的调制

直流缓变信号〔图 2-6 (a)〕具有最简单和最直观的形式，但是在传输过程中很容易混入噪声，不能保证制导的可靠性及精确性。所以，总是用它来调制高频的交流信号或高频的脉冲信号。

#### 三、调宽的脉冲信号

在有线制导的反坦克导弹中，最普遍采用的指令信号调制方式是脉冲宽度调制〔图 2-6 (f)〕。这种脉冲调宽信号的优点是：

第一，抗干扰能力强。显然，若有一个噪声叠加在信号上，虽然信号的脉冲幅值将产生波动，但是信号脉冲的宽度却很难受到显著影响；

第二，容易解调，相应的弹上设备简单可靠。事实上，不需任何特殊的解调设备，即

可用这种信号直接控制一个继电器（或称乒乓式）舵机，相应地产生脉冲调宽式的舵上控制力。由于弹体本身具有低通滤波特性（较大的惯性），故只有脉冲调宽的舵上控制力的平均值能被弹体所响应（参阅 § 5-4）。

#### 四、其它调制方式

在反坦克导弹中，也有可能采用其它的信号调制方式，如龙式导弹就采用了脉冲相位调制信号。从理论上说，抗干扰能力最强的是脉冲编码调制，但尚未在反坦克导弹上采用过。

### § 2-2-4 将控制指令转化为舵上控制力的方法

弹上接收机收到导引系统传来的控制指令之后，通过舵机，使弹上操纵器动作产生适当的舵上控制力。操纵器的类型是多种多样的。在总体方案中应该采用哪一种类型的操纵器，决定于具体的条件。下面对几种在反坦克导弹上常用的操纵器进行分析：

#### 一、空气动力扰流片

这是在第一代反坦克导弹中广泛采用的操纵器（图2-7）。它是一个简单的薄片，在控制指令的作用下，可以突出到弹翼的上表面（或下表面）的气流中。突出的高度仅为数毫米。由于它的存在，破坏了弹翼表面的附面层，使翼面的上（或下）表面的压力升高，于是产生了举力。



图2-7 空气扰流片

它的优点是：第一，特别适于以脉冲调宽的方式工作，所以舵机很简单；第二，机械惯性很小，对控制信号的响应很灵敏；第三，动作的功率很小。

它的缺点是：第一，使空气阻力增加很大；第二，所提供的控制力有限；第三，必须把它装在弹翼上，影响弹翼折叠。所以，装有空气动力扰流片的导弹不能用无座力炮或发射管来发射。

#### 二、燃气流扰流片

可以认为燃气流扰流片是空气动力扰流片的推广。在燃气流中，通常是在喷管出口处设置一个或两个可以伸缩的刀片状机构（图2-8），当它们在控制指令作用下切入燃气流时，就造成局部的冲波和涡流，引起喷管扩张段内压力分布改变，使得喷气推力的方向偏斜。于是喷气推力在横侧方向具有一个分量，就形成了舵上控制力。

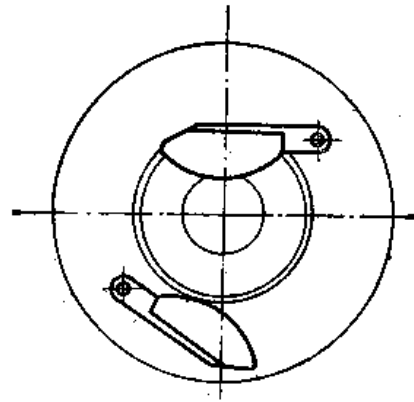


图2-8 在喷口周围的燃气扰流片（后视图）

它除了具有空气动力扰流片的优点之外，还有更多的优点：1. 不影响导弹的空气动力外形；2. 能提供较大的舵上控制力。根据某些实验研究<sup>(9)</sup>，采用单个扰流片，可使喷气推力偏斜  $14'$ ；3. 扰流片动作所需的功率很小。

它的缺点是：1. 扰流片在燃气流中的烧蚀问题很严重，必须从扰流片及发动机推进剂组分两个方面来解决，目前已能成功地工作数十秒钟；2. 使发动机推力有一定的损失，大约推力方向每偏转  $1'$ ，轴向推力损失  $1\%$ <sup>(9)</sup>。

### 三、燃气流偏流环

上述的燃气扰流片是最简单的一种使燃气流偏转的装置。然而，还有许多可使燃气流偏转的方法。较常用的有燃气偏流环(图2-9)。它是在发动机喷管出口外部的一个圆环，可绕铰链轴摆动。燃气偏流环同燃气扰流片有大体相似的优缺点，其突出优点是，它能提供更大的舵上控制力(喷气推力可偏斜 $30^\circ$ <sup>(6)</sup>)；同时轴向推力的损失也比燃气扰流片的损失略小。但另一方面，它对于舵机功率及铰链力矩的要求比较高。此外，在不提供舵上控制力的情况下，它也要付出一定的轴向推力损失。

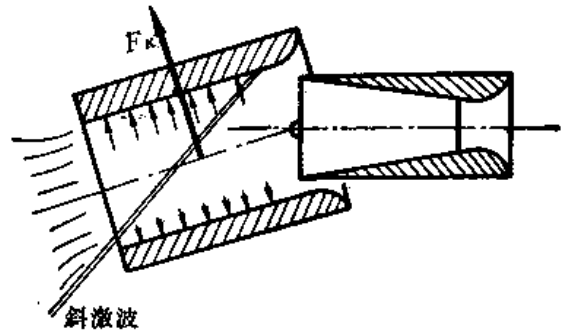


图2-9 燃气偏流环

### 四、侧向推力发动机

上述的燃气扰流片或偏流环，都是借助于改变主发动机喷气推力的方向来形成舵上控制力的。但是，也可以利用单独的发动机来直接提供所需的舵上控制力，这就是侧向推力发动机。在反坦克导弹上采用侧向推力发动机的例子，一个是龙式(参考附录二)导弹，另一个是阿特拉斯导弹。

龙式导弹的设计概念是新颖的，然而也是成功的。这个例子说明，用侧向推力发动机来控制反坦克导弹的飞行，具有如下的优点：1. 在各种类型的操纵器方案中，只有它是对指令的响应最灵敏的，既不需任何机械构件的动作，又不需导弹弹体在飞行中摆动和转弯，即可直接改变导弹的运动方向；2. 它的构造也比较简单，原则上不超过通常的固体火箭发动机的复杂性，不需要通常的舵机；3. 对辅助能源的消耗也很少。

它的缺点是：1. 在采用固体推进剂的情况下，每个侧向推力发动机只能开动一次；2. 对发动机点火系统的准确性和可靠性要求很高；3. 对于弹体的空气动力外形有一些影响。

阿特拉斯是英国与比利时联合研制的反坦克导弹，它的设计思想是企图在弹道末段临近目标的适当位置上，依靠一个单独的侧向推力发动机的适时点火来修正弹道。可以预料，由于修正的机会最多只有一次，所以技术上的问题可能不少。虽然，阿特拉斯导弹没有研制成功，但是这种创新的设计思想是有启发性的。事实上，多年来一直不断有人在这一方向上进行探索<sup>(7~9)</sup>。后来的发展是企图增加修正脉冲的数目。在这一方向上的研究是否能获得实用的成果，只能由实践做出回答。

### 五、空气动力控制面

即可转动的空气动力翼面或舵面。在超音速的“地-空”及“空-空”导弹中，广泛采用空气动力控制面来做为操纵器。置于导弹尾部的称为尾舵，而在弹头部的称为鸭式舵，在弹体中部(重心附近)的称为可动弹翼。

在反坦克导弹中也有采用空气动力控制面的，如威基兰特、阿克拉、陶及铜斑蛇导弹。它们都是采用尾舵控制(尾舵产生控制力的作用点距重心远，控制效率高)。

采用空气动力控制面做为操纵器的优点是：1. 不会造成推力损失和太大的空气阻力损失；2. 飞行速度愈高，愈能提供较大的舵上控制力；3. 舵上控制力与火箭发动机的

工作无直接关系，故在无动力飞行的情况下，也能进行操纵（如陶式及铜斑蛇导弹）。

但是，空气舵的动作往往需要较大的铰链力矩，并消耗较大的功率，所以对于舵机及弹上辅助能源的要求比较高。

## § 2-2-5 舵机构造及弹上能源的类型

### 一、选择舵机的原则

首先，舵机要能以很高的动作速度推动操纵器。为此，除了要能发挥足够的功率之外，还要有很好的动态特性。其次，构造要简单可靠，并且重量要轻，体积要小。

### 二、电磁式舵机和电池

对于采用空气扰流片或燃气扰流片做操纵器的导弹，操纵器动作虽然很快，所需的功率仍然很小。在这种情况下，最适宜的舵机是电磁式的。电磁式舵机的构造很简单，本质上就是一个电磁线圈在脉冲调宽指令信号的作用下，断续地吸动一个衔铁。因此，动作是快速的，并且结构是简单可靠的。这种舵机的缺点是，它只适于在小功率下工作，如果要求功率大，电磁铁的重量就急剧增加。

电磁式舵机要求以电池做辅助能源。电池的优点是构造简单。主要缺点是，重量较大，长期贮存易失效；能量的释放过程较慢，负荷大时电压下降。

### 三、气动舵机和高压气源

对于采用空气动力控制面或燃气偏流环做为操纵器的导弹，由于推动操纵器动作需要较大的铰链力矩和较大的功率，就不宜再采用电磁式舵机了。在这种情况下，多采用气动舵机。

气动舵机主要就是一个气缸及活塞，在高压气体的推动下向两个方向运动。气动舵机的动作也是很快的，并且，在功率较大的情况下，其重量体积较电磁舵机小得多。但是构造较电磁舵机略为复杂。

为了推动气动舵机，需要高压气源。有三种型式的高压气源：压缩空气瓶、火药气体发生器或者从火箭发动机中分出一部分燃气。

高压气瓶是 500 个大气压以上的高压容器，其中贮存着压缩氢气或氮气。用高压气瓶做辅助能源可贮存较长时间。此外，工作时它所贮存的能量能快速平稳地释放出来。对于 20 秒左右飞行时间的小型导弹，高压气瓶的重量和体积不需很大。但若飞行时间较长，而且导弹较大，则高压气瓶的重量及体积将急剧增大。

火药气体发生器是利用无烟火药燃烧时所产生的高压燃气做工质。这种气体一般都含有大量的固体颗粒，必须经过仔细的过滤才能使用。在火箭发动机采用双基火药做为推进剂的情况下，也可以直接从发动机中引出一部分燃气，经滤净后使用。这两种办法，在重量上较高压气瓶还轻，尤其是在工作时间较长的情况下。但需要较复杂的气体过滤设备。

总起来说，采用气动舵机及各种高压气源做辅助能源时，设备的重量比电磁舵机及电池能源要轻，贮存期长。但是，气动舵机及气源的构造比较复杂，而且气体管路的布置也不如电路的布置那样方便。

相比之下，在采用侧向推力发动机做为操纵器的方案中，舵机、辅助能源及操纵器都综合在一个装置内，构造较简单。此外，只需要极少的电能来使侧向的推力发动机点火，所

产生的燃气流直接转化为控制力，操纵效率也是很高的。

#### 四、关于电源问题

导弹上的电气、电子设备总是不少的，所以在采用气动舵机或侧向推力发动机的情况下，导弹上往往仍然需要有电源。由于电池的种种缺点一时难以克服，有些导弹转而利用传输指令的导线，把电能从地面传给导弹；还有些导弹利用弹上的微型涡轮发电机，在火药气体发生器的推动下发电，这样来避免在弹上携带电池。近来的趋势是采用热电池。热电池的电解质在平时处于凝固的惰性状态，可以长期贮存；临发射时，借助点燃电池内部的火药装置，使电解质熔化，于是电池激活（激活时间不到1秒钟）。热电池解决了一般电池难于长期贮存的问题，但其他缺点仍然大体相似。

### § 2-2-6 弹体滚转同制导系统的关系问题

#### 一、滚转问题的提出

任何导弹在飞行中总会受到各种滚转力矩的作用，有些滚转力矩是导弹外形不对称引起的，有些滚转力矩是由于导弹具有攻角和侧滑角而产生的（斜吹力矩）。因此，导弹在飞行中将会发生一定程度的滚转。导弹发生滚转之后，在俯仰和偏航两个控制通道之间就会发生耦合，降低导弹的制导精确性，严重时将导致控制错乱。

#### 二、传统的倾斜稳定方案

在导弹技术中，传统的作法是在导弹上设置“倾斜稳定系统”依靠弹上陀螺随时测量出弹体的倾斜角度及角速度，并通过倾斜控制通道，使适当的操纵器动作，产生倾斜稳定力矩，把弹体的滚转倾斜限制在很小的允许范围之内。

在反坦克导弹中，有许多型号也采用这种传统的倾斜稳定方法，其制导效果是很好的，只是制导系统的设备稍为复杂些。

#### 三、滚转控制方案

在五十年代中期以后，在有些小型导弹上采用了不要倾斜稳定系统，而让导弹以一定转速滚转并在滚转中控制的方案。这个新方案已被许多反坦克导弹和反飞机的导弹所采用。

滚转控制法的原理是：在导弹上装有一个陀螺，在弹体滚转过程中，陀螺的转子轴提供了空间基准，于是可以测出，弹体滚转倾斜的角度及滚转角速度。这个信息由导线传给地面控制装置，在地面上把导弹滚转姿态的信息及导弹偏离瞄准线的信息综合起来，形成适当的指令。指令是脉冲调宽式的。导弹上只装有一副继电式舵机及操纵器，在导弹滚转一周的过程中，舵机只动作一周或两周。导弹滚转角速度远大于导弹摆动的固有角频率，因此，导弹实际上只能感受操纵器上所形成的舵控力的周期平均值。信号脉冲的宽度将决定平均舵控力的大小；信号脉冲的相位将决定平均舵控力的方向（参阅第五章 § 5-5）。

这个方案的突出优点是，只需要一个控制通道及一副舵机，就可对导弹进行俯仰及偏航两个方向的操纵，因而大大地简化了导弹系统的构造。此外，通常导弹发射后在无控弹道上总有不小的随机干扰，并将引起启控点散布，这在设计中经常是一个难办的问题；而使弹体滚转之后，导弹在无控弹道上的飞行散布能显著改善，这对解决启控点散布问题也是有利的。

但是，导弹滚转后，也引起一些新的设计问题，使导弹的设计方法更复杂（参阅第五



章 § 5-5 及第七章 § 7-5)。此外，滚转导弹的操纵效率较不滚转时为低；弹体在飞行中的摆动也较大，使得导弹的诱导阻力略为增大。

## § 2-3 反坦克导弹的弹道方案及发射、动力装置方案

### § 2-3-1 反坦克导弹的弹道方案

#### 一、平飞弹道

全体第一代反坦克导弹及绝大多数第二代导弹，都是采用平飞弹道，这是直接由三点法导引的特点所决定的。当然，所谓“平飞”，主要是指续航段。在起飞段上，也有采取跳跃式起飞或大仰角抛射式起飞的例子。在平飞弹道方案中，导弹速度随时间变化的规律（通称速度图）是关键问题。在图 2-10 中绘出了几种典型的速度图。速度图中  $v-t$  曲线下所包围的面积，确定了导弹的射程。此外，制导系统的特点也同速度图有密切的关系。

根据速度图可把导弹的弹道分成几段：起飞段、增速段、续航段及被动飞行段等。在起飞段中，导弹从静止状态发射，用很大的加速度飞行，力求尽快地达到适于制导操纵的速度；起飞段总是很短的。在导弹达到预定的速度之后，就要转用等速或很小的加速度飞行，以便稳定地进行制导操纵，这就是续航段；一般的续航段占了整个弹道的绝大部分。如果导弹是从无座力炮一类的管式发射装置中射出的，出口时已具有一定速度，但还不够大，那么可以再用中等的加速度来把导弹的速度提高，这就是增速段。从发射管炮口到续航段（或增速段）之间，往往有十余米以上的被动飞行段，这是为了保护射手免遭发动机喷气流的伤害而设置的。在第三章中，还将进一步讨论速度图的设计问题。

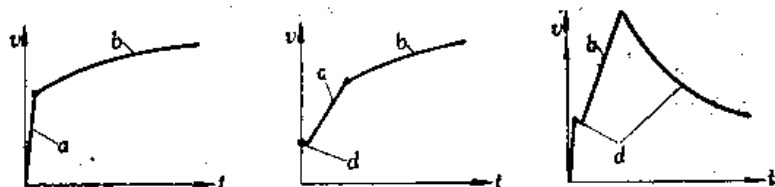


图2-10 典型的速度图

a—起飞段；b—续航段；c—增速段；d—被动飞行段。

#### 二、抛射弹道

采用末段寻的导引方案的反坦克导弹，宜于采用抛射弹道方案。借助抛射弹道容易获得很大的射程；并且，居高临下进行攻击，可以大大地提高导弹对目标的命中率和战斗部对目标的毁伤概率。但是，在采用抛射弹道方案时，导弹射程的变化会使得弹道诸元（速度、转速、弹道倾角等弹道参数）也发生变化，这种情况将给制导系统的设计带来一些困难。若能采取措施，使导弹在制导过程中的速度及转速总保持在一定范围内，将是合乎理想的。

### § 2-3-2 反坦克导弹的发射方案

#### 一、发射方案的要求

在确定反坦克导弹的发射方案时，应该考虑制导方案对于发射初速及发射仰角的要求；特别应该注意，发射方案能够对启控点散布产生重要的影响。此外，发射方案应充分照顾

到提高导弹系统的可靠性及使用方便等。

## 二、发射方案类型

实际的反坦克导弹的发射方案是多种多样的。逐一分析如下：

### (一) 直接以弹翼支撑于地面发射

这时导弹的起飞发动机必须能提供足够的向上的推力分量，以便使导弹跳离地面。弹翼的布置必须保证导弹的重心落在弹翼与地面相接触的区域之内，才能放置平稳（如“柯布拉”导弹）。

### (二) 从简单的发射架上发射

这种方式对导弹及发射架的要求都比较简单，在第一代反坦克导弹中被广泛采用。

### (三) 从导弹包装箱中直接发射导弹

这种方式比上一种先进，因为它减少了设备，简化了发射准备工作。为了使包装箱体积不致太大，必须使导弹的弹翼可以自动地由折迭状态弹开（如“斯文费厄”导弹），或者必须使导弹具有很小的翼展（如“威基兰特”导弹）。

### (四) 从发射筒中发射

从发射筒中发射反坦克导弹的最大优点是，可使导弹在筒中开始旋转，出口时已具有相当的旋转角速度，有利于改进导弹在无控段的散布。发射筒的第二个优点，是可以兼做导弹的密封包装容器，有利于导弹勤务处理的安定性。但是，为了把导弹装入发射筒，弹翼必须能摺进弹体，或者能卷叠在弹体上（如“霍特”导弹），并在飞出筒口后能自动展开。此外，发射筒不可能直接放在地上发射，而必须另外配备一个发射架。

### (五) 从无座力炮式的发射管中发射

这种发射管具有后喷口，管中装有发射药，类似无座力炮的工作原理。发射时导弹将受到数百个 $g$ 的加速度，出口时可能具有每秒数十米的速度，所以可省去弹上的起飞发动机。管中可以制出来复线使导弹具有较大的出口转速，从而显著地改进启控点散布。发射管也可兼做导弹的包装容器。

### (六) 从常规火炮中发射

这时导弹出炮口时可以具有更大的速度。因此，有可能不再需要弹上发动机而使导弹无动力地飞过全程（如“铜斑蛇”导弹）。火炮还可以兼做发射其他常规炮弹之用，这种战术上的灵活性是很理想的。但缺点是，火炮通常很重。此外，在发射过程中，导弹结构将受到极严重的惯性载荷，因此弹上构件必须很坚固，这就使得导弹重量很大。

### (七) 其他

利用弹道式导弹（如美国的“长矛”导弹）或无控火箭做为运载工具，也可以把具有末端制导能力的弹头发射到目标上空。这些制导弹头是一种无动力装置的反坦克导弹。

## § 2-3-3 反坦克导弹的动力装置

### 一、类型

现有的反坦克导弹的发动机，全都采用固体燃料火箭发动机。这是因为固体发动机的构造简单，使用方便。尤其在射程只有数公里的小型导弹上，采用固体发动机在重量、尺寸和成本方面也是合算的。

## 二、推力方案

发动机的推力方案应根据导弹的速度图来确定。在起飞段上，发动机应具有很大的推力。在续航段上，发动机只需具有很小的推力。在增速段上，发动机可具有中等的推力。若有可能，采用变推力的发动机在重量、体积方面将带来好处。但是，在起飞推力和续航推力相差很大的通常情况下，往往不得不把起飞发动机和续航发动机分开为两个。

## 三、制导系统同发动机的关系

在制定方案时应充分考虑到制导系统对发动机的要求。例如，是否需要利用发动机的燃气做为舵机的气源，是否需要利用发动机提供使弹体滚转的力矩。还有，发动机工作时喷出的燃气，是否会影响红外测角仪对导弹的跟踪等。

## 四、气温对发动机性能的影响

固体火箭燃气发动机的一个重要特点是，其推力随着气温条件而变化。因此，以固体发动机为动力装置的导弹，其飞行速度也将随气温而不同。这一特点给导弹的设计工作带来很大麻烦，常常必须在几个指定的气温（常温、高温和低温）条件下来分别计算导弹的性能。有时，高温条件下与低温条件下导弹的性能差别太大，从总体设计的角度必须进行一些调整。例如，在低温时，发动机推力小，工作时间长，在一定的发射仰角条件下，起飞弹道可能太低，严重情况下将使导弹坠地。为了解决这一问题，应将发射装置的仰角做成可调整的：在低温时以较大的仰角发射，在高温时以较小的仰角发射等等。

# § 2-4 反坦克导弹的空气动力外形及总体结构方案

## § 2-4-1 气动外形方案

### 一、对气动外形的原则要求

反坦克导弹的空气动力外形，主要应保证导弹在一定的飞行速度条件下，能够产生足够大的空气动力举力，这样，才能保证导弹具有满意的操纵性。此外，还要通过适当的空气动力外形，来保证导弹的飞行稳定性。最后，还希望导弹的外形，在一定的速度范围内，具有尽可能小的空气阻力。

### 二、气动外形同制导系统等方案的关系

在导弹不滚转且制导系统具有倾斜稳定回路的方案中，一般倾向于采用空气动力扰流片或空气舵来做操纵机构（如“柯布拉”及“威基兰特”导弹）；这是由于空气动力的操纵机构，可以布置在远离弹体轴线的地方，能够形成较大的倾斜稳定力矩。然而，在滚转制导的方案中，则往往要求导弹的弹翼具有适当的差动倾斜安装角，以提供一定的空气动力滚转力矩，使导弹具有预定的滚转角速度。

导弹的推力方案及飞行速度方案也同气动外形方案有关（参阅第六章）。

发射方案也影响着气动外形的设计。当导弹采用管式发射或火炮发射时，弹翼必须采用可折叠的形式。

### 三、气动布局的类型

对于一般的战术导弹来说，空气动力布局的型式是多种多样的。而对于反坦克导弹来说，气动布局方案有以下特点：

目前世界上的反坦克导弹，绝大多数采用无尾式的气动布局方案〔图 2-11(a)〕。即以弹翼兼做尾翼，既提供机动飞行所需的举力，又提供飞行稳定所需的稳定力矩。由于反坦克导弹的弹身一般较短，采用这种气动外形方案是合适的。此外，无尾式的构造也比较简单。如果需要有空气舵做为操纵机构，就直接布置在弹翼的后缘。

也有采用类似反飞机的导弹中常用的所谓“正常式”的方案〔见图 2-11(b)〕。就是把弹翼和尾翼分开，尾翼一般兼做尾舵。这种方案适用于弹身比较长的情况。同一般的反飞机导弹相比，反坦克导弹的弹翼要小得多，这是同反坦克导弹对飞行机动性的要求不高的情况相适应的。

最后，在导弹的速度很高（超音速）的情况下，也可以不要弹翼，只要尾翼，并且把尾翼兼做控制舵〔图 2-11(c)〕。两个激光制导的高速反坦克导弹“阿克拉”和“海尔法”都是采用这样的气动外形方案。为什么能把弹翼去掉呢？这也是由于坦克的机动能力不高，依靠导弹弹身所产生的举力已能满足操纵性的要求。

#### 四、弹翼位置问题

在安排弹翼位置时需要从总体角度考虑如下几个问题：

- 第一，弹翼及尾翼必须安排在导线的出线口前方，以免妨碍放线过程的顺利进行；
- 第二，发动机的喷流不应严重干扰弹翼的空气动力性能（特别是在发动机位于弹翼前方的布局方案中）；
- 第三，弹翼的安装不要跨装在两个不同的弹体仓段上。

### § 2-4-2 总体部位安排

#### 一、原则

导弹的总体部位安排是一个复杂的问题，必须考虑到很多方面的因素。此外，每种导弹型号，都有它特有的设计要求、设计概念及设计条件，不能千篇一律地处理。所以，总体部位安排的第一条原则应该是：具体问题具体分析。

导弹做为一个整体乃是制导系统的控制对象。导弹的设计工作必须保证导弹具有一定的飞行稳定性及操纵性，这也是在进行部位安排时要注意的问题。具体地说，为了保证导弹的飞行稳定性及操纵性，在进行部位安排时，必须使导弹具有合适的重量、转动惯量以及重心位置，并且还要恰当地安排弹翼及操纵器的位置。尤其是导弹的重心位置能否安排得当，影响极大。所以，恰当地掌握住导弹重心的合理位置，可说是总体部位安排的第二条原则。

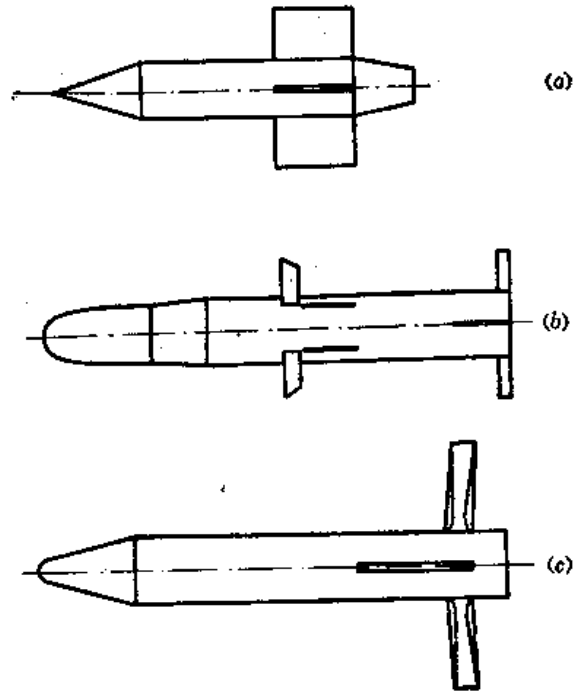


图2-11 反坦克导弹的几种气动外形  
(a) 无尾式；(b) 正常式；(c) 尾舵式。

除此之外，在进行总体部位安排时，还要考虑到如下的问题：

第一，通过全弹各部件位置的合理安排，保证各部件都能充分发挥自己的功能，并能做为一个紧密联结的整体，协调一致地动作。

第二，应该使导弹的结构紧凑，充分利用弹内空间。

第三，应该使总装时具有良好的工艺性，以及保证使用时的可靠性及方便性。

有一些要求是显而易见的，例如：战斗部毫无疑问应尽可能放在最前方，以便有效地发挥破甲作用（然而在采用寻的导引时，导引头当然要被更优先地放在弹顶上）。制导系统中的导线线管及出线口则应尽量放在弹身后部，特别是要放在弹翼的后部等。

## 二、弹体分段

通常总是把导弹整体从头至尾分成几个仓段。战斗部往往是一段，一个发动机往往也是一段；控制系统的主要组件也往往集中在一起，组成为一个（或两个）仓段。

把弹体按部件这样地分段以后，便于各部件的研制工作及生产工作的独立进行，避免互相牵扯、妨碍的现象，简化了总体协调工作及总装工作，可以加快研制周期、缩短生产周期，并有利于保证生产质量。

## 三、串联式及并联式部位安排

弹体的各个仓段之间的联结，有串联和并联两种方式。

在串联方式中，弹体各仓段的排列次序是值得研究的问题。通常，总是把战斗部（和导引头）放在最前面做为弹头段。再往后的安排则有两种可能的方案，即

	弹头段	中间段	尾段
第一种方案	战斗部	制导部件	发动机
第二种方案	战斗部	发动机	制导部件

许多第一代反坦克导弹，是采用第一种方案，其优点是发动机喷气直接排到弹的后方，因此推力损失小，且喷气流对弹体的气动性能影响很小。但这一方案的缺点很多。主要是在飞行中随着燃料的消耗及导线的放出将使导弹的重心剧烈地向前移动，对于导弹的操纵性及稳定性有很大的影响。其次，弹身中段承前续后是受力比较严重的部分，故制导仓应采用较坚固的构造，这就可能增加导弹的消极重量。

因此，近来较多的反坦克导弹采用了第二种布局方案（如“斯文费厄”、“霍特”等）：

第一，发动机位于弹体重心的前后附近，故燃料的消耗对重心位置变化的影响不太大。

第二，发动机壳体是很坚固的构件，自然地成为整个弹体的骨架，这样在不增加结构重量的条件下，可以提高整个弹体的刚度。

第三，整个制导部分集中于尾部、易于装配、检修和维修；此外，制导部分的零件、组件很多，安排的伸缩性比较大，弹身尾部的空间容易得到充分利用。

第四，在采用燃气扰流片或燃气偏流环等利用发动机燃气来形成控制力的情况中，舵机总是要安排在发动机后方；这样，就便于把舵机同制导系统其它零、组件集中于一个仓段。

但是把发动机放在弹身中段的这种方案，也带来缺点，就是：发动机的喷管不好安排。若将喷管安排在弹体侧面，则造成较大的推力损失，并可能对弹翼的工作造成某

种程度的干扰；若仍从后面引出，则需要很长的喷管。

以上的部位安排方式，可统称为“串联式”，它是通常采用的方式。但是，有时也可以把某些部件与其它部件平行地并列安装，称为“并联式”。并联式比较少见。

采用并联式安排最明显的例子，就是西德的“柯布拉”导弹，它的弹体主要部分是串联式，但它的起飞发动机则并联安装在弹体下方；此外，电池则并联安装在弹体的上方（图 2-12）。

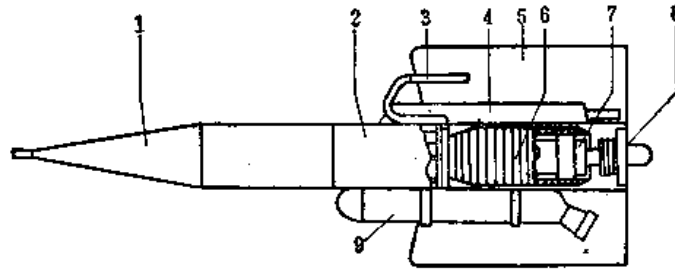


图 2-12 柯布拉导弹的部位安排

1—战斗部；2—控制部；3—提把；4—电池；5—弹翼；6—导线管；  
7—续航发动机；8—后护盖；9—起飞发动机。

“柯布拉”导弹的起飞发动机采用并联的安排方案，是为了适应它的独特的跳跃式起飞方式（参考附录二）。它的电池也并联在弹体上方，有利于电池的保管和更换，并起到一部分重心平衡的作用。

但是，“柯布拉”导弹的并联式部位安排方案，使得弹体的外形不紧凑，并且空气阻力比较大，这是不可取的。

如果弹体直径足够大，并联安装的部件也可以放在弹体内部，以避免空气阻力增加，而且在一定条件下可以更有效地利用弹内空间（例如，线管可以同发动机并联地套装等）。

#### 四、弹体的直径及全长

通过总体部位安排，还应确定导弹弹体的直径及全长。

弹体的直径应不小于按威力要求所确定的战斗部的直径。如果在部位安排中没有太大的困难，就据此决定弹体的直径。

如果部位安排中出现困难，必须要求弹体具有较大直径时，当然也可考虑直径略为增大。在这种情况下，最好是把战斗部的直径也增加到同弹身直径一致。这样，战斗部的破甲深度可以提高；或者在保持破甲深度不变的情况下，可以增大穿孔的直径和后效射流的威力。

导弹弹体的全长，也是根据部位安排的实际需要来确定。在直径已经确定的情况下，应尽可能不要使弹体长度太大。根据世界上现有各种型号反坦克导弹的数据统计，“长细比”（即弹体全长与直径的比值）在 5~10 之间，可见容许变化的范围是相当宽的。

#### § 2-4-3 弹体的结构

战斗部、发动机以及制导系统的弹上部件，都必须通过一定的结构而紧密地联合为一个整体，这就是弹体结构所应解决的问题。此外弹体的气动外形及弹翼的构造，也是属于弹体结构的设计范围。

弹体结构并不是单纯的机械性的联结。例如，弹体各分段之间的联结，除了机械的联结之外，还应特别注意电路的联结；有时还有气体管路的联结问题。

弹体结构更不是单纯的机械固定。它还应保证弹体各部件、零件之间正确的相对运动，例如可折叠的弹翼之正确的展开，舵机带动偏流环之正确的摆动，都需要弹体结构工作的注意。

由于弹体结构设计工作的内容很广，这里不能逐一列举，只能原则性地谈一谈设计弹体结构时应注意的几点问题：

第一，弹体结构应保证各部件牢固可靠地结合，不仅在各种搬运条件及使用条件下，保证结构不破坏，而且要保证各部件的正确位置及正确运动，即保证各部件在装配时能准确地定位，并且在受力时的变形应在允许范围之内。

第二，弹体结构应保证各部件的合理工作环境。“环境”这一概念的含意很广泛，如振动、温度、湿度、电磁场等等都对导弹各部件的正常工作有影响。如果这种影响可能超出允许的范围，就必须考虑防护的措施。

第三，弹体结构应保证导弹使用时的方便性。有时，导弹的战斗部是分开保管及运输，直到临战前才装于弹体，这时，分离联结的方式应十分简单。

第四，在以上前提条件之下，应使弹体结构尽可能的重量轻、尺寸紧凑、工艺性好、成本低。

第五，为保证以上诸点的实现，应合理地选择弹体结构的材料，设计弹体结构的型式。

# 第三章 反坦克导弹的基准弹道及主要设计参数

## § 3-1 速度图设计

### § 3-1-1 基准弹道和速度图

在标准飞行条件下计算出的导弹飞行弹道，被称为“基准弹道”。基准弹道是设计工作中的基本根据。对于通常从地面发射的第一、二代的反坦克导弹来说，可以把它在起飞段上无随机扰动、并且在续航段上保持直线平飞的弹道，做为基准弹道。

在导弹沿基准弹道运动的过程中，其飞行速度随时间而变化的规律  $v(t)$ ，乃是弹道方案的主要问题。把这个速度变化规律绘成曲线，就叫做速度图，或  $v-t$  图，它是导弹设计工作中经常引用的基本数据。在图 3-1 中绘出了几种典型导弹的  $v-t$  图。各种导弹的主要设计特点都能在其  $v-t$  图上反映出来。

$v-t$  曲线在任一点的斜率反映了导弹在相应时刻的运动加速度。根据图 3-1 中各曲线所反映的加速度变化情况，可把弹道分成几段。

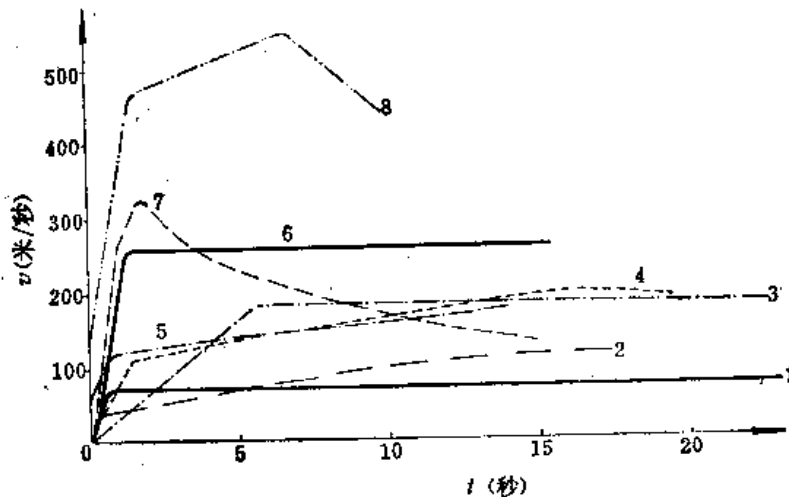


图3-1 几种导弹的速度图

1—柯布拉；2—曼巴；3—斯文费厄；4—SS11B；5—米兰；6—霍特；7—陶；8—阿克拉。

### § 3-1-2 第一代反坦克导弹的速度图设计

#### 一、起飞段和续航段

通常可把第一代反坦克导弹的弹道分成两段——起飞段和续航段。

起飞段的作用是使导弹尽快地达到适当的位置和获得适当的速度。严格来讲，还应该获得适当的速度方向，以便对它的飞行进行操纵。

续航段的主要作用是在起飞段已经达到的速度基础上，维持（或发展）一个比较平稳的飞行速度；在此速度之下，导弹具有比较好的操纵性能。其次，续航段弹道的设计应该保证导弹能够在战术上允许的时间之内飞过整个的有效射程。



## 二、起飞段的设计

在起飞段上，导弹一般是无控飞行的。由于不可避免的随机干扰因素的作用，就会形成起飞段弹道的散布。这种弹道散布对于导弹在近射程上的命中率是不利的，有时还会影响导弹的飞行可靠性。因此，如何改进起飞段的弹道散布，乃是起飞段设计的重要问题。一般说来，起飞段的加速度大、时间短，有利于减小起飞段散布。但是，也可看到另一种趋向，例如，英国的“斯文费厄”导弹，在起飞段上加速度只有  $3g$ ，并且时间长达 6 秒。它的设计意图是在起飞段上即对导弹进行制导，并且利用起飞段上较大的推力使导弹具有较大的操纵性，从而能够把导弹从远离射手的侧方（100 米外）尽快地操纵到瞄准线上来（参阅附录二：斯文费厄）。这是一个根据不同的制导方案而采用不同的弹道方案的例子。

## 三、续航段的设计

对于第一代反坦克导弹来说，可以从下面几方面来考虑续航段速度图的设计问题：

（一）按照平飞的要求，在规定的平飞攻角条件下，导弹受到的空气动力举力应该足以平衡导弹的自重。这一条件决定着续航速度的下限。

（二）由于导弹的初始射向（发射装置的放列方向）同瞄准线方向不一定相同，而且导弹的起飞段弹道还有散布，所以，在导弹启控以后，还不能马上按三点法导引规律来操纵导弹，而是需要有一个过程来把导弹操纵到瞄准线上；这个过程里的弹道称为“导入段”，通常它是续航段开头的一部分。我们希望导入段尽可能地短，因此导弹的飞行速度不要太高，以免转弯半径太大和导入段太长。尤其是在续航段的开始部分，弹道的波动很大，若速度太大将增加射手的操作困难。由于这一原故，早期的反坦克导弹的续航速度大多不超过 100 米/秒。

（三）从战术性能考虑，还希望导弹飞过全程的时间愈短愈好。所以，后来的第一代反坦克导弹大多把续航段上的  $v-t$  图设计成略有加速度的形式。就是说，在续航开始处的速度可在 100 米/秒以下，而在续航终点可以达到 150 米/秒左右，最高的竟达到 190 米/秒（如法国的 SS-11B<sub>1</sub> 导弹）。

（四）然而，续航速度的变化，给导弹的设计带来另外一些困难。因此，个别操纵性能最好的第一代反坦克导弹，还是采用了续航段上等速飞行的方案，但速度高达 185 米/秒。这是因为采用了特殊的设计和装置从而克服了导入段上操纵的困难。这种方案的优点是主要的，随之带来的缺点是弹上控制系统较为复杂了。

### § 3-1-3 第二代反坦克导弹的弹道分段及速度图设计

#### 一、弹道分段

对于第二代反坦克导弹来说，弹道分段的情况稍为复杂，大体上有五种类型。

（一）某些直接从第一代反坦克导弹改装发展而成的第二代反坦克导弹（如法国直接由 SS-11B<sub>1</sub> 发展成的阿尔朋），其弹道分段及  $v-t$  图也同相应的第一代产品相同。

（二）某些第二代反坦克导弹如霍特，从  $v-t$  图的变化上看，也可分为起飞与续航两段。但是它的续航速度远远高于任何第一代导弹，而且启控点提前到起飞段中间的弹道点上；这两点改进都是同第二代的本质特点有关（自动跟踪导弹与自动形成控制指令）。

（三）某些反坦克导弹（如“米兰”），具有四段弹道：第一段，发射助推段，用无座

力高低压发射器赋予导弹适当的炮口初速 (75米/秒); 第二段, 自由飞行段, 被动飞行数米距离 (为了保护射手不受发动机燃气的伤害, 这一个自由飞行段是必要的); 第三段, 增速段, 以数个  $g$  的加速度在 1 秒左右时间内, 加速到每秒百余米的飞行速度 (启控点即位于增速段上); 第四段, 续航段, 以较小的加速度, 在十余秒的时间内飞过全射程。

(四) 个别的导弹 (如“陶”) 也是四段弹道: 第一段, 起飞段, 起飞发动机推进剂在导弹离开发射管之前燃尽, 使导弹具有相当的炮口初速; 第二段, 自由飞行段; 第三段, 增速段, 在 1.3 秒内使速度增至 300 米/秒以上; 第四段, 无动力飞过全射程。

(五) 个别的导弹 (如“龙”) 具有极特殊的  $v-t$  图 (参阅附录二)。

## 二、速度图设计

总起来看, 第二代反坦克导弹的  $v-t$  图设计, 相对于第一代导弹而言, 具有如下的特点:

第一, 对于轻型导弹, 尽量采用无座力炮式管发射, 使导弹具有尽可能大的出口速度。这样可以显著地改进启控点散布。对于重型导弹, 为了避免炮管的重量过大, 则不用无座力炮发射, 而改为推力尽可能大的起飞发动机。

第二, 在导弹飞出炮口之后, 要有一小段自由飞行弹道, 以保护射手。

第三, 若炮口速度或起飞段终点速度还不够大, 就再设置一个增速段。

第四, 启控点尽可能取在起飞段上, 若不可能就取在增速段上。

第五, 续航段的速度较高, 并且速度的变化也可能较大。续航速度的上限, 决定于导线的强度和发动机的推力和重量。

无论如何, 一个导弹的  $v-t$  图必须同它的总体方案相协调。必须根据总体方案的特点来确定弹道的分段及各段的速度变化规律。

### § 3-2 起飞段的速度及行程

要实现预定的速度图, 就必须恰当地设计导弹的发动机推力方案及导弹的空气动力外形。为此, 必须首先研究起飞段及续航段上速度的变化规律同发动机的推力及导弹的空气动力阻力等因素之间的关系。

#### § 3-2-1 按理想速度计算起飞段速度

在起飞段上, 导弹在发动机推力的作用下从静止状态开始运动。有的导弹是从地面上直接起飞 (如“柯布拉”), 有的是从发射架或发射筒中起飞 (如“赛格”、“霍特”、“陶”等)。当它们尚未离开发射器的时候, 还要受到摩擦力的作用; 当它们正要离开发射器的时候, 在重力及发射器振动的影响下, 弹体要发生摆动; 当它们全部离开发射器以后, 在重力及程序指令的作用下, 它们还要进一步摆动并使弹道弯曲。此外, 空气阻力、升力、风力以及放出导线过程中的张力及摩擦力, 也对飞行有影响。因此, 起飞段上的运动是很复杂的。

在本节中, 只需要计算导弹的速度及行程, 因此只须考察它在弹道切向的运动, 并略去风力等等随机因素, 即有下面的运动方程:

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos \alpha \cdot \cos \beta - X - mg \sin \Theta \quad (3-2-1)$$

一般说来,攻角 $\alpha$ 及侧滑角 $\beta$ 都是很小的,于是 $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$ ,或 $F \cos \alpha \cos \beta \approx F$ ;又考虑到起飞推力 $F$ 总是远大于导弹重量 $mg$ ,于是有 $F - mg \sin \Theta = F \left[ 1 - \frac{mg}{F} \sin \Theta \right] \approx F$ 。此外假定空气阻力 $X$ 的影响也可近似地略而不计,于是式(3-2-1)可简化为

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{或} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad (3-2-2)$$

按火箭推进原理,火箭发动机的推力应是

$$F = \dot{m}_T g I_s = -\dot{m} g I_s \quad (3-2-3)$$

于是式(3-2-2)可写为

$$\frac{dv}{dt} = -g I_s \frac{\dot{m}}{m}$$

或

$$dv = -g I_s \frac{dm}{m} \quad (3-2-4)$$

两端可同时积分,取初始条件为:当 $t = 0$ 时, $m = m_0$ 及 $v = 0$ 于是可得

$$v = -g I_s \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) \quad (3-2-5)$$

这就是著名的火箭理想速度公式。

通常把导弹在任一瞬时的质量 $m$ ,用它相对于导弹的初始质量 $m_0$ 之比值来表示,令此比值为 $\mu$ ,即

$$\mu = \frac{m}{m_0} \quad (3-2-6)$$

称 $\mu$ 为火箭的“质量比”或“相对质量”;它是无量纲的,并是随时间而变化(减小)的

$$\mu(t) = \frac{m(t)}{m_0} = \frac{m_0 - \int_0^t \dot{m}_T dt}{m_0} \quad (3-2-7)$$

在起飞瞬间 $t = 0$ ,故 $\mu|_{t=0} = 1$ 。

随着发动机的工作,推进剂不断消耗, $\mu$ 也不断减小;但总有 $\mu > 0$ ,决不会小到 $\mu = 0$ 。故相对质量 $\mu$ 随时间而变化的实际可能范围是 $1 \leq \mu < 0$ 。于是式(3-2-5)可用相对质量 $\mu$ 表示为

$$v(t) = -g I_s \ln[\mu(t)] \quad (3-2-8)$$

从上式可知,火箭的速度(理想速度)同它的绝对质量 $m$ 并没有直接关系,倒是同它的相对质量 $\mu$ 有直接关系。因此,尽管两个火箭的绝对质量 $m$ 可能差别很大,但若它们的相对质量 $\mu$ 随时间的变化规律一样,那么它们的速度(理想速度)的变化规律也就一样。

当推进剂全部烧光时,火箭只剩下了结构质量(或称“空质量”)  $m_E$ ,这时有

$$\mu_E = \frac{m_E}{m_0} = 1 - \frac{m_T}{m_0} \quad (3-2-9)$$

这个值 $\mu_E$ 称为“结构比”,是表示火箭结构特性的极重要的参量。

因此,火箭在推进剂全部烧光时之理想速度就是

$$v_E = -I_s g \ln \mu_E \quad (3-2-10)$$

可以利用这公式来近似计算导弹在起飞段终点的速度。

在(3-2-8)和(3-2-10)式的推导过程中,没有涉及火箭推力的大小及推进剂燃烧的规律。但若需要知道火箭在任一时间 $t$ 的速度,就必须先给出火箭的推力或推进剂消耗率随时间而变化的情况。

在最简单的情况下,火箭的推力为常数或推进剂的秒消耗量为常数,即

$$F = \text{常数}$$

或

$$\dot{m}_T = \frac{F}{gI_r} = \text{常数}$$

于是由(3-2-7)式可得

$$\mu(t) = 1 - \frac{\dot{m}_T}{m_0} t = 1 - \frac{Ft}{m_0 g I_r} \quad (3-2-11)$$

又由(3-2-8)式可得

$$v(t) = -gI_r \ln \left[ 1 - \frac{Ft}{m_0 g I_r} \right] \quad (3-2-12)$$

在上式中有一个组合参量  $\frac{F}{m_0 g}$ , 这是一个重要的无量纲参量,以后还要经常遇到,可称它为“推力重量比” $n_0$ ,即

$$n_0 = \frac{F}{m_0 g} \quad (3-2-13)$$

于是(3-2-12)式可改写为

$$v(t) = -gI_r \ln \left[ 1 - n_0 \frac{t}{I_r} \right] \quad (3-2-14)$$

**例题 3-1** 若有火箭,初始质量  $m_0 = 12$  千克,起飞发动机装药质量  $m_T = 0.6$  千克,推进剂比冲量  $I_r = 200$  秒,求起飞段终点速度(近似值)。

**解** 显然火箭在起飞段终点的质量是

$$m_E = m_0 - m_T = 12 - 0.6 = 11.4 \text{ 千克}$$

故火箭的结构比

$$\mu_E = \frac{m_E}{m_0} = \frac{11.4}{12} = 0.950$$

火箭在起飞段终点的速度(近似值)

$$v_E = -gI_r \ln \mu_E = -9.80 \times 200 \times \ln 0.95 = 100.6 \text{ 米/秒}$$

**例题 3-2** 同上例题之火箭,若起飞发动机之推力为 240 千克力(即  $240 \times 9.81 = 2354$  牛顿),求火箭速度随时间而变化的情况。

**解** 先求“推重比” $n_0$ ,由式(3-2-13)得

$$n_0 = \frac{F}{m_0 g} = \frac{240 \times 9.81}{12 \times 9.81} = 20$$

于是,由式(3-2-14)有

$$v(t) = -gI_r \ln \left[ 1 - n_0 \frac{t}{I_r} \right] = 1962 (-\ln(1 - 0.1t))$$

可列表计算如下:

$t$ (秒)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5 <sup>●</sup>
$0.1t$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$1-0.1t$	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95
$-\ln(1-0.1t)$	0.0101	0.0202	0.0305	0.0408	0.0513
$1962(-\ln(1-0.1t))$ 米/秒	19.80	39.59	59.78	79.97	100.5

● 发动机全工作时间  $t_E$  为

$$t_E = \frac{m_T}{m_T} = \frac{m_T}{F/(gI_s)} = \frac{0.6 \times 9.81 \times 200}{240 \times 9.81} = 0.5 \text{ 秒}$$

根据表中数据, 可以画出  $v(t)$  曲线图如图 3-2。

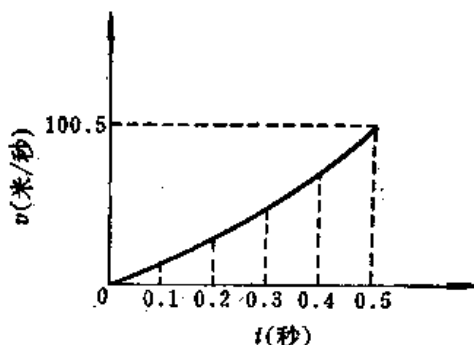


图3-2 例题3-2的速度曲线

### § 3-2-2 起飞段速度的简化计算

理想速度公式 (3-2-8) 已经相当简单了, 只是计算时需要查自然对数表。若手头没有对数表, 还可用下面的近似公式来计算起飞段速度

$$v = I_s g \cdot \frac{m_T}{m_0 - \frac{m_T}{2}} \quad (3-2-15)$$

或 
$$v = I_s g \times 2 \left( \frac{m_0 - m_E}{m_0 + m_E} \right) = 2I_s g \left( \frac{1 - \mu_E}{1 + \mu_E} \right) \quad (3-2-16)$$

(3-2-16) 式的误差可见下表

$\mu$	$-\ln \mu$	$2 \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$	(3-2-16) 式的相对误差
0.9	0.1054	0.1053	-0.09%
0.8	0.2231	0.2222	-0.40%
0.7	0.3567	0.3529	-1.06%
0.6	0.5108	0.5000	-2.11%
0.5	0.6931	0.6667	-3.81%

由上表可见, 若用 (3-2-16) 式来计算火箭的起飞段速度, 同按理想速度公式的计算结果相比较, 所得速度值略小。然而, 在初步设计的计算中, 这一误差往往是容许的。

### § 3-2-3 空气阻力及重力对于起飞段速度的影响

假如考虑到空气阻力及重力, 在弹道切线方向的运动方程就是

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{C_x S \rho v^2}{2} - mg \sin \Theta \quad (3-2-17)$$

现在来估计一下，略去式中后两项所带的误差。

对 (3-2-17) 式两端逐项进行积分，积分上限取为起飞段终点时刻  $t_E$ ，即得

$$v_E = \int_0^{t_E} \frac{F}{m} dt - \int_0^{t_E} \frac{C_x S \rho v^2}{2m} dt - \int_0^{t_E} g \sin \Theta dt \quad (3-2-18)$$

式中右端第一项就是前面的理想速度公式 (3-2-10)。

式中右端第二项就是由于空气阻力所造成的速度损失，记为  $\Delta v_{\text{空阻}}$

$$\Delta v_{\text{空阻}} = \int_0^{t_E} \frac{C_x S \rho v^2}{2m} dt \quad (3-2-19)$$

直接对这一项积分是困难的，但容易估计它的界限值。假定  $C_x$ 、 $S$  及  $\rho$  皆为常数，则由于理想速度总大于实际速度，故下式显然成立：

$$\Delta v_{\text{空阻}} < \frac{C_x S \rho}{2m_0} \int_0^{t_E} \frac{(-gI_t \ln(\mu(t)))^2}{\mu(t)} dt \quad (3-2-20)$$

取新变量  $v$ ，令

$$v = \ln(\mu(t)) \quad (3-2-21)$$

并有  $dv = \frac{d\mu}{\mu}$ 。注意，当  $t = 0$  时， $v = \ln 1 = 0$ ；当  $t = t_E$  时， $v = v_E = \ln \mu_E$ 。将 (3-2-21)

代入到 (3-2-20) 式右端后，整个积分就可写为关于  $v$  的积分，即

$$\Delta v_{\text{空阻}} < \frac{C_x S \rho (gI_t)^2}{2m_0} \int_0^{v_E} \frac{v^2 dv}{\left(\frac{d\mu}{dt}\right)} \quad (3-2-22)$$

在常推力的情况下，由式 (3-2-11) 可知  $\frac{d\mu}{dt} = \frac{-F}{m_0 g I_t}$  代入上式后即可得

$$\Delta v < \frac{C_x S \rho}{6F} [-gI_t \ln \mu_E]^3 \quad (3-2-23)$$

$$\frac{\Delta v_{\text{空阻}}}{-gI_t \ln \mu_E} < \frac{1}{3} \cdot \frac{C_x S \rho (-gI_t \ln \mu_E)^2}{2F} \quad (3-2-24)$$

这就是说，空气阻力所造成的速度损失相对于理想速度之比值，不超过火箭在理想速度时所受之空气阻力相对于推力之比值的  $\frac{1}{3}$  倍。

由此可见，对于同样的空气阻力外形，若推力愈大，那么空气阻力所造成的速度损失就愈小。

下面以例题 3-1 中的数据，来估计一下空气阻力造成的速度损失。

若这一导弹的空气阻力系数  $C_x \approx 0.363$ ，参考面积  $S = 0.01131 \text{ m}^2$ ，并且空气密度  $\rho = 1.23 \text{ 千克/米}^3$ 。则按式 (3-2-23) 可知，到起飞段终点处由空气阻力所造成的速度损失为

$$\Delta v_{\text{空阻}} < \frac{C_x S \rho}{6F} [-gI_t \ln \mu_E]^3 = \frac{0.363 \times 0.01131 \times 1.23}{6 \times 2354} \cdot (100.8)^3 = 0.36 \text{ 米/秒}$$

即不到理想速度 (100.8 米/秒) 的千分之四，故可在近似计算中忽略。

再看式 (3-2-18) 中的第三项，它是重力所造成的速度损失，即

$$\Delta v_{\text{重力}} = \int_0^{t_B} g \sin \Theta dt \quad (3-2-25)$$

这一项积分的困难在于不知道被积函数中弹道倾角 $\Theta$ 的变化情况。但是在整个起飞段上,在重力影响下,弹道倾角 $\Theta$ 总是愈来愈小的。因此,如果取发射定向器的仰角 $\Theta_0$ 来代替积分中的 $\Theta$ ,那么结果肯定是偏大的。于是可简单地判定重力所造成的速度损失之上限

$$\Delta v_{\text{重力}} < g \sin \Theta_0 \cdot t_B \quad (3-2-26)$$

由此可见,起飞发动机工作时间 $t_B$ 愈长,重力造成的速度损失愈大。或者考虑到,在结构比 $\mu_x$ 一定的条件下,起飞发动机的工作时间与推力重量比有关,即由于

$$F \cdot t_B = m_T g I_r$$

$$\text{故有} \quad t_B = \frac{m_T g I_r}{F} = \frac{m_0 (1 - \mu_E) g I_r}{F} = \frac{(1 - \mu_E) I_r}{n_0} \quad (3-2-27)$$

因此(3-2-26)式又可写成

$$\Delta v_{\text{重力}} < \frac{(1 - \mu_E)}{n_0} I_r g \sin \Theta_0 \quad (3-2-28)$$

由式(3-2-28)可知,若推重比 $n_0$ 愈大,由重力所造成的速度损失就愈小。

用前面例题3-1及3-2中的数据来估算此重力引起的速度损失之具体量级,假定发射定向器仰角 $\Theta_0 = 12^\circ$ ,可得 $\Delta v_{\text{重力}} < \frac{(1 - \mu_E)}{n_0} I_r g \sin \Theta_0 = \frac{(1 - 0.95)}{20} \times 200 \times 9.81 \times 0.2079 = 1.02$ 米/秒。这个估计是显然偏大的。实际上,导弹在飞行中的弹道倾角 $\Theta$ 是不断减小的,故 $\Delta v_{\text{重力}}$ 的真确值,大约只有这里估计值的一半。在此例题中,重力造成的速度损失还不到理想速度的1%,初步设计中是可以忽略的。

#### § 3-2-4 由预定的起飞段速度反求起飞发动机应装燃料重量

在前面几段中,都是根据已知的导弹结构条件(相对质量 $\mu$ )来计算导弹的速度。但是在设计工作中,还经常遇到另一种情况,就是要根据已知的对于速度 $v$ 的要求,来确定导弹应该具有的条件。前面一个是正面问题(正命题),后面一个是反面问题(逆命题)。

由式(3-2-10),移项后可改写成

$$\mu_E = \exp\left(-\frac{v_E}{g I_r}\right) \quad (3-2-29)$$

这样就能求出,为了达到预定的起飞段终点速度 $v_E$ ,导弹应具有的结构比 $\mu_E$ 。

知道了应具有的 $\mu_E$ ,就可以反算出起飞发动机中应装多少推进剂。这时,可利用(3-2-9)式

$$\mu_E = \frac{m_E}{m_0} = 1 - \frac{m_T}{m_0}$$

$$\text{故} \quad m_T = m_0 (1 - \mu_E) \quad (3-2-30)$$

将(3-2-29)式代入上式,得

$$m_T = m_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{v_E}{g I_r}\right) \right\} \quad (3-2-31)$$

利用近似速度公式(3-2-16)也可求得为达到预定速度 $v_E$ 所需之导弹结构比 $\mu_E$ 的近似值

$$\mu_E = \frac{2 - \frac{v_E}{I_s g}}{2 + \frac{v_E}{I_s g}} \quad (3-2-32)$$

相应所需的起飞发动机中装药量的近似值是

$$m_T = m_0 \left[ \frac{2 - \frac{v_E}{I_s g}}{2 + \frac{v_E}{I_s g}} \right] = m_0 \frac{2 - \frac{v_E}{I_s g}}{2 + \frac{v_E}{I_s g}} \quad (3-2-33)$$

**例题 3-3** 若已限定导弹初始质量  $m_0 = 12$  千克, 且给定了发动机推进剂的比冲量  $I_s = 200$  秒; 又要求导弹在起飞段终点必须具有 100 米/秒的速度。那么, 起飞发动机中应装进多少推进剂?

**解** 由 (3-2-29) 式, 导弹的结构比应是

$$\mu_E = \exp\left(\frac{-v_E}{gI_s}\right) = \exp\left(\frac{-100}{9.81 \times 200}\right) = e^{-0.05097} = 0.950$$

又由式 (3-2-30)

$$m_T = m_0(1 - \mu_E) = 12(1 - 0.95) = 0.6 \text{ 千克}$$

若按式 (3-2-33), 也可得到同样结果。

### § 3-2-5 导弹在起飞段上的行程

导弹的行程  $s$  是其速度的积分

$$s = s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (3-2-34)$$

在不考虑空气阻力及重力等影响的情况下, 式中的  $v$  可按理想速度计算。

前已指出 (见 § 3-2-1), 只有给定了推力变化的规律  $F = F(t)$  或秒流量的变化规律  $\dot{m}_T = \dot{m}_T(t)$ , 才能确定理想速度随时间而变化的规律  $v(t)$ , 也才能求出 (3-2-34) 中的积分。

在推力为常数的情况下, 这一积分容易求出。这时只需对 (3-2-14) 式进行积分即

$$s(t) = \int_0^t gI_s \left[ -\ln\left(1 - n_0 \frac{\tau}{I_s}\right) \right] d\tau \quad (3-2-35)$$

积分结果为

$$s(t) = \frac{gI_s^2}{n_0} \left[ \frac{n_0}{I_s} t + \left(1 - \frac{n_0}{I_s} t\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{n_0}{I_s} t\right) \right] \quad (3-2-36)$$

如果我们关心的是起飞段终点的弹道行程  $s_E$ , 那么只要将

$$\mu_E = \frac{m_E}{m_0} = 1 - \frac{Ft_E}{m_0 g I_s} = 1 - \frac{n_0}{I_s} t_E \quad (3-2-37)$$

代入 (3-2-36) 式中, 得

$$s_E = \frac{gI_s^2}{n_0} \left[ (1 - \mu_E) + \mu_E \ln \mu_E \right] \quad (3-2-38)$$

从上式可知, 对于结构比  $\mu_E$  及推进剂比冲  $I_s$  已定的火箭 (即终点速度  $v_E$  已定的火箭), 如果起飞推重比  $n_0$  不同, 那么火箭在起飞段终点的行程  $s_E$  也将不同。推重比  $n_0$  愈小, 则



$s_E$  愈大。这是因为加速度小的火箭要达到同样的速度  $v_E$  所需的时间要更长的缘故。

关于导弹的行程也可近似计算。这时最好将  $(-\ln\mu)$  展开为下面的级数

$$-\ln\mu = (1 - \mu) + \frac{1}{2}(1 - \mu)^2 + \frac{1}{3}(1 - \mu)^3 + \dots \quad (3-2-39)$$

在推力为常数的情况下，将 (3-2-37) 式代入上式得

$$-\ln(\mu(t)) = \frac{n_0}{I_s} t + \frac{1}{2} \left( \frac{n_0}{I_s} t \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{n_0}{I_s} t \right)^3 + \dots \quad (3-2-40)$$

于是可得行程计算公式

$$s(t) = \int_0^t g I_s (-\ln\mu) d\tau = g I_s \int_0^t \left[ \frac{n_0}{I_s} \tau + \frac{1}{2} \left( \frac{n_0}{I_s} \tau \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{n_0}{I_s} \tau \right)^3 + \dots \right] d\tau \quad (3-2-41)$$

逐项积分后可得

$$s(t) = \frac{g I_s^2}{n_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n_0}{I_s} t \right)^2 + \frac{1}{3 \times 2} \left( \frac{n_0}{I_s} t \right)^3 + \frac{1}{4 \times 3} \left( \frac{n_0}{I_s} t \right)^4 + \dots \right] \quad (3-2-42)$$

在反坦克导弹的起飞段上，总有  $\frac{n_0}{I_s} t \ll 1$ ，故上式收敛很快。事实上，在反坦克导弹初步设计的时候，取方括弧中的头一项，往往即可获得相当的计算精度，即起飞段终点行程为

$$s_E \approx \frac{1}{2} n_0 g I_s^2 \quad (3-2-43)$$

此式具有明显的物理意义，请读者自行思考。此外，从这个式子看来，似乎  $n_0$  愈大， $s_E$  将愈大，实际情况是不是这样？也请读者自行思考。

**例题 3-4** 同例题 3-1 及 3-2 中之火箭，求起飞段终点处之行程  $s_E$ 。

**解** 按式 (3-2-38)

$$s_E = \frac{g I_s^2}{n_0} [(1 - \mu_E) + \mu_E \ln \mu_E] = \frac{9.81 \times 200^2}{20} [(1 - 0.95) + 0.95(\ln 0.95)] = 24.9 \text{ 米。}$$

从几何意义上说， $s_E$  就是图 3-2 中  $v-t$  曲线下所包围的面积。

若按式 (3-2-43) 计算，则可得  $s_E \approx 24.5$  米，结果相近。

### § 3-3 导弹在续航段上平飞的条件

前已说过，对于第一、二代反坦克导弹，常可取平飞弹道做为它们的基准弹道，尤其是在续航段上。

要使导弹实现平飞，必须有一定的空气动力升力或发动机推力的向上分量作用于导弹，以抵消导弹本身的重量。为此，对于通常的具有轴对称外形的导弹来说，必须先形成适当的正攻角  $\alpha > 0$ 。为了形成这个适当的正攻角，最常用的办法是由控制盒产生一定的程序指令，来操纵导弹，使得在设有其他外加指令作用时能自动地控制舵机，产生必要的舵上控制力及弹体攻角，以实现平飞。下面介绍平飞时舵上的控制力及攻角大小。

图 3-3 是导弹在平飞时的受力情况。由于存在正的攻角  $\alpha$ ，对于通常的静稳定弹体，就

要有一个负的空气动力俯仰力矩  $M_x$ ,  $= \frac{1}{2} \rho v^2 S L m_z^a \alpha$ , 其方向是力图使攻角  $\alpha$  恢复为零 (对于静稳定的弹体总有  $m_z^a < 0$ , 这时如图所示  $M_x$  的方向是顺时针)。为了平衡这个空气动力俯仰力矩  $M_x$ , 必须有另一个舵上控制力矩的俯仰分量  $M_{K,x}$ 。

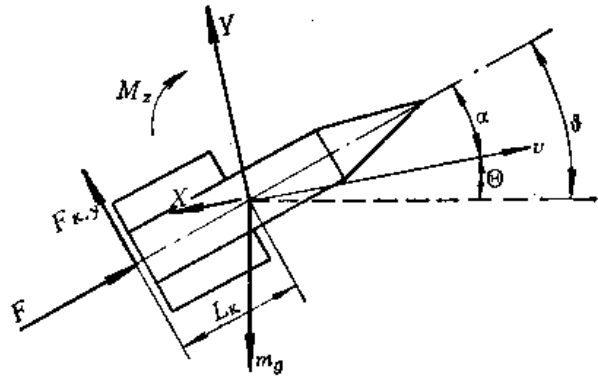


图3-3 平飞导弹的受力图

舵控力矩的俯仰分量  $M_{K,x}$  是由舵控力的俯仰分量  $F_{K,y}$  所产生的, 如下

$$M_{K,x} = L_K F_{K,y} \quad (3-3-1)$$

其中  $F_{K,y}$ ——舵控力的俯仰分量, 定义向上为正;

$L_K$ ——导弹重心到舵控力作用点的距离, 若操纵器装在导弹重心的后方, 则定义  $L_K$  为负值。

在舵机及操纵器安装在导弹重心后方的情况下,  $L_K < 0$ ; 这时, 为了产生正的舵控力矩 (以便平衡掉负的空气动力俯仰力矩  $M_x$ ), 必须先产生负的舵控力 ( $F_{K,y} < 0$ )。

在平飞条件下, 舵上控制力矩应该同空气动力俯仰力矩相平衡, 即

$$\frac{1}{2} \rho v^2 S L m_z^a \alpha + L_K F_{K,y} = 0 \quad (3-3-2)$$

此外, 在铅垂方向上的表面力同重力应该平衡, 即

$$\frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a \alpha + F \sin \alpha + F_{K,y} \cos \alpha - mg = 0 \quad (3-3-3)$$

对上式进行线性化, 取  $\sin \alpha \approx \alpha$  及  $\cos \alpha \approx 1$ , 则有

$$\frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a \alpha + F \alpha + F_{K,y} - mg = 0 \quad (3-3-4)$$

将 (3-3-2) 及 (3-3-4) 式联立起来, 可解出平飞条件下的攻角  $\alpha_{平飞}$  及舵控力  $F_{K,y,平飞}$  如下

$$\alpha_{平飞} = \frac{mg}{F + \frac{1}{2} S \rho v^2 \left( C_y^a + \frac{L}{-L_K} m_z^a \right)} \quad (3-3-5)$$

$$F_{K,y,平飞} = \frac{-mg}{\frac{L_K C_y^a}{L m_z^a} - 1 + \frac{2 L_K F}{\rho v^2 S L m_z^a}} \quad (3-3-6)$$

需要再次提起注意各符号的正负规定: 对于静稳定的弹体  $m_z^a < 0$ ; 对于操纵器位于弹体重心后方的导弹  $L_K < 0$ ; 此外,  $F_{K,y}$  向上为正。

**例题 3-5** 在续航段上某时刻, 若导弹质量  $m = 10$  千克, 推力的轴向分量  $F = 98.1$  牛顿 (10 千克力), 导弹速度  $v = 100$  米/秒。此外,  $L = 0.8$  米,  $L_K = -0.28$  米,  $S = 0.01131$  米<sup>2</sup>,  $C_y^a = 15.5$  弧度<sup>-1</sup>,  $m_z^a = -0.47$  弧度<sup>-1</sup>。

求 维持导弹平飞所需之舵上控制力  $F_{K,y,平飞}$  及相应的平飞攻角  $\alpha_{平飞}$ 。

解 由 (3-3-5) 式可得

$$\alpha_{\text{平飞}} = \frac{mg}{F + \frac{1}{2} \rho v^2 S \left( C_y^a + \frac{L}{-L_k} m_z^a \right)}$$

$$= \frac{10 \times 9.81}{98.1 + \frac{1}{2} \times 1.23 \times 100^2 \times 0.01131 \left[ 15.5 + \frac{0.8}{(-0.28)} \times (-0.47) \right]}$$

$$= 0.00845 \text{ 弧度} = 4.84^\circ$$

又由 (3-3-6) 式可得

$$F_{k,y,\text{平飞}} = \frac{-mg}{\frac{L_k}{L} \cdot \frac{C_y^a}{m_z^a} - 1 + \frac{L_k F}{\frac{1}{2} \rho v^2 S L m_z^a}}$$

$$= \frac{-10 \times 9.81}{\frac{(-0.28)}{0.80} \times \frac{15.5}{(-0.47)} - 1 + \frac{(-0.28) \times 98.1}{\frac{1}{2} \times 1.23 \times (100)^2 \times 0.01131 \times 0.8 \times (-0.47)}}$$

$$= -8.46 \text{ 牛顿}$$

请注意负号的物理意义。

## § 3-4 续航段上的速度

### § 3-4-1 规定及假设

#### 一、关于符号的规定

为了明确区分起飞段及续航段中的各参量，以上角标符号《0》表示起飞段中的参量，例如

$m_0^0$ ——起飞段起点的质量；

$v_E^0$ ——起飞段终点的速度；

$I_0^0$ ——起飞段发动机的比推力。

而对于续航段上的诸参量则不再另加上角标。

#### 二、关于速度图的说明

本节的计算方法，适用于在续航段上导弹有加速飞行的情况。这是一种最普遍的情况，事实上“增速段”也可包括在内。

有些导弹是以等速飞行的，这时，续航段的速度及行程计算都极其简单，故不予讨论。但绝对等速的飞行是很少的，即便某个导弹在常温下是等速飞行，但在高温或低温下，由于发动机推力的变化，仍将以变速飞行。

#### 三、主要假定

首先，假定空气阻力同续航推力相比是不可略去的；但是，认为空气阻力系数  $C_x$  是一常量。对于目前绝大多数第一代和第二代反坦克导弹来说，飞行速度为亚音速，上述假定是符合实际情况的。此外，这个假定还意味着在飞行中攻角的变化很小。事实上，在速度

有所变化的情况下，平飞攻角也有变化，从而使导弹的阻力系数  $C_x$  也发生变化。因此，计算中做为常量取定的阻力系数  $C_x$ ，可以理解作为一种平均值。

其次，还可假定，导弹的续航发动机的推进剂秒耗量  $\dot{m}_T$  是常值（或能分段近似为常值），因而续航推力  $F$  也是常值。

最后，假定不考虑导弹在飞行中一路放出导线而对速度产生的影响。我们曾经根据多种现实的反坦克导弹的结构数据进行了大量的计算，结果表明，若假定导弹在飞行时并不放出导线，结果所得导弹的速度及行程将略有误差，这一误差小于 5%，误差的方向是使这样算出的速度及射程较真实情况偏低。因此，可以把这一假定所带来的误差归入设计的性能储备量中。放线时导线对弹体的摩擦力是很难精确计算的，它对导弹飞行速度的影响将纳入空气阻力系数  $C_x$  之中一并估算。

### § 3-4-2 续航段速度的计算

在前述假定之下，导弹在水平飞行中的速度变化的方程为

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{C_x S \rho}{2} v^2 \quad (3-4-1)$$

此式表明导弹在推力及空气阻力作用下的加速度情况。至于重力，对导弹的水平飞行速度并无直接影响；但是为了抵消重力而设置的平飞攻角  $\alpha_{平}$ ，将引起诱导阻力，在空气阻力系数  $C_x$  中应包含这个因素。

对上式进行改写得到

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \left[ 1 - \frac{v^2}{2F/(C_x S \rho)} \right] \quad (3-4-2)$$

$2F/(C_x S \rho)$  的量纲是  $(\text{米}^2/\text{秒}^2)$ ，即“速度的平方”。所以，可用一个符号  $(v_M)^2$  来代替它，即令

$$(v_M)^2 = \frac{2F}{C_x S \rho} \quad (3-4-3)$$

移项成为

$$\frac{1}{2} C_x S \rho v_M^2 = F \quad (3-4-4)$$

这个式子表明当导弹的速度达到  $v_M$  时（设想阻力系数  $C_x$  仍不变），导弹所受的空气阻力将与其推力相等。因此，这时导弹不能再加速，而将以  $v_M$  的速度等速运动下去。也就是说，如果导弹是从较低的速度加速上来的话，那么，在推力及空气阻力的联合作用之下，它的

速度不可能超过  $v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}}$ ；反之，若是导弹从较高的速度减速下来的话，那么它的

速度不可能低于  $v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}}$ 。所以，可把  $v_M$  叫做导弹的“临界速度”，或叫做“极限速度”。

引入临界速度  $v_M$  之后，就可以把 (3-4-2) 式改写成

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \left( 1 - \frac{v^2}{v_M^2} \right) \quad (3-4-5)$$

此方程可以用分离变数法积分出来，先写成

$$\frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_M}\right)^2} = \frac{F}{m} dt \quad (3-4-6)$$

此式可以两端同时积分。积分的初始条件是：当  $t = t_0$  时  $v = v_0$ ,  $m = m_0$  (即续航段起点的条件)。

按照前面理想速度公式的推导过程可知，对 (3-4-6) 式右端进行积分的结果就是理想速度，即

$$\int_{t_0}^t \frac{F}{m} dt = -gI_s \ln \mu \quad (3-4-7)$$

对 (3-4-6) 式左端进行积分的结果则是

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_M}\right)^2} = \frac{v_M}{2} \left[ \ln \frac{1 + \frac{v}{v_M}}{1 - \frac{v}{v_M}} \right]_{v_0}^v = \frac{v_M}{2} \cdot \ln \frac{\left(1 + \frac{v}{v_M}\right) / \left(1 - \frac{v}{v_M}\right)}{\left(1 + \frac{v_0}{v_M}\right) / \left(1 - \frac{v_0}{v_M}\right)} \quad (3-4-8)$$

显然，(3-4-6) 式左右两端积分后仍应相等。故由 (3-4-7) 及 (3-4-8) 二式相等之条件可导出下式

$$\ln \mu = \frac{-v_M}{2gI_s} \ln \frac{\left(1 + \frac{v}{v_M}\right) / \left(1 - \frac{v}{v_M}\right)}{\left(1 + \frac{v_0}{v_M}\right) / \left(1 - \frac{v_0}{v_M}\right)} \quad (3-4-9)$$

或可写成

$$\mu = \left[ \frac{\left(1 - \frac{v}{v_M}\right) / \left(1 + \frac{v}{v_M}\right)}{\left(1 - \frac{v_0}{v_M}\right) / \left(1 + \frac{v_0}{v_M}\right)} \right]^{\frac{v_M}{2gI_s}} \quad (3-4-10)$$

在解决反面问题时，可以利用式 (3-4-10)。这时给定的是导弹速度  $v$  (以及  $v_M$  及  $I_s$ )，而需要算的是导弹结构应具有相对质量  $\mu$ 。

如果已给定的是导弹结构的相对重量  $\mu$ ，则从 (3-4-10) 式，可以解出导弹的速度  $v$ ，这就是解决正面问题，如下

$$v = v_M \cdot \frac{1 - \left(\frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}}\right) \cdot \mu^{\left(\frac{2gI_s}{v_M}\right)}}{1 + \left(\frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}}\right) \cdot \mu^{\left(\frac{2gI_s}{v_M}\right)}} \quad (3-4-11)$$

为了便于理解上式的物理意义，现考察  $v_0 = 0$  的特殊情况，即假定导弹是从静止状态发射的 (当然还需要有某种措施保持导弹水平飞行)，于是

$$\frac{\left(1 - \frac{v_0}{v_M}\right)}{\left(1 + \frac{v_0}{v_M}\right)} = 1$$

则式 (3-4-11) 变为

$$v = v_M \frac{1 - \mu (2I_s g / v_M)}{1 + \mu (2I_s g / v_M)} \quad (3-4-12)$$

此式的曲线图象示于图 3-4。由图可知，假若发动机的比冲  $I_s$  为一定，则对于具有不同的临界速度  $v_M$  值的导弹，其速度  $v$  的变化情况有所区别，但又有共同的规律：当发动机工作后不久 ( $\mu$  尚接近于 1 时)，导弹的实际速度  $v$  尚远小于其临界速度  $v_M$ ，这时导弹的速度变化规律将接近于其理想速度的变化规律；而当发动机工作时间较长之后 ( $\mu \rightarrow 0$ )，导弹的速度将趋近于其临界速度  $v_M$ 。

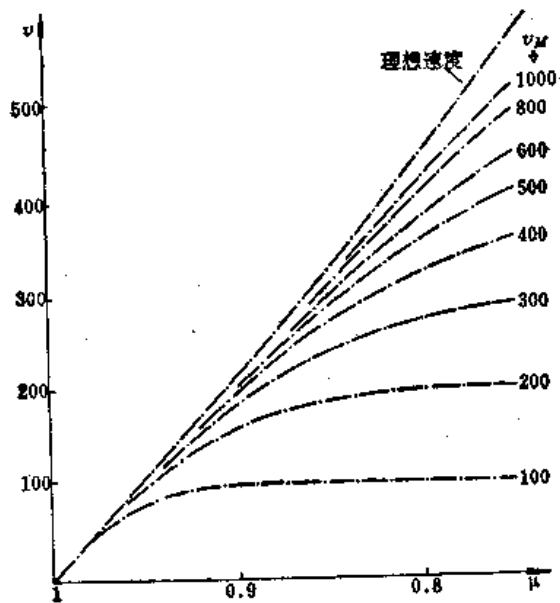


图 3-4 平飞导弹的速度变化规律 ( $I_s = 204$  秒)

**例题 3-6** 若导弹在续航段起点的质量为  $m_0 = 11.39$  千克，速度  $v_0 = 100$  米/秒；续航发动机推力  $F = 98.1$  牛顿，工作时间  $t_1 = 25$  秒，比冲  $I_s = 200$  秒；导弹的阻力系数  $C_x = 0.37$ ，参考面积  $S = 0.1131$  米<sup>2</sup>。

**求** 在  $t = 5, 10, 15, 20, 25$  秒时的速度 (时间原点从续航段起点算起，即  $t_0 = 0$ )。

**解** 由式 (3-4-11)

① 先求续航发动机推进剂秒流量  $\dot{m}_T$

$$\dot{m}_T = \frac{m_T}{t_1} = \frac{F}{g I_s} = \frac{98.1 \text{ 千克} \cdot \text{米} \cdot \text{秒}^{-2}}{9.81 \times 200 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}} = 0.05 \text{ 千克/秒}$$

② 再求极限速度  $v_M$

$$v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 98.1}{0.37 \times 0.01131 \times 1.23}} = 195.65 \text{ 米/秒}$$

$$\frac{2I_s g}{v_M} = \frac{2 \times 200 \times 9.81}{195.65} = 20.03$$

③ 求

$$\frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} = \frac{1 - \frac{100}{195.65}}{1 + \frac{100}{195.65}} = 0.3237$$

以下列表计算:

$t$ (秒)	5	10	15	20	25
$\Delta m_T = \dot{m}_T t = 0.05 t$ (千克)	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25
$m = m_0 - \Delta m_T = 11.39 - \Delta m_T$ (千克)	11.14	10.89	10.64	10.39	10.14
$\mu = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{11.39}$	0.9780	0.9561	0.9342	0.9122	0.8902
$\mu^{20.03}$	0.6399	0.4069	0.2554	0.1587	0.09739
$0.3237\mu^{20.03}$	0.2071	0.1317	0.08268	0.05137	0.03183
$1 - 0.3237\mu^{20.03}$	0.7929	0.8683	0.9173	0.9486	0.9682
$1 + 0.3237\mu^{20.03}$	1.2071	1.1317	1.0827	1.0514	1.0318
$(1 - 0.3237\mu^{20.03}) / (1 + 0.3237\mu^{20.03})$	0.6568	0.7672	0.8873	0.9023	0.9383
$v = v_M \frac{1 - 0.3237\mu^{20.03}}{1 + 0.3237\mu^{20.03}}$ (米/秒)	128.7	150.4	166.1	176.8	183.9

注意本节所导出的公式 (3-4-12), 也可用于计算导弹在起飞段上的速度, 如下面示出两个例子。为了书写方便, 对于下面例题中的各起飞段参量, 暂不使用上角标 «0»。

**例题 3-7** 参照例题 3-1 及 3-2 之导弹数据。导弹起飞质量  $m_0 = 12$  千克, 起飞发动机装药  $m_T = 0.6$  千克, 比冲  $I_r = 200$  秒, 起飞发动机推力  $F = 240$  千克力, 工作时间  $t_1 = 0.5$  秒, 导弹的空气阻力系数  $C_x = 0.37$ , 参考面积  $S = 0.01131$  米<sup>2</sup>。

求 导弹在起飞段终点之速度 (不考虑重力影响)。

解 先求极限速度

$$v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 2354}{0.37 \times 0.01131 \times 1.23}} = 967.8 \text{ 米/秒}$$

再求  $\frac{v_M}{g I_r} = \frac{967.8}{9.8 \times 200} = 0.4938$

$$\therefore v_E = v_M \frac{1 - \mu_E^{(2g I_r / v_M)}}{1 + \mu_E^{(2g I_r / v_M)}} = 967.8 \frac{1 - (0.95)^{2/0.4938}}{1 + (0.95)^{2/0.4938}} = 100.17 \text{ 米/秒}$$

将此数据与例题 3-1 中算得的导弹之理想速度 100.6 米/秒相比较可知在起飞段上由空气阻力造成的影响只使速度减小约 0.5 米/秒。

**例题 3-8** 类似上例之导弹, 但假若起飞推力为 48 千克力 (发动机工作时间为 2.5 秒), 其他条件不变。

求起飞段终点之速度。

解

$$\textcircled{1} v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 48 \times 9.81}{0.37 \times 0.01131 \times 1.23}} = 432.7 \text{ 米/秒}$$

$$\textcircled{2} \frac{2I_r g}{v_M} = 9.059$$

$$\textcircled{3} v_E = v_M \frac{1 - \mu_E^{(2I_r g / v_M)}}{1 + \mu_E^{(2I_r g / v_M)}} = 432.7 \frac{1 - (0.95)^{9.059}}{1 + (0.95)^{9.059}} = 98.77 \text{ 米/秒}$$

可知, 在推力仅为全重 4 倍的情况下, 空气阻力对起飞段速度的影响仍是很有限制的。

## § 3-4-3 速度计算公式的无量纲形式

仔细研究公式 (3-4-10)、(3-4-11) 及 (3-4-12), 可以发现其中的速度  $v$ 、 $v_0$ 、 $v_M$  等参量都不是以本身的绝对值直接在公式中起作用的, 却是以某种相对值的形式在式中起作用的。这种现象有更深刻的物理意义, 将在下一节中详谈。现在只须指出, 如果引入一些新的无量纲参量来代替原来的  $v$ 、 $v_0$  及  $v_M$  这些有具体量纲的参量, 将会给计算带来很大方便。这些新的无量纲参量按如下方式选取, 令

$$v = \frac{v}{I_s g} \quad \text{—— 无量纲速度}$$

$$v_0 = \frac{v_0}{I_s g} \quad \text{—— 无量纲的初速}$$

$$v_M = \frac{v_M}{I_s g} \quad \text{—— 无量纲的临界速度}$$

$$\eta = \frac{1 - \frac{v}{v_M}}{1 + \frac{v}{v_M}} = \frac{1 - \frac{v}{v_M}}{1 + \frac{v}{v_M}} \quad \text{—— 速度对于临界速度的差别参量}$$

$$\eta_0 = \frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} = \frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} \quad \text{—— 初速对于临界速度的差别参量}$$

采用以上的无量纲参量之后, 就可以把 (3-4-10) 及 (3-4-11) 式改写成

$$\mu = \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)^{v_M/2} \quad (3-4-10)'$$

$$v = v_M \cdot \frac{1 - \eta_0 \cdot \mu^{2/v_M}}{1 + \eta_0 \cdot \mu^{2/v_M}} \quad (3-4-11)'$$

应注意, 前面的  $\eta$  及  $\eta_0$  的定义式具有简单的函数形式:

$$y = \frac{1 - x}{1 + x} \quad (3-4-13)$$

并且 (3-4-11)' 式也可看做这样形式的函数。以式 (3-4-13) 绘制的曲线如图 3-5 所示。这样, 在计算  $\eta$ 、 $\eta_0$  及 (3-4-11)' 式时就可以利用此曲线。

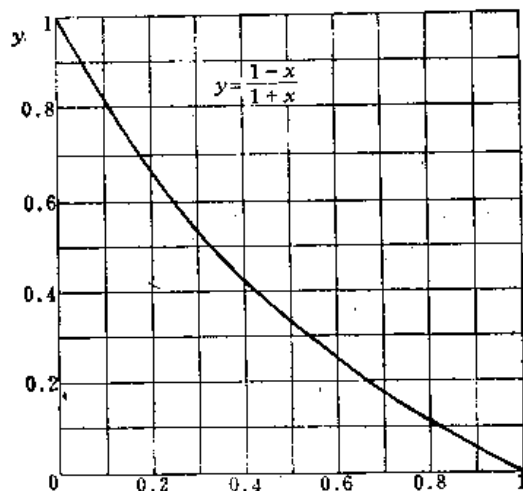


图3-5 函数  $y = (1-x)/(1+x)$  的曲线

利用这个曲线, 不仅可以根 据  $x$  来求  $y$ , 而且也可以反过来由  $y$  求  $x$ 。所以, 也可根据已知的  $\eta$  来求  $\frac{v}{v_M} = \frac{v}{v_M}$ 。

参量  $\eta$  是表明实际速度  $v$  对于临界速度  $v_M$  之差别程度的参量, 故可以称它为“差别参量”。 $\eta$  愈大, 就是  $v$  与  $v_M$  之间的差别愈大 (若  $v = 0$ , 则  $\eta = 1$ ; 若  $v = v_M$ , 则  $\eta = 0$ )。利用图 3-5 的曲线, 在  $v_M$  或  $v_M$  一定的条件下, 可将  $\eta$  同  $v$  或  $v$  互相进行换算, 它们可看成是相通的参量。 $\eta$  的实际意义在于:  $\eta$  愈小, 即  $v$  与  $v_M$  之间的差别愈小, 导弹速度  $v$  的变化就愈平缓; 反之,  $\eta$  愈大,  $v$  与  $v_M$  之间的差别愈大, 导弹的速度  $v$  的变化就愈剧烈。这一变化的趋势是力图使实际速度接近于临界速度  $v_M$ 。



## § 3-5 续航段上的行程

## § 3-5-1 运动方程

由上一节导出的续航段速度公式 (3-4-11), 可以进一步求出续航段的行程  $s$ 。即由如下的方程组

$$v = v_M \frac{1 - \left[ \left( 1 - \frac{v_0}{v_M} \right) / \left( 1 + \frac{v_0}{v_M} \right) \right]^{\mu (2gI_r/v_M)}}{1 + \left[ \left( 1 - \frac{v_0}{v_M} \right) / \left( 1 + \frac{v_0}{v_M} \right) \right]^{\mu (2gI_r/v_M)}} \quad (3-5-1)$$

$$\frac{ds}{dt} = v \quad (3-5-2)$$

$$\mu = 1 - \frac{Ft}{m_0 g I_r} \quad (3-5-3)$$

可将续航段行程  $s$  积分出来。

在进行积分时, 需给定初始条件及有关参数。

初始条件可取为: 当  $t = 0$  时,  $s = 0$  (即认为时间及行程的起点, 都从续航段开始起算)。

有关的参数是: 比冲  $I_r$ ; 初始速度  $v_0$ ; 推力  $F$  及导弹的阻力特征  $(C_x S \rho)$ ; 还有导弹初始质量  $m_0$ 。给出了这五个参量, 就能计算续航段行程随时间的变化规律  $s = s(t)$ 。

如果, 需要求出导弹到达续航段终点时的行程  $s_R$ , 那么还必须给定续航段终点的时间  $t_R$ 。这就是说, 续航段终点的行程是由六个参量所决定的, 即  $I_r$ 、 $F$ 、 $(C_x S \rho)$ 、 $v_0$ 、 $m_0$  及  $t_R$ 。

对上面的方程组进行积分可能会遇到一些困难的。首先, 由于被积函数 (3-5-1) 的特点, 不可能用有限的解析式把积分结果  $s$  表达出来。只能用数值方法 (如在电子计算机上), 或者用展开为无穷级数的方法, 对于特定的一组参数, 来近似地算出行程  $s$ 。

其次的困难是, 积分过程中涉及的参量太多, 共有六个; 这些参量对于行程  $s_R$  的影响是复杂的, 很难抓住其中的规律性。

前面已经说过, 在计算导弹性能时, 会遇到两个方面的问题: 正面问题是根据已知的导弹结构参数来计算它的性能; 反面问题则是根据预定的性能要求 (如预定的导弹射程等), 来确定导弹的构造特征及结构参数。导弹的设计工作, 本质上就是要解决导弹性能计算的反面问题。

一般说来, 在研究“正面问题”时, 参数可多一些, 而问题复杂性的增加则是有限的。但在处理“反面问题”时, 假如参数很多, 并且还弄不清它们对于性能的影响规律, 因而不得不以数值法来解决问题的时候, 那就非常麻烦了。

在反坦克导弹的设计工作之中, 必须根据射程要求 (及其它战术技术要求) 来恰当地确定若干参数, 即必须解决射程计算的反面问题。可先设定一组参数, 然后试算一下, 看能否满足射程要求。显然, 在绝大多数情况下是不会那样凑巧的。于是, 必须再设定第二组参数来试算。经过多次试算之后, 才有可能凑上了射程的要求。这就不得不进行大量的计算。如果涉及的参数有五个, 并假定对每个参数都选取四个可能的数值, 那么, 就要面临  $5^4 = 625$  种参数的组合。也就是说, 要对方程组进行数百次数值积分的计算过程。即便是利

用电子计算机，并且采用自动寻优的算法，其计算量也是很大的；并且结果数据的处理工作也将是相当麻烦的。

为了“多、快、好、省”地解决设计问题，必须尽力把各种参数对于导弹射程的影响规律弄清楚。只有抓住了规律，抓住了主要矛盾，才能迎刃而解地合理确定出导弹参数。

要抓住导弹参数对于射程的影响的规律性，有一个方法是应该利用的，这就是对运动方程进行无量纲化的方法。这是一个在多种科学技术工作中被相当普遍地利用着的方法。

### § 3-5-2 运动方程的无量纲化

在各种科学技术问题中，经常会遇到无量纲的参数。它们都是两个相同量纲的物理量的比值，因而实质上总是代表着一种矛盾两方面的强弱对比关系。例如，在气体动力学中，马赫数  $M$  是气流速度与当地音速的比值；雷诺数  $Re$  则是流体中的惯性力与粘滞力的比值。在其他的物理现象的运动过程中，也会找到不胜枚举的无量纲参数。虽然影响这些物理过程的某些具体的参量可能千差万别，但只要这些过程中某些特定的无量纲参数具有同一的数值，那么这些过程之间就往往存在着某种相似性。这种情况说明，这些特定的无量纲参数能够更加深刻地表现出该物理过程的本质。

以马赫数  $M$  来说吧。尽管两个气流之间的温度、压力、密度、速度等都不相同，但只要马赫数相同，那么这两个气流流过同一形状物体时的流场就是相似的。因此，我们才能在风洞中用模型来研究真实飞行器的空气动力特性；在某一个  $M$  数下，测量出风洞中模型上的空气动力，通过简单地换算，就马上可以知道真实飞行器在同一  $M$  数下的空气动力。这样，就只需集中注意力于一个参量——马赫数  $M$  的变化对于模型的气动特性的影响就行了，而不必再去注意各种各样具体参数的变化对空气动力特性的影响。

在研究各种物理现象的运动过程时，都要尽可能地抓住这种反映过程的本质的无量纲参量。

现在来研究续航段运动方程的无量纲化问题。

先把 (3-5-1) 及 (3-5-3) 二式代入到 (3-5-2) 式，即

$$\frac{ds}{dt} = v_M \frac{1 - \left( \frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} \right) \cdot \left( 1 - \frac{F}{m_0 g} \cdot \frac{t}{I_s} \right)^{\frac{2gI_s}{v_M}}}{1 + \left( \frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} \right) \cdot \left( 1 - \frac{F}{m_0 g} \cdot \frac{t}{I_s} \right)^{\frac{2gI_s}{v_M}}} \quad (3-5-4)$$

式中的  $v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}}$  本来也可以具体地代入式中，只是为了避免过分麻烦，才写成  $v_M$ 。

对于这个式子，本来可以直接用数值法进行积分（在给定  $I_s$ 、 $C_x S \rho$ 、 $F$ 、 $v_0$ 、 $m_0$  之后），从  $t = 0$  起，积分到  $t = t_B$  止，就得到  $s = s_B$ 。但是，可以注意到，式中有些参量是以相对量的形式起作用的。例如， $\frac{F}{m_0 g}$ 、 $\frac{gI_s}{v_M}$ 、 $\frac{v_0}{v_M}$ ，它们都是无量纲的相对量，如果直接给定这些无量纲相对参量的数值，当然还是能够对方程 (3-5-4) 进行积分，甚至可能更

方便。

因此，引入下列的无量纲参量

$$n_0 = \frac{F}{m_0 g} \quad \text{——起点的推重比；}$$

$$v = \frac{v}{I_s g} \left( \text{及 } v_M = \frac{v_M}{I_s g}, \quad v_0 = \frac{v_0}{I_s g} \right) \quad \text{——无量纲速度；}$$

$$\eta_0 = \frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} \quad \text{——起点速度 } v_0 \text{ 相对于临界速度 } v_M \text{ 的差别参量。}$$

于是 (3-5-4) 式可改写成

$$\frac{ds}{dt} = I_s g v_M \frac{1 - \eta_0 \left( 1 - n_0 \frac{t}{I_s} \right)^{2/v_M}}{1 + \eta_0 \left( 1 - n_0 \frac{t}{I_s} \right)^{2/v_M}} \quad (3-5-5)$$

可以看到，式子已经简化了。但是，如果采用无量纲的  $\mu$  来做自变量，式子还可大为简化。由 (3-2-11) 及 (3-2-13) 式可得

$$\mu = 1 - \frac{Ft}{m_0 g I_s} = 1 - n_0 \frac{t}{I_s} \quad (3-5-6)$$

微分而得

$$d\mu = -\frac{n_0}{I_s} dt \quad (3-5-7)$$

代入 (3-5-5) 式，整理后可得

$$\frac{n_0}{g I_s^2} \cdot \frac{ds}{d\mu} = -v_M \frac{1 - \eta_0 \mu^{2/v_M}}{1 + \eta_0 \mu^{2/v_M}} \quad (3-5-8)$$

还可注意到， $g I_s^2$  的量纲同行程  $s$  的量纲一样。因此，可把待求量  $s$  也用一个无量纲的参量表示，即令

$$\xi = \frac{n_0}{g I_s^2} s \quad \text{——无量纲行程。}$$

于是，方程 (3-5-4) 可最终写成如下的形式：

$$\frac{d\xi}{d\mu} = -v_M \frac{1 - \eta_0 \mu^{2/v_M}}{1 + \eta_0 \mu^{2/v_M}} \quad (3-5-9)$$

这就是方程 (3-5-4) 的无量纲形式。其中，待求量  $\xi$ 、自变量  $\mu$ 、参量  $\eta$  及  $v_M$  都是无量纲的。方程 (3-5-9) 在形式上比 (3-5-4) 简缩得多，但是所表达的物理过程是一致的。对于方程 (3-5-9)，只需给出两个无量纲参量  $v_M$  及  $\eta_0$  的适当数值（且不管原来那五个具体的结构参量可能怎样千变万化），并给定积分初始条件：当  $\mu = 1$  时， $\xi = 0$ （相当于  $t = 0$  时， $s = 0$ ），就能在积分过程的终点（例如  $\mu = \mu_R$ ），求出无量纲的全行程  $\xi = \xi_R$ ，然后可换算为具体的全行程  $s_R = \xi_R \cdot \frac{g I_s^2}{n_0}$ 。

由此可见，尽管影响导弹在续航段上的行程变化规律  $s = s(t)$  的结构参量原来有五个，但是通过上述“去粗取精”的无量纲化过程之后，矛盾集中到了  $v_M$  及  $\eta_0$  这两个无量

纲参量的身上。现在，只需把  $v_M$  及  $\eta_0$  这两个参量对于无量纲行程  $\xi$  的变化规律  $\xi(\mu)$  的影响弄清楚，就能把原来那五个结构参量对于行程  $s$  的变化规律  $s(t)$  的影响弄清楚。无量纲化的方法可以广泛地应用于研究各种科学技术问题。

### § 3-5-3 运动方程的积分

下面对运动方程 (3-5-9) 进行积分。记住初始条件是  $\mu = 1$  时， $\xi = 0$ 。于是可得

$$\xi = \xi(\mu) = - \int_1^\mu v_M \frac{1 - \eta_0(\lambda)^{2/v_M}}{1 + \eta_0(\lambda)^{2/v_M}} d\lambda \quad (3-5-10)$$

这个积分不能用有限的表达式写出，只能用数值法或级数展开法求算。

若给定参量  $v_M$  及  $\eta_0$ ，可以在电子计算机上算出在  $1 > \mu > 0$  的范围内  $\xi$  的变化情况。这种数值法在拥有电子计算机的情况下是可行的。

另一方法是将被积函数展开为收敛的级数，再逐项积分，直到获得足够的精度为止。这一方法除了可以获得具体数值的结果之外，还可以表明各参数对射程的影响情况，所以也是值得来研究一下的。

注意式 (3-5-10) 中的被积函数，它具有  $\frac{1-x}{1+x}$  的形式，其分子分母直接相除，即可得

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 - \dots + (-1)^i \cdot 2x^i + \dots \quad (3-5-11)$$

若  $0 \leq x < 1$ ，则这个级数是收敛的。

于是，可将 (3-5-10) 式展开为级数的积分，即

$$\begin{aligned} \xi(\mu) &= -v_M \int_1^\mu [1 - 2(\eta_0 \lambda^{2/v_M}) + 2(\eta_0 \lambda^{2/v_M})^2 - \dots + 2(-\eta_0 \lambda^{2/v_M})^i + \dots] d\lambda \\ &= v_M \left\{ 1 - \mu + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\eta_0)^i [1 - \mu^{(1+2i/v_M)}]}{1 + \frac{2i}{v_M}} \right\} \end{aligned}$$

或整理一下，并只考虑续航段终点之行程，即令  $\mu = \mu_E$ ，可得

$$\xi_E = v_M \left\{ \left[ 1 + v_M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\eta_0)^i}{i + \frac{v_M}{2}} \right] - \mu_E \left[ 1 + v_M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\eta_0 \mu_E^{2/v_M})^i}{i + \frac{v_M}{2}} \right] \right\} \dots \quad (3-5-12)$$

在上式右端第一个方括号中，只含有  $v_M$  及  $\eta_0$ ，因此实际上它与自变量  $\mu$  无关，而是一个积分常数，令其为  $C$ ，即

$$C = 1 + v_M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\eta_0)^i}{i + \frac{v_M}{2}} = C(v_M, \eta_0) \quad (3-5-13)$$

为了计算的方便，上式还可改写为

$$C = 1 - v_M \cdot \ln(1 + \eta_0) - \frac{(v_M)^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\eta_0)^i}{i \left( i + \frac{v_M}{2} \right)} \quad (3-5-14)$$

将  $\ln(1+\eta_0)$  展开为级数, 即可证明上二式相等。在反坦克导弹的设计实践中, 总有  $|\eta_0| \leq 1$ , 这时 (3-5-14) 式是收敛的。于是, 我们能够以足够的精度将积分常数  $C$  随参量  $v_M$  及  $\eta_0$  的变化规律计算出来。这一计算结果绘在图 3-6 中。

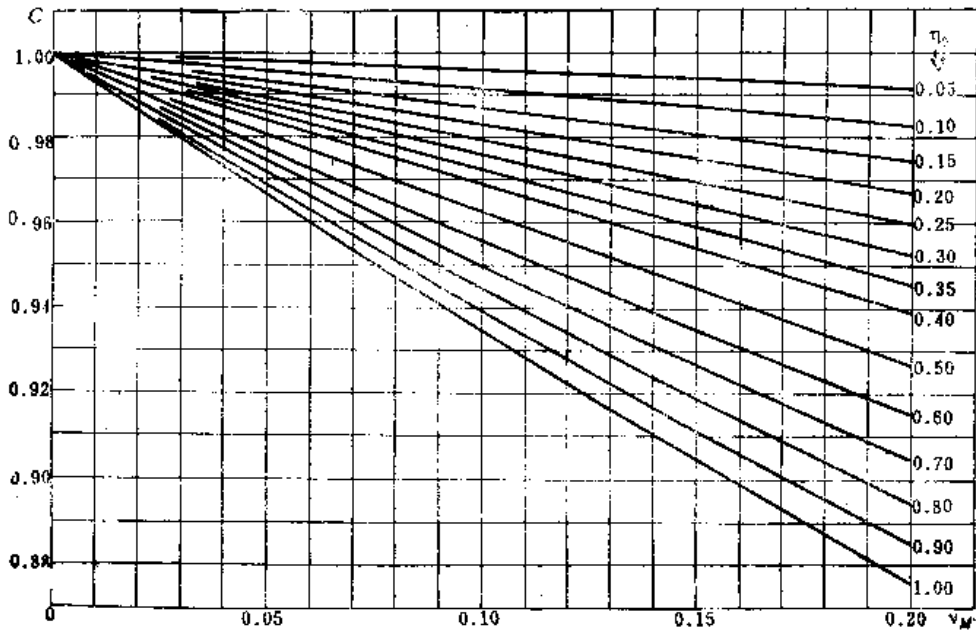


图3-6 积分常数  $C = C(v_M, \eta_0)$

再看 (3-5-12) 式中第二个方括号, 形式同前一个方括号完全相似, 只是以  $(\eta_0 \mu_E^{2/\gamma_M})$  代替  $\eta_0$ , 于是可令其为  $C'$ , 即

$$C' = 1 + v_M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\eta_0 \mu_E^{2/\gamma_M})^i}{i + \frac{v_M}{2}} = C(v_M, \eta_0 \mu_E^{2/\gamma_M}) \quad (3-5-15)$$

要计算  $C'$  的数值, 也可利用图 3-6 的曲线。这时只须先算出  $(\eta_0 \mu_E^{2/\gamma_M})$  之值, 并令

$$\eta' = \eta_0 \mu_E^{2/\gamma_M} \quad (3-5-16)$$

然后, 用  $\eta'$  取代参数  $\eta_0$ , 即可在图 3-6 的  $C$  曲线上查出  $C'$  之值。

于是 (3-5-12) 式即可表为

$$\xi_E = v_M (C - \mu_E C') \quad (3-5-17)$$

算得无量纲行程  $\xi_E$  后, 即可根据  $\xi_E$  之定义

$$\xi_E = -\frac{n_0 s_E}{I_s^2 g}$$

而换算求得续航段终点之行程  $s_E$

$$s_E = \frac{I_s^2 g}{n_0} \xi_E = \frac{I_s^2 g}{n_0} v_M (C - \mu_E C') \quad (3-5-18)$$

**例题3-9** 有一个反坦克导弹, 在高温  $+50^\circ\text{C}$  条件下其续航发动机的比推力是  $I_s = 180$  秒, 推力  $F = 12$  千克力 ( $12 \times 9.81$  牛顿), 在续航段开始时的质量是  $m_0 = 10$  千克, 其阻力特征是  $(C_r S \rho) = 6.278 \times 10^{-3}$  千克/米, 在续航段开始时的速度是  $v_0 = 80$  米/秒, 续航发动机工

作时间是 20 秒。

求此导弹从续航段起点到终点的行程  $s_E$ 。

解 先算出各无量纲参数：

$$n_0 = \frac{F}{m_0 g} = \frac{12 \times 9.81}{10 \times 9.81} = 1.2$$

$$v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}} \cdot \frac{1}{I_s g} = \sqrt{\frac{2 \times 12 \times 9.81}{6.278 \times 10^{-3}}} \cdot \frac{1}{180 \times 9.81} = 0.11$$

$$\eta_0 = \frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} = \frac{1 - \frac{80}{194}}{1 + \frac{80}{194}} = 0.416$$

根据  $v_M = 0.11$  及  $\eta_0 = 0.412$ ，在图 3-6 中的  $C$  曲线上查出积分常数  $C = 0.964$ 。

此外，根据 (3-5-6) 式可有

$$\mu_E = 1 - n_0 \frac{t_E}{I_s} = 1 - 1.2 \cdot \frac{20}{180} = 1 - 0.133 = 0.867$$

于是由式 (3-5-16) 可算出

$$\eta'_0 = \eta_0 \mu_E \frac{2}{v_M} = 0.416 \times (0.867)^{\frac{2}{0.11}} = 0.031$$

在图 3-6 的  $C$  曲线图上查出  $C' = 0.997$ ，于是由式 (3-5-17)

$$\xi = v_M \{C - \mu_E C'\} = 0.11 \{0.964 - 0.867 \times 0.997\} = 0.01096$$

再由式 (3-5-18) 求得行程  $s_E$

$$s_E = \xi_E \frac{I_s^2 g}{n_0} = 0.01096 \frac{180^2 \times 9.81}{1.2} = 2902 \text{ 米}$$

**例题 3-10** 同上之反坦克导弹，在低温  $-40^\circ\text{C}$  条件下，其续航发动机之比推力为  $I_s = 172$  秒，推力为  $F = 8.8$  千克力  $= 8.8 \times 9.81$  牛顿，发动机工作时间为  $t_E = 26$  秒，导弹在续航段开始时之质量仍为  $m_0 = 10$  千克，导弹之阻力特征  $C_x S \rho = 7.848 \times 10^{-3}$  千克/米（由于低温时空气密度  $\rho$  较大，故本题中  $C_x S \rho$  之值大于上题中的相应值）。导弹在续航段起点之速度  $v_0 = 76$  米/秒。

求 导弹在续航段终点之行程。

解 先求无量纲参数，得  $n_0 = 0.88$ ， $v_M = 0.0878$ ， $\eta_0 = 0.322$ ，于是由图 3-6 之曲线查得积分常数  $C = 0.9765$

又按式 (3-5-6) 算得  $\mu_E = 0.867$

再按式 (3-5-16) 求得  $\eta'_0 = \eta_0 \mu_E \frac{2}{v_M} = 0.0125$ ，据此查图 3-6 之曲线，得  $C' = 0.999$ 。于是

$$\xi_E = v_M (C - \mu_E C') = 0.0878 (0.9765 - 0.867 \times 0.999) = 0.00962$$

$$s_E = \xi_E \frac{I_s^2 g}{n_0} = 0.00962 \frac{(172)^2 \times 9.81}{0.88} = 3195 \text{ 米}$$

把这一例题的结果同前一例题相比较，可以发现一个有趣的情况，就是反坦克导弹在低温条件下，虽然发动机的推力及总冲量都较低，但它却比高温条件下飞得更远。这个情况是出乎一般意料的。通常凭直观常会误认为，高温下发动机的推力大、冲量大，似乎就

应飞得更远，但是却忽略了高温下发动机的工作时间短这一因素。事实上，发动机的工作时间对射程的影响往往更显著（参照本章第二节对（3-2-38）式的解释）。

在图 3-7 中绘出了上面两个例题的反坦克导弹在高温和低温条件下的  $v-t$  图。显然， $v-t$  曲线下所包围的面积，就是导弹的行程。只要稍微观察一下图中的两条曲线，就不难发现，在低温条件下，由于发动机工作时间较长，导弹确实可能飞得更远一点。

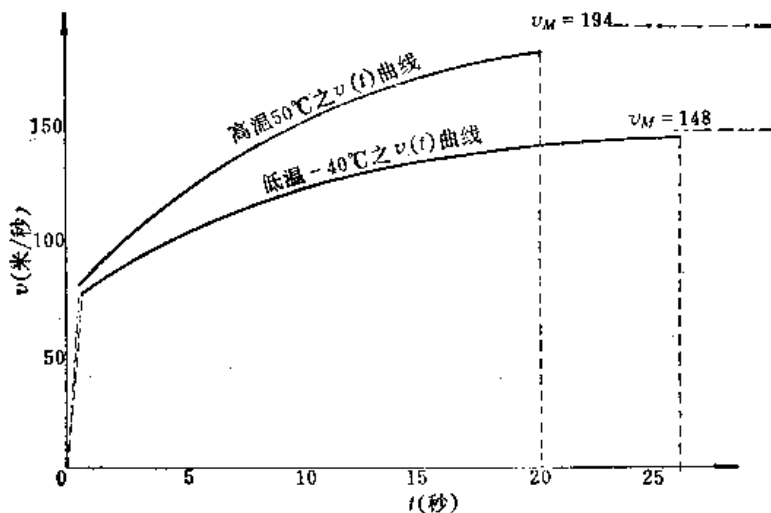


图3-7 高温和低温时的  $v-t$  曲线

### § 3-6 无动力水平飞行中的速度及行程

前两节中的分析都是针对着以火箭发动机为动力装置进行续航飞行的导弹。由于在发动机工作过程中，导弹的质量不断变化，所以宜采用相对质量  $\mu$  做为自变量，而不用时间  $t$  为自变量。

但是，若导弹做无动力的水平飞行，则导弹质量是不变的（仍不考虑导线放出的影响），这时，就仍然须以时间  $t$  为自变量。这样，运动方程就是

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{C_x S \rho v^2}{2} \quad (3-6-1)$$

分离变数得

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{C_x S \rho}{2m} \cdot dt$$

上式两边分别积分，初始条件是：当  $t=0$  时， $v=v_0$ ，于是可得

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{C_x S \rho}{2m} \cdot t \quad (3-6-2)$$

或经整理而得速度变化规律  $v(t)$

$$v = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{C_x S \rho t}{2m}} \quad (3-6-3)$$

将速度再对  $t$  积分一次即可得行程  $s = s(t)$ 。不过，从设计的角度来看，往往希望知道速度与射程的关系，这时可对方程（3-6-1）进行变量变换。由

$$ds = v dt \quad \text{或} \quad dt = \frac{ds}{v}$$

故有

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (v^2)$$

于是 (3-6-1) 式可改写为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (v^2) = -\frac{C_x S \rho}{2m} v^2$$

分离变数即得

$$\frac{d(v^2)}{v^2} = -\frac{C_x S \rho}{m} \cdot (ds)$$

两边分别积分, 初始条件是: 当  $s = s_0$  时,  $v = v_0$ , 结果可得

$$\ln \left[ \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] = -\frac{C_x S \rho}{m} (s - s_0) \quad (3-6-4)$$

或者得

$$v = v_0 \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{C_x S \rho}{m} (s - s_0) \right] \quad (3-6-5)$$

## § 3-7 导弹设计参数的分析及选择

### § 3-7-1 设计参数及其选定原则

前几节研究了以导弹的设计参数来计算它的飞行速度及行程的问题。在本节中, 要研究上述问题的逆命题, 或“反面问题”, 即根据预定的速度及射程要求, 来恰当地选择导弹的设计参数的问题。

导弹的速度及射程等等参数, 直接表征着导弹的性能, 可以称之为“性能参数”。

导弹的重量、直径、长度、发动机工作时间、发动机推力、推进剂重量等参数, 关系着导弹的结构特征, 是要在设计工作过程中恰当地确定下来的, 通常称之为“设计参数”。

关于“性能参数”和“设计参数”的区分, 不是绝对的。例如, “发动机推力”这个参数在导弹的总体设计中是一个“设计参数”, 而在发动机部件的设计工作中, 它就是一个“性能参数”。

在导弹设计工作中需要处理并确定的设计参数是很多的, 但是对导弹的性能有主要影响的却只是有限的几个, 它们被叫做“主要设计参数”。在设计工作中, 首先要辨明哪些参数是主要设计参数, 并应恰当地确定它们的数值。

当着眼点是要保证战术要求中的射程指标时, 那么直接决定着导弹射程的那些设计参数, 就是主要的设计参数。

哪些参数是主要设计参数, 这个问题还同导弹的总体方案及  $v-t$  图的情况有关。例如, 如果总体方案中规定了导弹要由无座力发射器赋予适当的炮口初速  $v_0$ , 那么, 这个炮口初速  $v_0$  显然对射程是有影响的, 在主要设计参数中就应包括它; 但在一般第一代反坦克导弹的总体方案中, 却没有这种发射器。因此, 在主要设计参数中也就不包括这一参数。再如, 若导弹在续航段上是等速飞行, 那么同导弹航程有关的参量将归结为飞行速度及时间



两个因素，这就是两个主要设计参数；但是，若导弹在续航段上是增速飞行，那么，主要设计参数就将增至五个〔即  $I_p$ 、 $n_0$ 、 $v_M$ 、 $\eta_0$  及  $\mu_E$ ，参考 (3-5-18) 式〕。

规定了主要设计参数之后，就可以对它们的数值进行选定。选定主要设计参数的原则是使导弹具有“最优”的性能。但是什么是“最优”？却不是绝对不变的。

通常，在初步设计中，导弹的起飞质量  $m_0$  是特别受重视的问题。在满足一定的射程条件之下，起飞质量较轻的导弹方案常常是更受欢迎的；因为较轻的导弹质量  $m_0$ ，总是意味着较大的携带机动性，并且常常也意味着较低的成本。因此，总是倾向于把“导弹起飞质量最小”做为“最优”的准则。

但是，这一要求不应是绝对的，往往还需要考虑到其它方面的战术技术要求。例如导弹飞过全射程所需的时间应该愈短愈好，然而这一要求往往同导弹初质量  $m_0$  最小的要求是矛盾的。还有其它的矛盾；事实上，选定设计参数的过程是充满矛盾的。真正最优的方案往往并不是导弹初质量最轻的方案，也不是飞行时间最短的方案，也不是只突出其它任一项指标而不顾别的方面性能的方案。真正最优的方案应该是在全面地分析了各种矛盾的相互关系之后，抓住主要矛盾，首先解决主要矛盾，并使次要矛盾得到合理解决的方法。

所以参数选定（或“选优”）的过程，实质上就是分析各个设计参数同性能参数之间的错综复杂的矛盾并找出合理解决这些矛盾的方法的过程。

在不同的具体条件之下，矛盾的具体情况也有不同，因此本章的结论并不是适用于一切反坦克导弹的，更不是适用于一切导弹的。所以，我们最好把重点放在分析矛盾的方法上。

但是，任何一种导弹的设计方法，特别是参数的分析及选定的方法，是十分灵活多样的。所以，本节的重点还并不是在于具体的方法，而是在于解决问题的观点和思路。

推广来说，几乎任何工程技术中的设计问题，本质上都是要解决某种“反面问题”，即适当地选定某个工程系统、某个器械、或某个元件的某些物理特征及几何特征，来满足某种预定的性能要求。这些问题的解决，通常比相应的“正面问题”的解决要复杂，而且解决方案不是唯一的，从而产生“选优”问题。

解决这些问题的方法，一种是凭经验试试看。这种方法的思路类似于用“逐次逼近法”来求解一个数学的方程组。这种方法的缺点是偶然性太大，很难做到“最优”，特别是对于复杂的工程系统（如导弹），工作量很大，而且往往改来改去还是不行，很难又快又好地完成设计任务。但是，这种方法的优点是直接了当，通过每一次试验和试算都能取得一定的经验，这种经验常常是十分宝贵的，尤其是在开始阶段，在任何经验都不具备的情况下，“试试看”的方法可能是唯一可行的方法。

除“试试看”的方法外，还有另一种方法，就是进行理论分析。也就是先建立设计对象运动过程的物理模型和数学模型，系统地研究设计对象的某些设计特征的变化对于其性能的影响关系，从中找出一定的规律；按照这些规律再反过来确定设计对象应该具有怎样的设计特征，这样的设计特征必能使对象满足预定的性能要求。这种方法的优点是显然的，利用这种方法常常能获得“最优”的方案，并且能充分地利用先进的研究工具如电子计算机。然而这种方法也有缺点，就是对于复杂的系统，由于影响其性能的因素很多，规律也很复杂，在建立模型时往往必须进行一些简化，这就可能导致结果不准确。

事实上，对于复杂的工程系统的设计问题，单纯的经验方法，或单纯的理论分析方法

都是行不通的。正确的方法只有一种，就是“理论与实践相结合”，就是以一定的经验为基础，进行必要的理论分析，以理论做为进一步的实践且取得更多的经验之指导，又以新的经验来对理论进行检验、校正及补充，如此循环反复直到问题完全解决。

### § 3-7-2 导弹设计参数的选择和优化的一般原理

在对导弹的设计参数进行选定及优化的过程中，通常都要进行重量分析及弹道分析这两方面的工作。

#### 一、重量分析和“目标函数”

所谓重量分析，是指要将导弹的重量同导弹各设计参数之间的关系分析清楚，建立起明确的函数关系。这个函数关系，一般说来，具有如下的形式：

$$m_0 = M(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3-7-1)$$

其中  $m_0$ ——导弹的初质量；

$x_i$ ——导弹的某个设计参数(共有  $n$  个)。

导弹的初质量  $m_0$  (或其全重  $m_0g$ ) 是我们在导弹设计工作中经常关心的一个性能参数。一般说来，参数选择工作的目标之一，往往就是要在满足战术技术要求中提出的射程、威力、命中率……等要求的条件下，使设计出来的导弹全重尽可能轻。因此，从这个角度来说，表达导弹重量的关系式(3-7-1)，可以被称为“目标函数”；使目标函数为最小就是“设计准则”，表为

$$\text{Min: } m_0 = M(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3-7-2)$$

然而上述的命题并不是绝对的。在实践中有时会遇到不止一个目标函数的情况，例如，有时要考虑飞行时间越短越好等等。有时几个目标函数之间存在矛盾，需要取得某种折衷的解决方案等等。

#### 二、弹道分析和“等式约束”

所谓弹道分析，就是说要把导弹的射程同导弹的设计参数之间的关系分析清楚，用数学式子表达出来。

导弹的射程  $x_m$  做为设计参数的函数，其一般形式是

$$x_m = X(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3-7-3)$$

或者，在战术技术要求中已经对于导弹的最大射程做出规定的情况下，应把上式改写成一个关于各设计参数  $x_i$  的方程式，其一般形式为

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_m = 0 \quad (3-7-4)$$

这个方程式就是弹道分析方程，或射程方程。它表明：为了满足战术要求中所规定的射程，在导弹的各设计参数之间应具有的必要条件。这个条件就是一种“等式约束”。

显然，只要  $n \geq 2$ ，总可能找出无穷多的导弹设计参数点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，满足射程方程(3-7-4)。这样的设计参数点的集合可表为

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | X(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_m = 0\}$$

在这个满足射程条件(3-7-4)的设计参数点集合中包含了无穷多的点，其中每一个点都代表着一个恰好满足预定的射程要求的导弹参数方案。

#### 三、参数“选优”原理

如果，再没有其它的补充约束了，那么，进行参数选择的目的是从上述满足等式

约束(3-7-4)的参数点集合中选出一个特定的参数点来,使得目标函数(3-7-1)最小。即

$$\begin{cases} \text{Min: } m_0 = M(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ X(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_m = 0 \end{cases}$$

这就是通常所说的“选优”。

然而,有时问题的提法也可能是恰好倒过来。即约束条件是导弹的质量为一定,在此条件之下选择参数,使导弹的射程最远。这时,数学模型可表为

$$\begin{cases} \text{Max: } x_m = X(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ M(x_1, x_2, \dots, x_n) - m_0 = 0 \end{cases}$$

这两种数学模型反映着两类设计任务。但是,不难相信,如果按前一种数学模型已经优选出一个参数点,相应的具有一个最小的导弹质量 $m_0$ ;那么,再以此 $m_0$ 做为预定的导弹质量用来形成后一种数学模型中的等式约束,对后一种数学模型进行选优,结果选出的参数点同前一次选出的应该是同一个,并且相应得到的最大的导弹射程 $x_m$ 也就是前一回在等式约束中所预定的射程。这就是优选法中的“对偶”原理。

在本章中,我们将只按前一种数学模型来讨论,即限制导弹的射程为预定值,使导弹的初质量最轻。

#### 四、“等式约束”和“不等式约束”

然而,事实上,除了射程和重量这两个因素之外,还可能存在着许多非常实际的因素,必须在参数选择时予以考虑。例如,对导弹飞行时间的限制,对导弹的续航段最小速度及最大速度的限制,对导弹的空气动力特征的某些特别要求等等,这些要求或限制都可以用一定的数学关系来表达,它们都对参数的选择形成一定的“约束”,有些是“等式约束”,有些则是“不等式约束”。

例如,假如必须限制导弹飞行的最大速度不得超过某个预定的最大值 $v_{\max}$ ,即

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq v_{\max} \quad (3-7-5)$$

这就是一个“不等式约束”。

不等式约束和等式约束的区别是很重要的。简单地说明如下:假如,所考虑的系统只有两个设计参数 $x_1$ 及 $x_2$ ,即可将它们做为两个坐标,如图3-8,那么一个等式约束

$$h(x_1, x_2) = 0 \quad (3-7-6)$$

在图上就可表示为一条曲线,只有位于这条曲线上的点 $(x_1, x_2)$ 才有可能成为待选方案。然而一个不等式约束

$$g(x_1, x_2) \geq 0 \quad (3-7-7)$$

在此图上则可表示为一个以 $g(x_1, x_2) = 0$ 为边界的区域,在此区域之外的点都被排除在外,只有区域之内的点才是待选点。在这个例子中,在两种约束并存的情况下,只有位于 $h(x_1, x_2) = 0$ 曲线上的A、B两点之间的诸点,才是可能的方案。

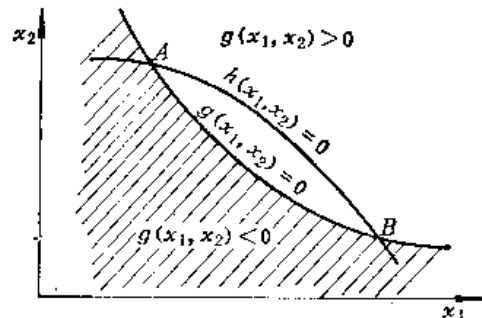


图3-8 具有两个设计参数的系统的约束条件

## 五、关于独立参数的数目

在各种工程系统（包括导弹系统）的参数选择工作过程中，有一个普遍的法则是要注意的，就是，设计参数的数目不能少于“等式约束”的数目。事实上，每一个独立的参数都可看做是设计中的一个自由度； $n$ 个独立参数就代表了 $n$ 个设计自由度。同时，每一个等式约束都是加给这些参数的一个限制条件，都能消去一个独立参数，也就是消去一个自由度。如果设计参数的数目为 $n$ ，等式约束的数目为 $n-1$ ，那么，独立参数或设计自由度的数目就是 $n-(n-1)=1$ ，在这一个自由度的范围内，通常仍可进行参数的“优化”。如果等式约束也是 $n$ 个，那末，设计自由度就是零，这时，满足这些约束的解就是唯一的，设计参数仍是确定的，但是已不存在选优问题。再进一步，如果等式约束超过 $n$ 个，那么在一般情况下，系统无解；这种情况说明我们对设计参数的分析和规定可能是不恰当的。或者，对于该系统所提出的技术要求是不合理的，以致不可能实现。

## 六、关于不等式约束的相容性

通常，对于不等式约束的数目并无严格规定，但是，有时会出现几个不等式约束之间互不相容的情况，或者它们同等式约束之间也互不相容的情况，从而导致系统无解。这种情况需要注意。仍以具有两个设计参数 $x_1$ 及 $x_2$ 的系统为例，假如等式约束 $h(x_1, x_2)=0$ 的图解曲线整个位于不等式约束 $g(x_1, x_2)<0$ 的不可行区域内（如图3-9, (a)）；或者，两个不等式约束 $g_1(x_1, x_2)\geq 0$ 及 $g_2(x_1, x_2)\geq 0$ 的不可行区域互相覆盖了可行区域（如图3-9, (b)）；那么，显然这个系统就是无解的。无解的系统就是不可行的系统，就是说，不论选择怎样的参数都不可能全面满足预定的性能要求。如果出现这种情况，那就说明，战术技术要求的诸规定是不合理的；或者，在现有技术条件下，所提出的战术要求是不可能实现的。因此，没有一个方案能够全面满足这些条件和要求。这时，就需要改变战术要求和技术条件，或者从根本上考虑采用更先进的技术措施，那就要对设计方案做大的改动，并重新建立数学模型。

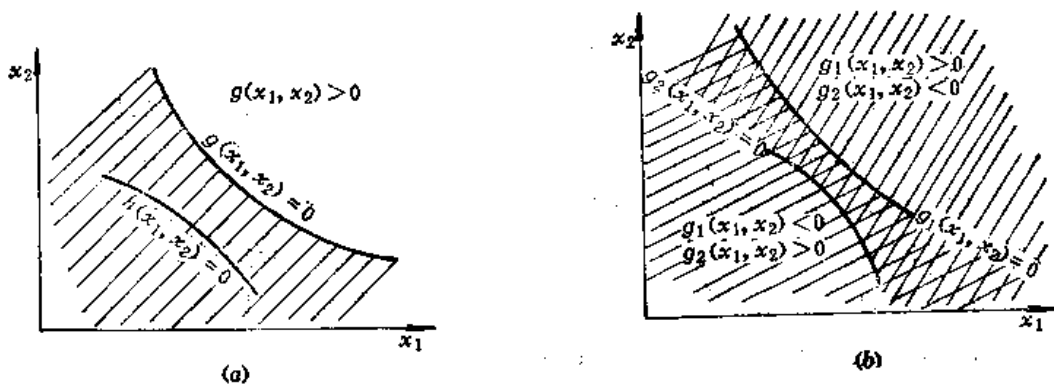


图3-9 约束不相容的系统

设计参数的选择和优化问题，在建立数学模型之后，往往需要用电子计算机来求解。然而在对问题进行简化之后，也可能用解析方法求得解答。

### § 3-7-3 续航段等速飞行的反坦克导弹的设计参数的选定

第一代早期的反坦克导弹都是在续航段上等速飞行的。某些比较先进的反坦克导弹（如斯文费厄和霍特）也是这样的。

在续航段为等速飞行的情况下，设计参数的选定问题较为简单。

### 一、弹道分析

首先进行弹道分析。导弹的射程是由起飞段和续航段两段弹道的水平行程相加而得的。但是起飞段行程一般只有几十米，约占全射程的 1% 左右，可不予考虑。于是认为续航段的行程即可代表导弹的射程。然而，在续航段为等速飞行的情况下，续航段行程可简单地表为

$$s_E = v t_E \quad (3-7-8)$$

于是，射程即可表为

$$x_m = v t_E \quad (3-7-9)$$

由于在射程中未计入起飞段，这样就给设计工作带来一点后备裕量，事实上，为了在设计工作中留有较大的余地，还可以在战术要求所规定的射程之上再增加一点后备裕量。由式 (3-7-9) 可知，同射程有关的设计参数只有两个——续航速度  $v$  及续航时间  $t_E$ ，它们就可被当做主要设计参数。在给出最大射程  $x_m$  的具体数值之后，弹道分析的关系式 (3-7-9) 就是设计中的主要的“等式约束”。设计参数的数目  $n = 2$ ，等式约束数为 1，于是我们有一个设计自由度。

### 二、重量分析

其次进行重量分析，来看导弹的初质量  $m_0$  同主要设计参数之间有什么关系。

可以把导弹的起飞初质量  $m_0^0$  分成许多部分如下：

$$m_0^0 = m_p + m_T^0 + m_C^0 + m_T + m_C + m_s \quad (3-7-10)$$

其中  $m_p$ ——战斗部及弹上制导组件的质量，或称有效载荷；

$m_T^0$ ——起飞发动机中推进剂的质量；

$m_C^0$ ——起飞发动机壳体的质量；

$m_T$ ——续航发动机中推进剂的质量；

$m_C$ ——续航发动机壳体的质量；

$m_s$ ——弹翼、各仓段壳体、联结件及其他一切弹体结构件的质量。

在战斗部质量中应包括：引信、战斗部壳体及风帽、药型罩、隔板及炸药等重量。它的具体数值应由战斗部研制单位给出；事实上，这一数值是由战术要求中关于破甲威力的要求所决定的，对于总体设计来说，可将它视为一个原始数据。

在控制部件的质量之中应包括：陀螺、舵机、传递信号的导线、弹上接收机及译码器、曳光装置、弹上辅助能源及其他附件的质量。这一部分质量主要同射程有关，在射程一定的情况下，这部分质量也可确定。它的具体数值，应与制导系统研制单位协商确定。在制导系统正处于研制过程中的情况下，这些重量可以参照过去的经验初步估定。所以，这也是一个原始数据。

在战斗部及弹上控制组件的质量已定的情况下，有效载荷  $m_p$  即为已知的原始数据。

起飞发动机中推进剂的质量  $m_T^0$ ，将在起飞段终点处烧尽，并使导弹获得速度  $v_E^0$ 。假定导弹是从静止条件下起飞的，则由理想速度公式 (3-2-10) 可知

$$v_E^0 = -g I_E^0 \ln \mu_E^0 = -g I_E^0 \ln \left( 1 - \frac{m_T^0}{m_0^0} \right)$$

并由式 (3-2-31) 可知

$$m_T^0 = m_0^0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{v_E^0}{g I_s^0} \right) \right]$$

在一般情况下, 起飞段终点就是续航段起点, 即  $v_E^0 = v_0$ , 于是可有

$$\frac{v_E^0}{g I_s^0} = \frac{v_0}{g I_s} \left( \frac{I_s}{I_s^0} \right) = v_0 i \quad (3-7-11)$$

其中  $i = \frac{I_s}{I_s^0}$ , 为续航发动机比推力同起飞发动机比推力之比值, 又是一个无量纲的参数。在一般情况下  $I_s \neq I_s^0$ , 并经常是  $I_s < I_s^0$ 。这是因为, 有时需要借助续航发动机的燃气流来产生舵控力, 或者分出一部分气体去推动舵机, 续航发动机中的药柱往往有较厚的包复层随火药一同烧掉……等等消极因素, 从而使得折算出来的续航发动机比推力  $I_s$  往往远较起飞发动机比推力  $I_s^0$  为低, 故通常  $i < 1$ 。有了  $v_0$  及  $i$  这两个参数后, 就可把起飞推进剂质量  $m_T^0$  表达为

$$m_T^0 = m_0^0 [ 1 - \exp(-v_0 \cdot i) ] \quad (3-7-12)$$

注意, 这时就可把导弹的起飞初质量写成

$$m_0^0 = m_T^0 + m_E^0$$

其中  $m_E^0$  是导弹在起飞段终点的质量, 但是它也就是续航段起点的质量  $m_0$ , 故

$$m_0^0 = m_T^0 + m_0 \quad (3-7-13)$$

将 (3-7-12) 代入到 (3-7-13) 中, 就可有

$$m_0^0 = m_0^0 [ 1 - \exp(-v_0 i) ] + m_0$$

整理后即得

$$m_0^0 = m_0 \cdot \exp(v_0 i) \quad (3-7-14)$$

这个式子很有用。因为导弹的最大射程基本上就是它在续航段上的行程; 因此, 导弹在续航段起点的质量  $m_0$  同导弹的最大射程之间的关系更为密切和直接。只需分析这个  $m_0$  同最大射程的关系, 然后借助 (3-7-14) 式, 就可很容易地换算成导弹的起飞初质量  $m_0^0$ ; 或者不换算也无妨, 因为它们之间只有简单的因子  $\exp(v_0 i)$ , 其关系是一目了然的。

利用式 (3-7-14) 还可将 (3-7-12) 式改写成

$$m_T^0 = m_0 (\exp(v_0 i) - 1) \quad (3-7-15)$$

下面就只需注意续航初质量  $m_0$ , 可把它分解为许多部分如下:

$$m_0 = m_p + m_C^0 + m_T + m_C + m_s \quad (3-7-16)$$

注意: 在大型导弹中, 起飞发动机的壳体, 在其中推进剂烧尽之后, 往往被丢下; 但在反坦克导弹中, 却总是携带着起飞发动机的空壳体飞行。

对于起飞发动机壳体的重量  $m_C^0$ , 可以有很多种分析方法。在这里可以简单地认为,  $m_C^0$  主要是决定于它所装入的推进剂重量, 即可用下式表达:

$$m_C^0 = K_1 \cdot m_T^0 \quad (3-7-17)$$

这里的系数  $K_1$ , 应根据发动机的构造特点及研制的实际水平, 由经验统计确定。

当然, 也可能进行更严密的分析而推导出更复杂的  $m_C^0$  的表达式。  $m_C^0$  的大小很可能同起飞推力的大小有更密切的关系, 而同发动机工作时间的长短之间则具有某种非线性的关系。但是, 在初步设计工作中, 由于许多因素都在待定之中, 若对于某个细节问题进行过

分复杂的分析，这种分析的实际意义往往是令人怀疑的。这样做不仅不会提高计算的精确程度，反而可能掩盖了主要矛盾。所以，暂且满足于 (3-7-17) 这样简明的关系式，或者采用“逐次逼近”法，在总体方案大局已定之后，再来第二次求算  $K_1$  之值，并将整个方案重算一遍，也可解决这一问题。

利用 (3-7-15) 又可将 (3-7-17) 式改写成：

$$m_c^0 = m_0 (\exp(v_0 t) - 1) \cdot K_1 \quad (3-7-18)$$

对于 (3-7-16) 中的另一项，续航推进剂的重量  $m_T$  又应如何分析？显然， $m_T$  应满足续航发动机的推力及工作时间两方面的要求，即

$$m_T = \frac{F t_B}{g I_s} \quad (3-7-19)$$

其中， $t_B$  是同射程有关的主要设计参数；而续航推力  $F$  也应满足对续航速度的要求，即应使

$$F = \frac{C_x S \rho v^2}{2} \quad (3-7-20)$$

于是，应使

$$m_T = \frac{C_x S \rho v^2 t_B}{2 I_s g} \quad (3-7-21)$$

下面对于续航发动机壳体的重量也可简单表为

$$m_c = m_T \cdot K_2 \quad (3-7-22)$$

对于弹体结构重量，则可表为

$$m_s = K_3 \cdot m_0 \quad (3-7-23)$$

这时，可将式 (3-7-18)、(3-7-21)、(3-7-22) 及 (3-7-23) 代入 (3-7-16) 中，进行整理，即可得到重量分析关系式如下：

$$m_0 = \frac{m_p + (1 + K_2) \frac{C_x S \rho v^2}{2 I_s g} t_B}{1 - K_1 (\exp(v_0 t) - 1) - K_3} \quad (3-7-24)$$

这个重量分析关系式所说明的是在一定的结构条件下，导弹的初质量  $m_0$  同各因素的关系。具体的就是：

第一，有效载荷  $m_p$ （决定于战斗部质量及控制组件质量）与全弹初质量  $m_0$  成正比；  
第二， $m_0$  与导弹的结构条件、工艺水平有关，这些因素决定着系数  $K_1$ 、 $K_2$  及  $K_3$ ；这些系数愈大，导弹的全弹初质量  $m_0$  就愈大；

第三，续航发动机比推力  $I_s$  及起飞发动机比推力  $I_0^*$  愈大时，全弹初质量  $m_0$  就愈小；

第四，导弹的续航速度  $v$  及续航时间  $t_B$  愈大，则导弹的续航初质量  $m_0$  愈大；但应注意，其前提是并未限定导弹的射程。

### 三、参数选定

若是在规定导弹射程的前提下来考查导弹重量的问题，则应将弹道分析关系式 (3-7-9) 同重量分析关系式 (3-7-24) 联立起来。

将 (3-7-9) 式改写成

$$t_E = \frac{x_m}{v} = \frac{x_m}{v_0} \quad (3-7-25)$$

然后代入(3-7-24), 从中消去一个非独立参量  $t_E$ , 整理后即可得到

$$m_0 = \frac{m_v + (1 + K_2) \frac{C_x S \rho}{2} v_0 x_m}{1 - K_3 - K_1 [\exp(v_0 t) - 1]} \quad (3-7-26)$$

于是可知, 在导弹的最大射程  $x_m$  已由战术要求所规定, 并且导弹的其它结构条件皆已确定的条件下, 导弹的续航初质量  $m_0$  将只决定于一个参量  $v_0 = \frac{v}{I, g}$ ,  $v_0$  愈大 (即速度愈大) 则  $m_0$  也应愈大, 并且是单调增大的关系。

通常, 在战术要求中对飞过一定射程所需续航时间的要求是, 这个续航时间愈小愈好。但是由弹道分析 (3-7-25) 知道, 这就必须使续航速度增大才行。然而续航速度的增大又导致导弹全重  $m_0$  的增加, 有时还导致操纵的困难。这时, 如果能够用图表把这些矛盾之间互相影响制约的关系明显地表示出来, 那就方便多了。

于是, 可以在射程  $X_m$  为规定值的前提下, 把速度  $v$  (或其无量纲值  $v_0$ ) 做为自变量; 按照式 (3-7-26), (3-7-14) 及 (3-7-25) 算出导弹的续航初质量  $m_0$ 、起飞初质量  $m_0^0$  及续航时间  $t_E$  的变化情况, 并把它们画成图线 (见图 4-7-3)。

导弹的续航速度  $v$  还决定着所需的导弹续航推力  $F$

$$F = \frac{C_x S \rho v^2}{2} \quad (3-7-27)$$

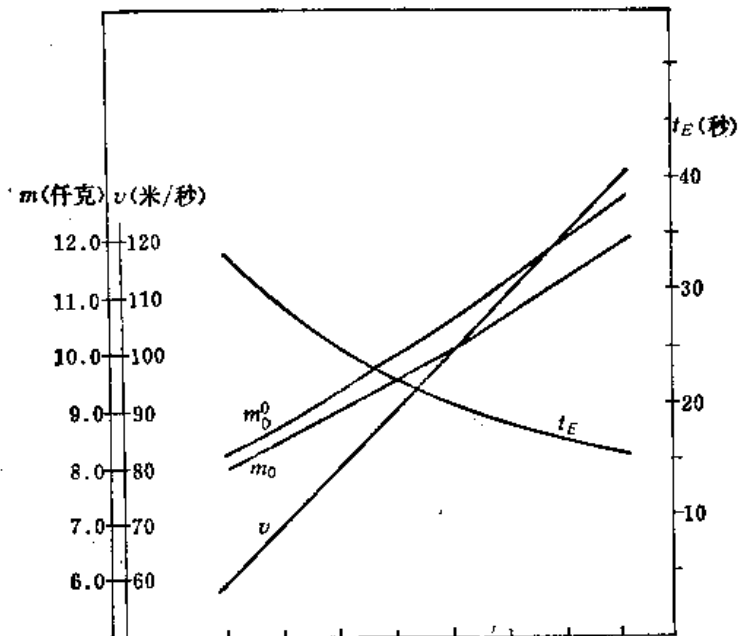


图3-10 等速飞行的导弹的设计参数选择用图

关于其中的空气阻力系数  $C_x$ , 考虑到导弹在飞行中具有一定的攻角, 从而具有一定的诱导阻力, 故应有

$$C_x = C_{x,0} + C_{x,i}$$

在初步设计中一般可取  $C_x = 1.5 C_{x,0}$  来计算 (为什么要恰好取 1.5 这个乘数? 这个问题将



在第七章中讨论说明)。

**例题 3-11** 若战术技术要求规定了反坦克导弹的最大射程  $x_m=2000$  米; 此外, 给出了战斗部及控制部件质量共为  $m_p=4.52$  千克; 发动机的比推力  $I_r=200$  秒, 起飞发动机比推力同续航发动机比推力相同, 即  $i=1$ ; 结构系数为  $K_1=2.68, K_2=2.16, K_3=0.167$ ; 导弹的阻力特征  $C_x S \rho=0.0153$  千克/米。

试分析导弹各设计参数之间的关系, 并选择设计参数。

**解** 将已知数据代入 (3-7-26) 式, 得

$$m_0 = \frac{m_p + (1 + K_2) \frac{C_x S \rho x_m}{2} v_0}{1 - K_3 - K_1 (e^{v_0 t} - 1)} = \frac{4.52 + (1 + 2.16) \times \frac{1}{2} \times 0.0153 \times 2000 \times v_0}{1 - 0.167 - 2.68 (e^{v_0 t} - 1)}$$

$$= \frac{4.52 + 48.3 v_0}{0.833 - 2.68 (e^{v_0 t} - 1)} \text{ [千克]} \quad (3-7-28)$$

做计算表如下:

$v_0$	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05	0.055	0.06
$e^{v_0 t}$	1.0304	1.0356	1.0408	1.0460	1.0513	1.0565	1.0618
$m_0$ [千克], 按式 (3-7-28)	7.942	8.420	8.916	9.431	9.971	10.529	11.115
$m_0^0 = m_0 e^{v_0 t}$ (千克)	8.183	8.720	9.280	9.865	10.483	11.124	11.802
$v = v_0 I_r g$ (米/秒)	58.9	68.67	78.48	88.29	98.10	107.91	117.72
$t_E = 2000/v$ (秒)	33.96	29.12	25.48	22.65	20.39	18.53	16.99

将上表所列数据绘为图线, 即图 3-10。由图可知, 随着设计参数  $v_0$  的增大, 导弹的续航速度  $v$  增大, 并且导弹的初质量  $m_0^0$  也增大, 然而续航时间  $t_E$  则缩短了。这时, 参数的选择准则就不应是单纯的“重量最轻”或“飞行时间最短”, 而必须是综合的考虑, 特别是要考虑到若速度太大就可能给射手的操作带来困难的情况。因此, 可以考虑选取  $v_0=0.045$ ,  $m_0=9.43$  千克,  $m_0^0=9.86$  千克,  $v=88.3$  米/秒,  $t_E=22.6$  秒做为初步设计的方案。

#### § 3-7-4 续航段加速飞行的反坦克导弹的设计参数的选定

为了使反坦克导弹在续航段上便于操纵, 希望它的续航速度不要太大, 尤其是在续航的初始段上, 这时射手要把导弹导入瞄准线, 往往要操纵导弹进行较大的机动。然而, 为了使反坦克导弹飞过全射程所需的时间尽量短, 又希望它的续航速度尽可能大一些。为了解决这个矛盾, 就出现了在续航段上加速飞行的反坦克导弹。它的性能可能是良好的, 但是弹道分析及参数选择的工作将更复杂一些。

##### 一、重量分析

对于在续航段为加速飞行的反坦克导弹, 进行重量分析的方法大体上与等速飞行的情况相似。只是需要注意不可引入任何同等速飞行条件有关的分析式, 例如, 式 (3-7-20)、(3-7-21) 及 (3-7-24) 都应适当改动。

在加速飞行条件下, 续航推力  $F$  决定着临界速度  $v_M$ , 故 (3-7-20) 应改为

$$F = \frac{C_x S \rho}{2} (v_M)^2 \quad (3-7-29)$$

于是, 续航装药质量  $m_T = \frac{F I_E}{g I_r}$  可写为

$$m_T = \frac{C_x S \rho (v_M)^2 t_E}{2 I_r g} \quad (3-7-30)$$

然后, 将式 (3-7-30) 及 (3-7-18)、(3-7-22)、(3-7-23) 代入到 (3-7-16) 式中, 并进行整理, 即可得下面的重量分析式:

$$m_0 = \frac{m_p + (1 + K_2) \frac{C_x S \rho (v_M)^2 t_E}{2 I_r g}}{1 - K_1 [\exp(v_0^2) - 1] - K_3} \quad (3-7-31)$$

或用无量纲参数  $v_M$  代替  $v_M$ , 可将上式改写为

$$m_0 = \frac{m_p + (1 + K_2) \frac{C_x S \rho g I_r t_E}{2} (v_M)^2}{1 - K_1 [\exp(v_0^2) - 1] - K_3} \quad (3-7-32)$$

在已知导弹外形尺寸及其阻力特征  $C_x S \rho$  的情况下, 利用上式进行重量分析是方便的。但是在导弹的设计参数及重量尚未确定的情况下, 导弹的外形及阻力特征往往也是难于确定的。所以要利用另一种方法来分析导弹的重量。

不用式 (3-7-30), 而建立下式

$$m_T = m_0 (1 - \mu_E) \quad (3-7-33)$$

将 (3-7-33) 及其他有关各式代入 (3-7-16) 式中, 整理后可得:

$$m_0 = \frac{m_p}{\mu_E (1 + K_2) - K_3 - K_1 [\exp(v_0^2) - 1]} \quad (3-7-34)$$

这里需说明以下几点:

第一, 导弹的续航初质量  $m_0$  同有效载荷  $m_p$ 、结构系数  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$  及比推力  $I_r$ 、 $I_r^0$  的关系, 类似于前面对等速续航情况下的 (3-7-24) 式的分析;

第二, 导弹的无量纲续航初速  $v_0$  愈大, 则  $m_0$  愈大;

第三, 导弹续航段上的结构比  $\mu_E$  愈小 (即装推进剂愈多), 则  $m_0$  愈大。在给定有效负载  $m_p$ 、结构系数  $K_0$ 、 $K_1$ 、 $K_2$  及比推力  $I_r$ 、 $I_r^0$  的情况下, 按式 (3-7-34) 可以做出重量分析图, 即  $m_0$  对于  $\mu_E$  及  $v_0$  的关系曲线, 如图 3-11。

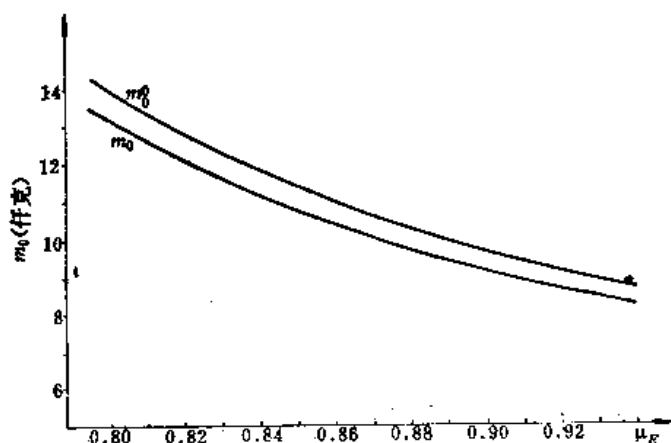


图3-11 续航段加速飞行的导弹的重量分析图

## 二、弹道分析

对于在续航段上加速飞行的反坦克导弹，其最大射程  $X_m$  仍然可按续航段行程  $s_E$  来近似计算。不计入起飞段的行程，将使实际射程略为偏大，从而给设计工作留下一点余地。即认为

$$x_m \approx s_E = \frac{I_r^2 g}{n_0} v_M [C - \mu_E C'] \quad (3-7-35)$$

在战术要求中已经规定了导弹最大射程的情况下， $x_m = \text{常数}$ ，于是，上式即是诸设计参数  $I_r$ 、 $n_0$ 、 $v_M$ 、 $\mu_E$  及  $v_0$ （通过  $C$  及  $C'$ ）之间的一个方程式，即“等式约束”。或写成

$$\frac{I_r^2 g}{n_0} v_M [C - \mu_E C'] - x_m = 0 \quad (3-7-36)$$

## 三、参数选择

### （一）根据预定的射程要求来选择参数

在射程要求已经确定的前提下，参数选择工作应该从弹道分析关系式（3-7-36）入手。

在等式约束（3-7-36）所包含的五个参数之中，其实有些参数是很少有选择余地的。如比推力  $I_r$ ，完全可以根据所选用的推进剂牌号及发动机研制水平等条件初步确定；再如续航初速参数  $v_0 = \frac{v_0}{I_r g}$ ，可以根据续航初始段上的操纵性能来初步确定（参考第六章）。于是，只剩下三个参数  $n_0$ 、 $v_M$  及  $\mu_E$  有待选择了。在这三个参数之间还有一个等式约束（3-7-36），于是只剩有两个自由度。

这两个自由度意味着可以对两个参数做任意的选择。例如，可对  $v_M$  及  $\mu_E$  做任意的选择，即在  $v_M - \mu_E$  坐标平面上的任何一点  $(v_M, \mu_E)$  都代表一个可能的方案。只要按等式约束（3-7-36）算出适当的  $n_0$ ，那么，这样确定的参数点的集合

$$\left\{ (v_M, \mu_E, n_0) \mid \frac{I_r^2 g}{n_0} v_M (C - \mu_E C') - x_m = 0 \right\}$$

就能保证导弹满足预定的射程要求。反过来说，即一切满足预定射程的导弹参数方案，都已包含在上述集合之内。

所以，参数选择的任务，现在就成为从上述集合所包含的无穷多方案点之中，选出“最优”的方案点。在这里，“最优”的含意首先应是全面地满足对导弹的战术技术要求。

事实上，在满足预定射程的导弹参数点的集合之中，每一个参数点在其它方面的性能（如重量和飞行时间）都是不同的，特别是，有些参数点在技术上可能是根本无法实现的。因此，必须全面地考察各种性能参数同设计参数之间的关系，每一个关系都可能对参数的选择形成一个新的约束。

### （二）根据飞行时间来选择参数

首先，应该考察续航飞行时间  $t_E$ （近似地代表全程飞行时间）同各设计参数之间的关系。

由于

$$F \cdot t_E = m_T g I_r = m_0 (1 - \mu_E) g I_r$$

故

$$t_E = \frac{(1 - \mu_E)}{n_0} I_r \quad (3-7-37)$$

按此式可由参数  $\mu_E$ 、 $n_0$  及  $I_r$  来计算续航时间；反过来，若是指定某个飞行时间  $t_E$ ，那么，上式就形成了一个对于各设计参数的等式约束。

将此 (3-7-37) 式同弹道分析关系式 (3-7-36) 联立起来，可消去一个自由的设计参数。具体做法，最好是先从 (3-7-37) 中解出  $n_0$ 。

$$n_0 = (1 - \mu_E) \frac{I_r}{t_E} \quad (3-7-38)$$

代入弹道分析关系式 (3-7-36) 中，于是得到

$$v_M \cdot I_r g t_E \cdot \frac{C - \mu_E C'}{1 - \mu_E} - x_m = 0 \quad (3-7-39)$$

在此式中有两个待定的设计参数  $v_M$  及  $\mu_E$ ，可任意地选定一个参数，另一个即可由上式算出。因此，只剩下一个自由参数了。

在这种情况下，仍然可以获得无穷多的方案，它既满足指定的射程  $x_m$  又满足指定的飞行时间  $t_E$ 。其中每个方案都可用  $v_M - \mu_E$  平面上的一个点来代表，全部可能方案则组成为  $v_M - \mu_E$  平面上的一条曲线。此曲线符合于方程式 (3-7-39)。

然而式 (3-7-39) 是关于  $v_M$  及  $\mu_E$  的复杂非线性方程（因为在  $C$  中隐含  $v_M$ 、在  $C'$  中隐含  $v_M$  及  $\mu_E$ ）。因此，只能用数值法求解。在例题中，将用图解法近似求解（参见图3-12及3-13）。

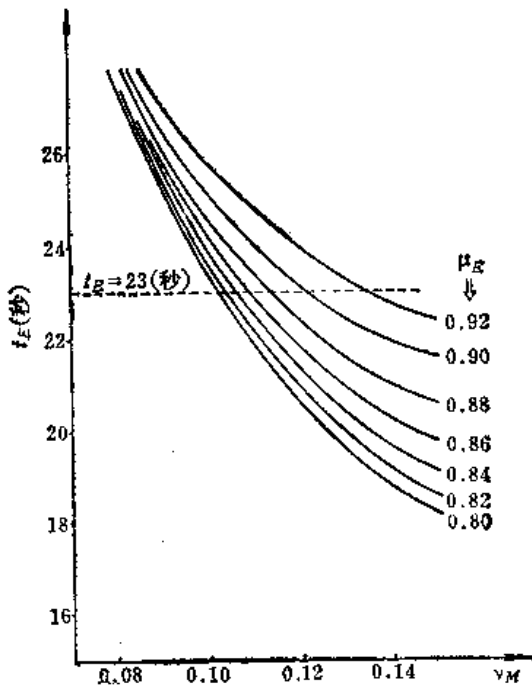


图3-12 在满足预定射程的前提下，飞行时间  $t_E$  对于设计参数  $v_M$ 、 $\mu_E$  之关系

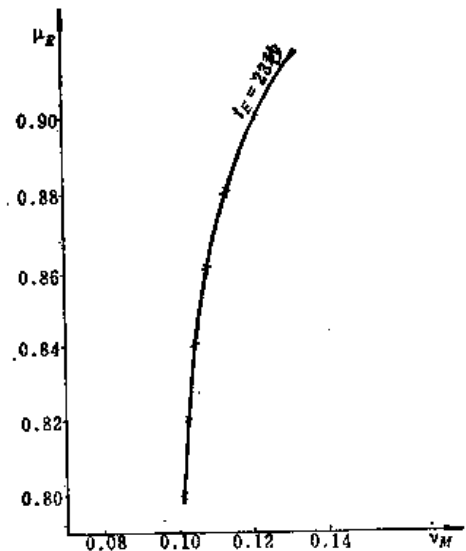


图3-13 在  $v_M - \mu_E$  平面上的飞行时间  $t_E$  等高线

### (三) 按空气动力性能的可行性来选择参数

其次，还应该考察导弹的空气阻力特征同设计参数的关系。导弹的空气阻力特征显然对其飞行性能有重要的影响。因此，它事实上同导弹的主要设计参数有密切的关系。然而，在设计工作中是不能随心所欲地确定导弹的空气阻力特征的。一方面，不可能任意地减小

导弹的空气阻力；另一方面，又不应该任意地增大它的空气阻力。因此，如果没有考虑这个因素而任意地选定了一组设计参数，那么，按照这些参数设计出来的导弹很可能具有不恰当的空气阻力特征。

在反坦克导弹的各设计参数中， $v_M$  这个参数同导弹的空气阻力特征直接有关

$$v_M = \sqrt{\frac{2F}{C_x S \rho}} \cdot \frac{1}{I_s g} \quad (3-7-40)$$

或改写如下

$$(v_M)^2 = \left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right) \frac{n_0}{I_s^2 g} \quad (3-7-41)$$

由此可知，在诸参数  $v_M$ 、 $n_0$  及  $I_s$  之间，通过组合参量  $\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)$  而存在着关系式(3-7-41)，这个关系式也是对参数选择的一个约束。

组合参量  $\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)$  具有“长度”的量纲，事实上，这个参量同导弹的射程有密切的关系。对于一类反坦克导弹来说，射程  $x_m$  同此参量之比值近于 1；对于其它各类导弹来说，此参数同该类导弹的射程之比将取不同的值，但在本类之内总是保持相对稳定的。关于这一点，简要说明如下：

导弹的空气动力特征包括了阻力和升力两个方面，两者是相互联系的。通常把导弹的举力系数  $C_y$  对其阻力系数  $C_x$  的比值称为“升阻比”  $R$

$$R = \frac{C_y}{C_x} \quad (3-7-42)$$

我们常常希望所设计的飞行器的升阻比  $R$  大一点，但是实际上却不可能任意地增大它。对于大多数反坦克导弹来说，在水平飞行的条件下，升阻比很难超过  $R \approx 3$  (参阅第七章)。

但是在水平飞行的条件下，若暂不考虑导弹的推力及舵上控制力的铅直分量的影响，就应使导弹的空气动力升力  $Y$  恰好与导弹本身的重量  $mg$  相平衡，即应有

$$mg = Y = \frac{1}{2} C_y S \rho v^2 \quad (3-7-43)$$

然而，考虑到升阻比  $R$  大约是定值，即应有  $C_y = RC_x$ ，故上式可改写为

$$mg = \frac{1}{2} RC_x S \rho v^2$$

或

$$\frac{2m}{C_x S \rho} = \frac{Rv^2}{g} \quad (3-7-44)$$

若以续航段起点处的数据为准，则有

$$\frac{2m_0}{C_x S \rho} = \frac{R(v_0)^2}{g} \approx \text{常数} \quad (3-7-45)$$

这就是说，在实际的反坦克导弹构造条件下，由于续航初速  $v_0$  已基本确定，并且升阻比  $R$  大体是常数，那么  $\frac{2m_0}{C_x S \rho}$  也必然要大体上保持为常数。

于是，将 (3-7-45) 式代入 (3-7-41) 式中，就形成了一个对参数选择的等式约束。

注意，虽然方程 (3-7-41) 是对于参数  $v_M$  及  $n_0$  的约束，但为了一目了然，最好把这个约束式在  $v_M-\mu_E$  平面上表现出来。这是可以做到的，因为，我们已经认为，在  $v_M-\mu_E$  坐标平面中的每一点都属于满足预定射程  $x_m$  的参数点集合

$$\left\{ (v_M, \mu_E, n_0) \mid \frac{I_s^2 g}{n_0} v_M (C - \mu_E C') - x_m = 0 \right\}$$

所以，其中的每一点  $(v_M, \mu_E)$  都相应地具有一个符合于式 (3-7-36) 的参数  $n_0$  之值。因此，要想把约束式 (3-7-41) 绘入  $v_M-\mu_E$  平面，只须把它同 (3-7-36) 式联立起来，并从中消去参数  $n_0$ ，即可转化为对于  $v_M$  及  $\mu_E$  参数的约束式。于是，由 (3-7-36) 及 (3-7-41) 联立可得下式

$$\mu_E = \frac{1}{C'} \left[ C - \frac{v_M x_m}{\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)} \right] \quad (3-7-46)$$

注意，这是一个关于参数  $v_M$  及  $\mu_E$  的非线性方程（由于在积分常数  $C$  及  $C'$  中隐含有  $v_M$  及  $\mu_E$ ），虽然原则上可以表示为  $v_M-\mu_E$  平面中的一条曲线，但具体的解法还是有些周折的。在下面的例题中，将用逐次逼近法解约束方程 (3-7-46)。

还需说明一点，与其把 (3-7-46) 式看做是等式约束，不如把它看做是不等式约束。这是因为，设计者很难任意地增大导弹的升阻比  $K$ ，却能够人为地适当减小它（虽说对性能不利）；因此，在设计工作中也可以做到人为地适当减小组合参量  $\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)$  之值。若是对于一个预定的最大可能的  $\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)$  之值，按约束式 (3-7-46) 在  $v_M-\mu_E$  平面上绘出了一条曲线；那么，再给出一些较小的  $\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)$  值，就能绘出另一些曲线。在这些曲线所占据的区域中的参数点都是在空气动力性能上保证可以实现的可行点，这个区域就是可行区域，它的边界线就是由方程 (3-7-46) 所决定的曲线。所以，在这个意义上，等式约束 (3-7-46) 也可被看做是不等式约束，如下：

$$\mu_E \leq \frac{1}{C'} \left[ C - \frac{v_M x_m}{\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)} \right] \quad (3-7-47)$$

其中， $\left( \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right)$  之值应取定为最大可能值。于是，参数的选择应在由 (3-7-4) 式所决定的可行域中进行，并且应该尽可能地在靠近区域边界之处选择参数，以免降低导弹的空气动力性能。

在分析了这些约束条件后，就可以具体地选择参数。通过下面的例题可更清楚地说明选择参数的步骤。

**例题 3-12** 某反坦克导弹，按战术技术要求规定其最大射程应达 3150 米。起飞发动机的比推力是  $I_s^* = 180$  秒，续航发动机的比推力是  $I_s = 150$  秒（考虑到各种消耗后的折算值）。续航初速指定为  $v_0 = 100$  米/秒，续航末速  $v_E$  限定不大于 160 米/秒。

按照威力要求及制导系统研制水平，规定导弹的战斗部及控制部质量共为  $m_p = 5.2$  千克。

此外，由经验数据知道诸结构系数是  $K_1=1.38$ ,  $K_2=0.8$ ,  $K_3=0.167$ 。导弹在平飞时的升阻比  $R=2.95$ 。

要求对这个导弹的设计参数进行分析及选择。

解 第一，先算出有关的无量纲参数：

$$i = \frac{I_r}{I_r^0} = \frac{150}{180} = 0.832$$

$$v_0 = \frac{v_0}{I_r g} = \frac{100}{150 \times 9.81} = 0.068$$

第二，进行重量分析：

按式 (3-7-34) 得到

$$m_0 = \frac{m_p}{\mu_E(1+K_2) - K_2 - K_3 - K_1(e^{v_0 i} - 1)} = \frac{5.2}{1.8\mu_E - 1.0473} \text{ 千克}$$

列表计算如下：

$\mu_E$	0.92	0.90	0.88	0.86	0.84	0.82	0.80
$m_0$ (千克)	8.543	9.080	9.689	10.385	11.190	12.130	13.240

按表中数据，可绘出重量分析曲线如图 3-11。

第三，进行弹道分析及飞行时间  $t_E$  的分析：

将式 (3-7-39) 改写成如下形式

$$t_E = \frac{x_m}{I_r g v_M} \cdot \frac{(1 - \mu_E)}{(C - \mu_E C')} \quad (3-7-48)$$

设定一组适当的  $v_M$  及  $\mu_E$  之值，按上式求出相应的  $t_E$  之值。

例如，设定  $v_M=0.08$  于是  $\eta_0 = \frac{1 - \frac{v_0}{v_M}}{1 + \frac{v_0}{v_M}} = 0.810$ ,  $C=0.9938$  及  $\mu_E$  为一系列值，可

得下面的计算表：

$\mu_E$	0.92	0.90	0.88	0.86	0.84	0.82	0.80
$\eta_0^2 = \eta_0(\mu_E)^{2/v_M}$	0.0101	0.0058	0.0033	0.00187	0.00104	0.00057	0.0003
$C'$	0.9995	0.9998	0.9999	1	1	1	1
$C - \mu_E C'$	0.07426	0.09398	0.1139	0.1338	0.1538	0.1738	0.1938
$t_E$	28.83	28.47	28.19	28.00	27.84	27.71	27.61

类似地，对于其他的  $v_M$  设定值也可得到一组  $t_E$  数据，从而可以在  $v_M-t_E$  平面上，以  $\mu_E$  为参变量绘出一族曲线，如图 3-12 所示。

我们的目的是要在  $v_M-\mu_E$  平面上绘出以  $t_E$  为参变量的曲线族。为此，可以利用图解法。先在图 3-12 上绘一条水平线，例如  $t_E=23$  秒，此水平线同诸曲线交出若干交点，将这些交

点的横坐标  $v_M$  与相应各曲线的参变量  $\mu_E$  做为一个点  $(v_M, \mu_E)$  转绘在  $v_M-\mu_E$  平面上, 然后将它们连成一条新的曲线, 并且标明  $t_E = 23$  秒 (参图 3-13)。依此类推, 即可在  $v_M-\mu_E$  平面上做出以  $t_E$  为参变量的曲线族 (如图 3-14)。在这  $v_M-\mu_E$  平面上的任一点都能恰好以所标明的飞行时间  $t_E$  飞过预定的射程  $X_m$ 。或者, 举例说, 如果限定导弹飞过全射程的时间为  $t_E = 23$  秒, 那么在相应的一条曲线上的诸点  $(v_M, \mu_E)$ , 都可做为备选方案。

第四, 进行弹道分析及导弹空气动力特征的分析:

由于指定了  $v_0 = 100$  米/秒及导弹的升阻比  $R = 2.95$ , 按式 (3-7-45) 可预定综合参量  $\left(\frac{2m_0}{C_x S \rho}\right)$  之值

$$\frac{2m_0}{C_x S \rho} = \frac{R(v_0)^2}{g} = 3000 \text{ 米}$$

然后, 由式 (3-7-46)

$$\mu_E = \frac{1}{C'} \left\{ C - \frac{v_M X_m}{\left[ \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right]} \right\}$$

设定一系列的  $v_M$  值之后, 相应地必有一系列的  $\mu_E$  值可满足此方程, 可用逐次逼近法来求解这些  $\mu_E$  值, 其步骤是:

第一步, 假定  $C' = 1$ , 按上式, 由一系列的  $v_M$  值即可近似求出一系列的  $\mu_E$  值, 令其为  $\mu_{E(0)}$ ;

第二步, 按  $\mu_{E(0)}$  可求出  $\eta' = \eta_0 \cdot (\mu_{E(0)})^{2/v_M}$ , 在  $C$  曲线上可求出近似的  $C'$  之值, 代入 (3-7-46) 式后, 即可求出更精确的  $\mu_E$  值, 令其为  $\mu_{E(1)}$ ;

第三步, 按  $\mu_{E(1)}$  去求更精确的  $\eta'$  及更精确的  $C'$ , 并反复按式 (3-7-46) 来求更精确的  $\mu_E$  值, 直到获得足够的精度。

事实上, 一般情况下收敛过程很快。按本例题, 列表计算如下:

$v_M$	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14
$\eta_0 = \frac{1 - v_0/v_M}{1 + v_0/v_M}$	.0810	.1392	.1905	.2360	.2766	.3132	.3462
$C$	.9938	.9885	.9838	.9780	.9722	.9668	.9612
$v_M X_m / \left[ \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right]$	.084	.095	.105	.1155	.126	.1365	.147
$\mu_{E(0)} = C - v_M X_m / \left[ \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right]$	.9098	.8940	.8788	.8625	.8462	.8303	.8142
$\eta' = \eta_0 (\mu_{E(0)})^{2/v_M}$	.0076	.0115	.0144	.0160	.0170	.0179	.0184
$C'$	1	.9990	.9987	.9984	.9981	.9978	.9975
$\mu_{E(1)}$ —— 按式 (3-7-46)	.9098	.8949	.8799	.8639	.8478	.8321	.8162

逐次逼近一次已获得足够精度, 不再列出校验精度的运算。

按表中数据, 在  $v_M-\mu_E$  平面上可划出一条曲线, 并标明  $\left[ \frac{2m_0}{C_x S \rho} \right] = 3000$  米 (如图 3-14 所示)。按式 (3-7-47) 在空气动力性能上能保证实现的备选方案都位于此线上, 或位于此线的下方。但若对照着重力分析曲线图 3-11 来观察, 就可发现, 若在此线下方选择方案,



带来的结果是导弹的全重增大。所以应该尽量在边界线上选取方案，以求导弹重量较轻。

第五，进行导弹最大速度的分析：

设计条件中要求导弹的最大速度不超过 160 米/秒。在导弹加速飞行的情况下，导弹的续航终点速度  $v_E$  即其最大速度。于是应有约束

$$v_E \leq 160 \text{ 米/秒}$$

在粗略地进行分析时，可以认为  $v_E$  应该接近于（但略小于）导弹的极限速度  $v_M$ ，故可近似认为

$$v_M \approx v_E \leq 160 \text{ 米/秒}$$

于是应有  $v_M = \frac{v_M}{I_s g} \leq \frac{160}{150 \times 9.81} = 0.1087$ ，在  $v_M - \mu_E$  平面上，以  $v_M = 0.1087$  做垂直线，则在此垂直线左边区域中的任何一点，都满足此约束。

精确地分析这个约束，应该由式 (3-4-10) 或 (3-4-10)' 着手，并令其中的  $\mu = \mu_E$ ， $v = v_E$ ， $\eta = \eta_E$ ，于是有

$$\mu_E = \left( \frac{\eta_E}{\eta_0} \right)^{v_M/2} \quad (3-7-49)$$

其中

$$\eta_E = \frac{1 - \frac{v_E}{v_M}}{1 + \frac{v_E}{v_M}} = \frac{1 - \frac{v_E}{v_M}}{1 + \frac{v_E}{v_M}}$$

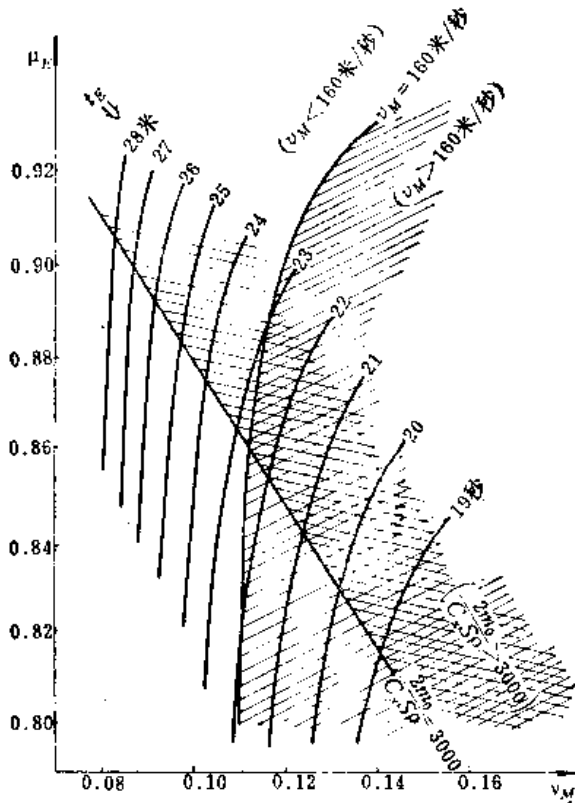


图3-14 参数选择用图

而且 
$$v_E \leq \frac{160}{150 \times 9.81} = 0.1087$$

于是在本例题中，式 (3-7-49) 可写成

$$\mu_E \geq \left[ \frac{(v_M - 0.1087)/(v_M + 0.1087)}{(v_M - 0.068)/(v_M + 0.068)} \right]$$

在  $v_M - \mu_E$  平面上，按此式也可划出一个区域，满足此约束的可行的方案点位于此区域中。（参见图 3-14，在标有  $v_M = 160$  的曲线左侧的区域）。

第六，进行总的分析及选定参数：

当做出重量分析曲线，并且在  $v_M - \mu_E$  平面上以曲线或区域的形式表示出各种约束条件，则选择参数就较为方便了（参照图 3-11 及 3-14）。选择参数时应注意：

(1) 应尽可能在  $\frac{2m_0}{C_x S \rho} = 3000$  米这条约束线上选择方案点。

(2) 如果认为飞行时间  $t_E$  不是重要的性能因素，那可沿上述  $\frac{2m_0}{C_x S \rho} = 3000$  米的曲线向左上方选择适当的点，一直可以选到  $v_M = v_0 = 0.068$  的地方，在这里将得到在续航段上为等速飞行的方案。这时，飞行时间  $t_E$  最长，然而导弹的初始质量最小。

(3) 事实上，在导弹的初始质量的增加不太大的情况下，希望飞行时间尽可能短。这样，就应沿  $\frac{2m_0}{C_x S \rho} = 3000$  米的曲线向右下方选择适当的点，一直可找到  $v_M \leq 160$  米/秒的不等式约束区的边界上。这一点具有  $v_M = 0.102$  及  $\mu_E = 0.860$  的参数值，相应的飞行时间是  $t_E = 22.6$  秒及导弹初始质量  $m_0 = 10.4$  千克， $m_0^* = 11.0$  千克。

## 第四章 反坦克导弹的导引弹道的分析和设计

制导系统所采用的导引规律，是制导系统设计及导弹总体设计的一个基本前提。采用不同的导引规律，设计中所面临的问题是大不相同的。目前，第一、二代反坦克导弹几乎全部采用“三点法”导引规律。所以在本章中，将集中地研究按三点法导引原则工作的反坦克导弹的设计问题。

首先，要从设计角度研究一下，在导弹按三点法原则沿理想弹道运动时，导弹应该具备什么条件，主要就是导弹应具有怎样的机动飞行能力。

然后，在后面的三节中，要研究导弹在飞行中实际上必定会出现的启控点散布问题和导入段的设计问题。特别是考虑到反坦克导弹的弹道贴近地面，如果弹道设计不当，很容易发生导弹在启控点附近触地坠毁的情况。在第二代反坦克导弹中，还会发生导弹在启控点附近不能进入红外测角仪视场或者逸出视场等问题。

### § 4-1 三点法导引的运动学分析

首先研究一下反坦克导弹在三点法导引的理想情况下的运动规律，即它的飞行轨迹、飞行时间、导弹所经路程以及弹道的弯曲程度等。在此基础上，就可以弄清导弹在理想情况下应具有怎样的机动飞行能力。

#### § 4-1-1 三点法导引的理想弹道

三点法导引的理想弹道就是把导弹看做是一个质点，并使这个质点严格地沿瞄准线运动的弹道，如图 4-1 所示。图上的符号为：

$O$ ——控制站（坐标原点）；

$M$ ——导弹；

$T$ ——目标（坦克或其他动目标）；

$V$ ——导弹速度向量（其标量为  $v$ ）；

$V_T$ ——目标速度向量（其标量为  $v_T$ ）；

$OA$ ——参考轴（极轴），取  $OA$  与  $V_T$  的方向平行；

$OT$ ——瞄准线，随着坦克的运动，瞄准线绕  $O$  点旋转；

$\phi$ ——瞄准角，即  $OT$  与  $OA$  之夹角（极角）；

$\eta$ ——前置角，即  $V$  与  $OT$  间之夹角；

$r$ —— $r = OM$ ，即导弹距控制站之距离；

$r_T$ —— $r_T = OT$ ，即坦克距控制站之距离；

$h$ ——即  $V_T$  向量距  $OA$  之垂直距离，或称“偏移参量”， $h = r_T \sin \phi$ 。

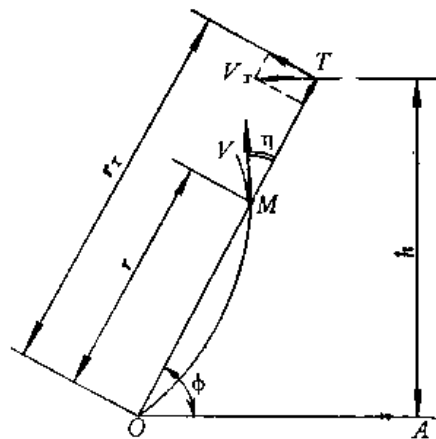


图4-1 三点法导引的运动学关系

瞄准线  $OT$  的旋转角速度应是

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_T \sin \phi}{r_T} = \frac{v_T \sin^2 \phi}{h} \quad (4-1-1)$$

按三点法导引规律的要求, 在目标速度  $V_T \neq 0$  的情况, 为了使导弹  $M$  始终位于瞄准线上, 必须使

$$v \sin \eta = r \frac{d\phi}{dt} \quad (4-1-2)$$

另一方面, 必有

$$v \cos \eta = \frac{dr}{dt} \quad (4-1-3)$$

以上 (4-1-1)~(4-1-3) 是描述三点法导引规律的三个基本的运动学关系。

由 (4-1-2)~(4-1-3) 可推出导弹理想弹道航迹的微分方程为

$$v^2 = \left( r \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (4-1-4)$$

或将 (4-1-1) 代入上式, 得

$$v^2 = \left( r \frac{v_T}{h} \sin^2 \phi \right)^2 + \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (4-1-5)$$

这个方程是以时间  $t$  为自变量。但是, 现在要求航迹, 即  $r = r(\phi)$  的关系, 故要换一下变量。

注意到,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{v_T}{h} \sin^2 \phi \quad (4-1-6)$$

将上式代入到 (4-1-5) 中, 可得

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + r^2 = (ph \csc^2 \phi)^2 \quad (4-1-7)$$

其中,  $p$  —— 导弹对目标的“速度比”,  $p = \frac{v}{v_T}$ 。

在这个描述导弹航迹的微分方程 (4-1-7) 中, 待求量为  $r$ , 自变量为  $\phi$ , 参量为  $p$  及  $h$ 。此式只能用数值法或级数法解出 (参考〔1〕)。

若须积分该式, 除了先要给出目标的初始位置之外, 还应给定  $p$  及  $h$  的具体数值。

但是, 在实践中,  $p$  及  $h$  的值是变化多端的, 为了不必对于每一个特定的  $p$  及  $h$  值都进行一次繁琐的运算, 可以再次求助于无量纲化的方法。

引入新的无量纲参数  $\rho = \frac{r}{ph}$ , 并改写式 (4-1-7), 即可得

$$\left( \frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 + \rho^2 = \csc^4 \phi \quad (4-1-8)$$

在这个关于无量纲参数  $\rho$  的微分方程中, 已不含任何参量, 因此只需给出初始条件即可进行积分。如果引入速度比  $p$  为常数且目标直线运动的条件, 那么对式 (4-1-8) 还可有另一种解释, 就是可以认为在 (4-1-7) 式中, 取  $ph = 1$  及  $r = \rho$ , 就可得到 (4-1-8) 式。

这样也可以把它看做是有量纲的。这时极径  $r$  的量纲单位就是  $\rho h$ 。

给定若干初始条件，并对 (4-1-8) 式以数值方法进行积分，其结果表示于图 4-2 中，它即为三点法弹道的通用曲线。

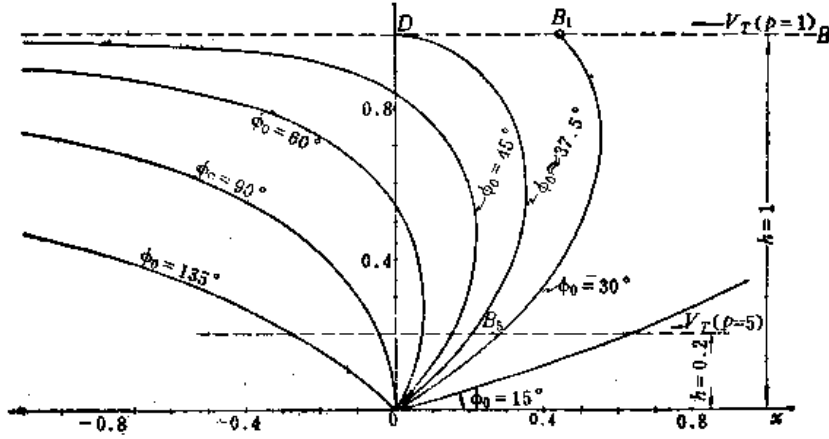


图4-2 三点法导引弹道的通用曲线

图 4-2 中各曲线也可一直延伸下去。但从实用考虑，只须绘到纵坐标为 1 的水平线  $\overline{DB}$  即可截止。

在利用通用曲线图 4-2 来考查导弹的理想弹道航迹时，应适当地选取长度单位，以使  $\rho h = 1$ 。例如，假若导弹速度  $v = 100$  米/秒，目标速度  $v_T = 20$  米/秒，于是  $\rho = \frac{v}{v_T} = 5$ ；又若目标运动的偏移参量  $h = 1000$  米，于是，为了保持  $\rho h = 1$  的条件，只需适当地选取长度单位，使得

$$h = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ [长度单位]}$$

就是说，应使

$$1 \text{ [长度单位]} = \rho h = 5 \times 1000 = 5000 \text{ (米)}$$

这时，在图 4-2 中，应将  $\overline{OD}$  ( $D$  点之纵坐标为 1) 代表 5000 米。所以，从图上看来，目标的运动路线就是平行于横轴，并且  $h = 0.2$  [长度单位] 的直线。又若，导弹开始沿三点法理想弹道运动时的初始发射角  $\phi_0 = 30^\circ$ ，那么，导弹将与目标相遇于图中的  $B_5$  点。

在速度比  $\rho \geq 1$  的各种实际可能值的情况下，利用通用弹道曲线图 4-2 考察三点法导引的理想弹道，可按以下规则进行：

选取比例尺使通用曲线图上的单位长度恰好代表偏移参量的  $\rho$  倍，即  $1 = \rho h$ ，同时，即认为目标是沿着距横轴为  $h = \frac{1}{\rho}$  的直线运动，导弹则是沿着与初始瞄准角  $\phi_0$  相应的某一条曲线运动，而且两线相交处就是命中点。

可以看出，当  $\rho$  很大时，在图 4-2 中实际上用得到的只是靠近横轴的一小部分曲线。

#### § 4-1-2 导弹的理想飞行时间与飞行路程

有了通用的弹道曲线图 4-2，就可以对三点法导引的导弹的理想弹道获得较为直观的印象。此外，利用这些曲线还可方便地计算导弹沿理想弹道运动的飞行时间及飞行路程。

假若导弹速度  $v$  为常数，目标为等速直线运动。参照图 4-3，假定  $T_0$  为目标之初始位置， $T_M$  为命中时之目标位置；相应地  $\phi_0$  为初始瞄准角， $\phi_M$  为命中时之瞄准角，这两个角度可由图 4-2 中量得。于是，从发射导弹到命中目标所需之时间为

$$t_M = \frac{T_0 T_M}{v_T} = \frac{h}{v_T} (\cot \phi_0 - \cot \phi_M) \quad (4-1-9)$$

或

$$t_M = \frac{hp}{v} (\cot \phi_0 - \cot \phi_M) \quad (4-1-10)$$

同时，在此过程中导弹所飞过的全路程  $s$  为

$$s = v t_M = ph (\cot \phi_0 - \cot \phi_M) \quad (4-1-11)$$

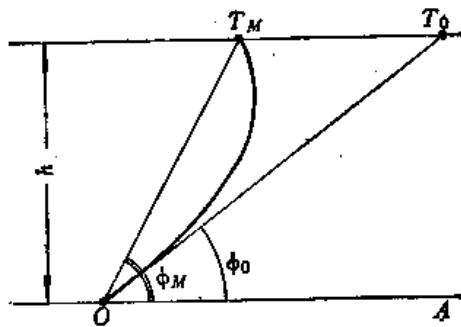


图4-3 求导弹的理想飞行时间及行程

**例题 4-1** 若导弹对目标之速度比  $p = 5$ ，且初始瞄准角  $\phi_0 = 90^\circ$ ，求导弹由发射到命中的飞行路程。

**解** 由图 4-3 查得，对于  $p = 5$  ( $h = 0.2$ )， $\phi_0 = 90^\circ$  之情况， $\phi_M = 101.6^\circ$ ，于是由式 (4-1-11) 可得

$$s = ph (\cot \phi_0 - \cot \phi_M) = 1.025h$$

此外，命中点至原点的斜距，由计算得  $1.021h$ 。这些数据是很典型的。它说明，在目标恰好横越导弹发射阵地的情况下，由于三点法导引而造成弹道弯曲，将使导弹的实际行程  $s$  略大于从阵地到目标的距离，但是增大的程度只有 2% 的量级（若将行程  $s$  同命中点斜距相比，则为  $1.025/1.021 \approx 1.004$ ，只增加千分之四）。

### § 4-1-3 三点法导引理想弹道的曲率

#### 一、弹道曲率及其无量纲式

曲率是弹道曲线的最重要性质之一，它代表着弹道曲线的弯曲程度，从而反映着导弹沿此弹道运动所需之机动能力。

在高等数学中已经给出了曲线上任一点处的曲率  $K$  的公式。在直角坐标系  $oxy$  中

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (4-1-12)$$

其中， $R$  为曲率半径， $y' = \frac{dy}{dx}$ ， $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

在极坐标中, 同一个曲率公式可表为

$$K = \frac{1}{R} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \quad (4-1-13)$$

其中  $r$  —— 极坐标中曲线上任一点的极径;

$$r' = \frac{dr}{d\phi};$$

$$r'' = \frac{d^2r}{d\phi^2};$$

$\phi$  —— 极角。

利用极坐标曲率公式 (4-1-13) 可直接从导弹的理想运动方程求得弹道曲线的曲率。

考虑更普遍化的情况, 若导弹及目标都是处于变速运动状态 (但目标仍沿直线运动),

它们的加速度分别是  $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$  及  $\dot{v}_T = \frac{dv_T}{dt}$ 。于是应该从式 (4-1-7) 出发, 令  $r' = \frac{dr}{d\phi}$ ,

则有

$$(r')^2 + r^2 = \left( \frac{v}{v_T} h \right)^2 \cdot \csc^4 \phi \quad (4-1-14)$$

并可改写为

$$r' = \sqrt{\left( \frac{v}{v_T} h \right)^2 \cdot \csc^4 \phi - r^2} \quad (4-1-15)$$

对 (4-1-14) 式两边进行微分, 并注意到

$$\frac{dv}{d\phi} = \left( \frac{dv}{dt} \right) / \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{\dot{v}}{v_T} h \cdot \csc^3 \phi$$

$$\frac{dv_T}{d\phi} = \left( \frac{dv_T}{dt} \right) / \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{\dot{v}_T}{v_T} h \cdot \csc^3 \phi$$

其中,  $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ ,  $\dot{v}_T = \frac{dv_T}{dt}$  于是可得

$$2r'r'' + 2rr' = -4(ph)^2 \csc^4 \phi \cdot \cot \phi + 2(\dot{v} - \dot{v}_T) \frac{p^3 h^3}{v^2} \cdot \csc^6 \phi \quad (4-1-16)$$

其中,  $p$  仍为速度比  $v/v_T$ , 但可能为变量。从 (4-1-15) 及 (4-1-16) 二式可求出

$$r'' = -r - \frac{2(r'^2 + r)}{r'} \cot \phi + \frac{r(\dot{v} - p\dot{v}_T)}{r'v^2} \quad (4-1-17)$$

现在即可将有关各式代入到 (4-1-13) 式中, 整理后即可得到理想弹道的曲率公式

$$K = \frac{2 \sin^2 \phi}{ph} \left[ 1 + \frac{-\frac{r}{ph} \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{1 - \left( \frac{r}{ph} \right)^2 \sin^4 \phi}} \right] + \frac{\frac{r}{ph} \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \left( \frac{r}{ph} \right)^2 \sin^4 \phi}} \cdot \left( \frac{\dot{v} + p\dot{v}_T}{v^2} \right) \quad (4-1-18)$$

式中第二项表明导弹的加速度  $\dot{v}$  及目标的加速度  $\dot{v}_T$  对于弹道曲率的影响。定性地说，导弹的加速度  $\dot{v}$  为正，将减小理想导引弹道的弯曲程度；目标的加速度  $\dot{v}_T$  为正，将增大导引弹道的弯曲程度。然而，通过具体的计算可以认为，在一般情况下导弹及目标的加速度对导引弹道的影响是不大的。

通常，不考虑导弹及目标的运动加速度，这时，理想弹道的曲率为

$$K = \frac{2 \sin^2 \phi}{ph} \left[ 1 + \frac{\frac{r}{ph} \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{ph}\right)^2 \sin^4 \phi}} \right] \quad (4-1-19)$$

为便于研究，再次引入无量纲参数  $\rho = \frac{r}{ph}$ ，并引入无量纲曲率  $x = Kph$ ，于是

$$x = 2 \sin^2 \phi \left[ 1 + \frac{\rho \cos \phi \sin \phi}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^4 \phi}} \right] \quad (4-1-20)$$

而实际弹道的曲率就是

$$K = \frac{x}{ph} \quad (4-1-21)$$

这样，首先只需弄清楚  $x$  值随着变量  $\rho$  及  $\phi$  而变化的情况，随之也就不难了解  $K$  随着变量  $\rho$ 、 $\phi$  及  $ph$  而变化的情况了。

## 二、弹道曲率的等高线表示法

在导弹沿理想三点法导引弹道飞行的过程中，极坐标  $\phi$  及  $\rho$  是始终变化着的，故按式 (4-1-20)，其弹道的曲率也是处处不一样的，而且以不同的初始瞄准角  $\phi_0$  发射的各条弹道，其曲率变化的情况也各有不同。

为了把弹道曲率的变化情况弄清楚，可以借助“等高线”的表示方法。即将式 (4-1-20) 加以改造，把其中的  $x$  看做是已知量，却把  $\rho$  看做是未知量，并从式中解出  $\rho$  而得

$$\rho = \frac{1}{\sin^2 \phi \sqrt{1 + \left( \frac{\sin 2\phi}{x - 2 \sin^2 \phi} \right)^2}} \quad (4-1-22)$$

按这个式子，只需先给定一个  $x$  值，如  $x = x_1$ ，然后再给出若干个  $\phi$  值，就可相应地算出若干个  $\rho$  值，于是在极坐标中就获得若干个点，将它们连成一条曲线，就是一条关于  $x$  的“等高线”，线上各点皆具有特定的条件  $x = x_1$ 。这样算出的结果已绘在图 4-4 中。图中的实线就是关于无量纲曲率  $x$  的等高线族，虚线则是理想三点法导引的通用弹道曲线（同图 4-2 一样）。从原点发射的导弹，按三点法导引规律沿任一条弹道飞行，在沿途各点处的弹道曲率是多大，可以借助于  $x$  的等高线族而马上看出来。

## 三、对三点法导引理想弹道的曲率变化情况的分析

现对式 (4-1-20) 及图 4-4 进行一些分析，以便弄清弹道曲率在各种条件下的变化情况。



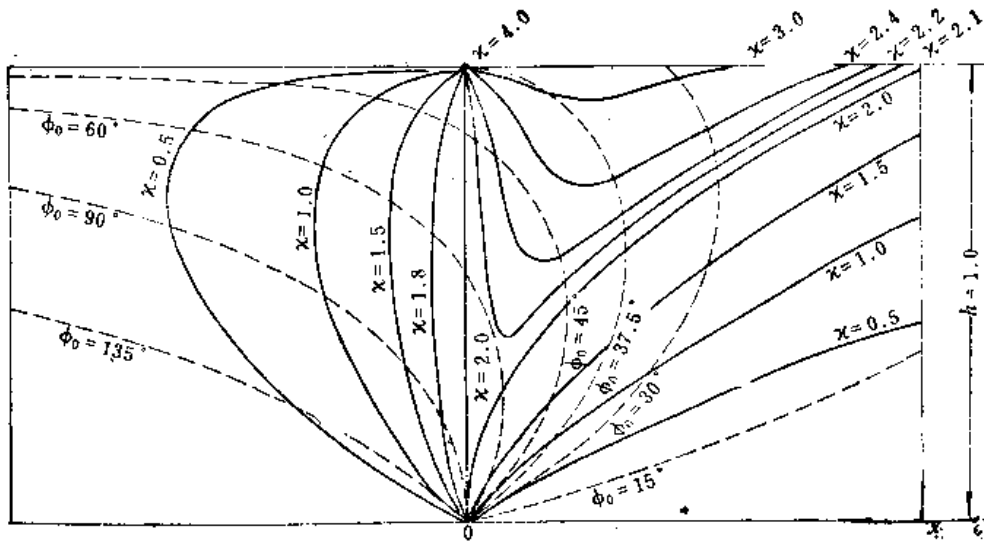


图4-4 无量纲弹道曲率  $x$  的等高线族

### (一) 发射点处的曲率

发射点处总有  $\rho = 0$  及  $\phi = \phi_0$ , 故式 (4-1-20) 可变成

$$x|_{\rho=0} = 2 \sin^2 \phi_0 \quad (4-1-23)$$

### (二) 飞行过程中弹道曲率的变化情况

导弹离开发射点后, 沿着弹道上各点处的弹道曲率的变化情况, 随着初始瞄准角  $\phi_0$  的大小而有所不同, 可以分成三类情况:

第一类情况: 若初始发射角  $\phi_0 < 37^\circ$  (见图 4-4), 则导弹在整个飞行过程中, 弹道曲率单调上升。

第二类情况: 若初始发射角  $\phi_0 \geq 90^\circ$ , 则导弹在整个飞行过程中, 弹道曲率是单调减小的。并且导弹始终处于尾追攻击的状态, 如果导弹相对于目标的速度比  $p \leq 1$ , 那末导弹就不可能命中目标。

第三类情况: 在以上二类情况之间, 即初始发射角是  $90^\circ > \phi_0 > 38^\circ$  时, 则导弹离开发射点之后, 弹道曲率先是愈来愈大; 随后达到一个极大值; 以后就愈来愈小, 当达到瞄准角  $\phi = 90^\circ$  时, 导弹正好横越过纵轴, 这时的无量纲曲率  $x = 2.0$ ; 然后, 弹道曲率进一步减小, 导弹转入尾追状态。如果, 速度比  $p = 1$ , 那么, 尾追过程将一直进行下去, 导弹不可能击中目标。只有在  $p > 1$  的情况下导弹才能命中目标。有时, 导弹可能不必穿过  $\phi = 90^\circ$  的纵轴, 甚至可能不必经过弹道曲率为极大值的点, 这时, 在命中点处的弹道曲率即为飞行过程中的最大曲率。

### (三) 在速度比 $p = 1$ 情况下的命中点处的曲率

当  $p = 1$  时, 目标应沿图 4-4 中  $h = 1$  的直线运动, 故命中点都应在此直线上。另外, 由于在  $p = 1$  条件下, 在尾追状态中不可能命中, 故命中点只能位于纵轴右边的区域中。

● 在参考文献 [3] 的第 348 页的图 7.9 中也给有类似的图, 但其中有两处错误。

在  $h = 1$  的直线上总有条件  $r \sin \phi = h = 1$ ，或者写成无量纲形式，就是  $\rho \sin \phi = \frac{r \sin \phi}{ph} = 1$ 。将此条件代入式 (4-1-20) 即可得到

$$x_{\text{命中点}} = 4 \sin^2 \phi \quad (4-1-24)$$

若初始发射角大约为  $\phi_0 \approx 37.5^\circ$  时，命中点恰好发生在  $\phi = 90^\circ$  的地方 (见图 4-4)，这时有

$$x_{\text{命中点}} = 4$$

在这一点上的弹道曲率比较全平面任何点处的弹道曲率都要大。

实际上，设计中总是使  $p > 1$ ，因此  $p = 1$  情况下的命中点曲率只有理论的价值；就是可以认为，在三点法导引的理想弹道上，可能出现的弹道曲率的最大极限就是  $x = 4$ 。

(四) 在速度比  $p \gg 1$  情况下的命中点处的弹道曲率

在反坦克导弹的设计工作中，实际上总有  $p > 5$  这样数量级的速度比，这时可以简单地求出命中点处弹道曲率的近似值。

在  $p$  已确定的情况下，图 4-4 中的目标是沿着某一条  $h = \frac{1}{p}$  的直线运动，故命中点的条件是

$$r \sin \phi = h = \frac{1}{p}$$

或写成无量纲形式，即

$$\rho \sin \phi = \frac{r \sin \phi}{ph} = \frac{1}{p}$$

将此式代入式 (4-1-20)，则得命中点处的无量纲弹道曲率应为

$$x_{\text{命中点}} = 2 \sin^2 \phi \left[ 1 + \frac{\cos \phi}{\sqrt{p^2 - \sin^2 \phi}} \right] = 2 \sin^2 \phi \left[ 1 + \frac{\cos \phi}{\sqrt{(p^2 - 1) + \cos^2 \phi}} \right] \quad (4-1-25)$$

在  $(p^2 - 1) > 1$  的情况下，可将式中方括弧内第二项展开为收敛的台劳级数如下

$$\frac{\cos \phi}{\sqrt{(p^2 - 1) + \cos^2 \phi}} = \frac{\cos \phi}{\sqrt{p^2 - 1}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \phi}{\sqrt{p^2 - 1}} \right)^2 + \frac{1.3}{2.4} \left( \frac{\cos \phi}{\sqrt{p^2 - 1}} \right)^4 - \dots \right] \quad (4-1-26)$$

这个级数是收敛的，并且是交错的，故可得命中点处之弹道曲率的估值区间如下

$$2 \sin^2 \phi \leq x_{\text{命中点}} \leq 2 \sin^2 \phi \left[ 1 + \frac{\cos \phi}{\sqrt{p^2 - 1}} \right] \quad (4-1-27)$$

此式只适用于命中点位于右半平面的情况。对于左半平面，由于  $\cos \phi$  为负值 ( $\phi > 90^\circ$ )，故上式中之小于号应改为大于号。

在  $p \gg 1$  的情况下，级数 (4-1-26) 收敛很快，于是可略去级数中之第二项以后的部分，而得命中点处的弹道曲率近似式

$$x_{\text{命中点}} \approx 2 \sin^2 \phi \left[ 1 + \frac{\cos \phi}{\sqrt{p^2 - 1}} \right] \quad (4-1-28)$$

例如, 若  $p = 5$ , 则上式之相对误差将小于  $0.5\%$ 。

(五) 在速度比  $p \gg 1$  情况下的最大可能的弹道曲率之估计

若以不同的初始瞄准角  $\phi_0$  发射许多导弹, 形成许多条弹道, 各条弹道皆有自己的最大曲率点, 在一切弹道的最大曲率点当中, 又有那一点的曲率是极大的? 其曲率为何?

由图 4-4 可看出, 在某个确定的速度比  $p$  条件下, 或者说, 在某个确定的  $h$  值的条件下, 在诸弹道中其最大的曲率点发生在命中点处的才有可能成为这样的曲率为极大值的点。因此, 只需求式 (4-1-25) 之极值。然而相应的运算很复杂, 只好放弃这种做法。从实用着眼, 可以按 (4-1-28) 式来求极值, 而且考虑到 (4-1-27) 式, 所求出的实际上是极大曲率的界限值。从设计的角度讲, 它将略有安全裕量。

将 (4-1-28) 式对于变量  $\phi$  取导数, 并令其为零, 即可得  $x_{\text{命中点}}$  之极值条件为

极小值条件:

$$\sin \phi = 0$$

极大值条件:  $\cos^2 \phi + \frac{2}{3} \sqrt{p^2 - 1} \cos \phi - \frac{1}{3} = 0$

从极大值条件解出  $\cos \phi$ , 得到

$$\cos \phi = \frac{1}{3} [\pm \sqrt{p^2 + 2} - \sqrt{p^2 - 1}]$$

弃去无意义的负根, 并按台劳级数展开为便于计算的公式, 即得

$$\cos \phi |_{x=x_{\text{max}}} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{8p^3} + \frac{7}{48p^5} - \frac{11}{384p^7} + \dots \quad (4-1-29)$$

将上式代入 (4-1-28) 式, 整理后可得

$$x_{\text{max}} \approx 2 + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{4p^4} + \frac{19}{96p^6} + \dots \quad (4-1-30)$$

在  $p \gg 1$  的条件下, 此级数收敛很快; 如在  $p = 5$  的情况下, (4-1-30) 式中第二项只是第一项的  $1\%$ , 第三项则为万分之一。此外考虑到这个公式本来就是略为偏大的, 因此在反坦克导弹的设计实践中, 往往可以只取第一项, 顶多取前两项进行计算。

于是, 在  $p > 5$  的情况下, 我们就可有准确到  $1\%$  以内的近似式如下

$$x_{\text{max}} \approx 2 \quad (4-1-31)$$

将此式代入 (4-1-21), 即有

$$K_{\text{max}} \approx \frac{2}{ph} \quad (4-1-32)$$

#### 四、导弹的法向加速度

导弹沿理想三点法导引弹道运动时的法向加速度之最大值为

$$a_{N \cdot \text{max}} = v^2 K_{\text{max}} = v^2 \frac{1}{R_{\text{min}}} \quad (4-1-33)$$

其中,  $R_{\text{min}}$  是理想导引弹道上的最小曲率半径。具体地即有

$$a_{N \cdot \text{max}} \approx \frac{2v^2}{ph} = \frac{2vv_T}{h} \quad (4-1-34)$$

注意到瞄准线在跟踪目标过程中的旋转角速度  $\omega_T$  之最大值乃是

$$\omega_{T \cdot \text{max}} = \frac{v_T}{h} \quad (4-1-35)$$

因此可得

$$a_{N, \max} \approx 2v\omega_{T, \max} \quad (4-1-36)$$

此式有明显的物理意义，这不过就是一个动点沿一条旋转的直线运动时的柯氏加速度。如果瞄准线是等速旋转并且导弹以等速飞行的话，那么，柯氏加速度就将是导弹的全部法向加速度。但实际情况并非如此，所以这个式子略有误差；但在  $p > 5$  的情况下，此误差很小，可以忽略。

#### § 4-1-4 导弹的机动能力、需用过载和可用过载

##### 一、导弹的机动能力

在导弹的设计工作中，自始至终要面临两个问题：

第一，为了保证导弹具有足够高的命中概率，需要使导弹具有多么大的飞行机动能力？这个在设计中预先规定的机动能力，通常用“需用过载”来表示。

第二，所设计的导弹，实际上可能具有多么大的飞行机动能力？这个可以实现的机动能力通常用“可用过载”来表示。

导弹的飞行机动能力可以有好几种办法来衡量：

- (1) 就是以导弹在飞行中所能产生法向过载的大小来衡量；
- (2) 就是以导弹在飞行中所能产生的法向加速度来衡量；
- (3) 就是以导弹在飞行中速度向量  $V$  的旋转角速度来衡量；
- (4) 就是以导弹在机动飞行中的最小转弯半径来衡量。

以上几种衡量导弹机动能力的办法实际上是一致的，可以互相换算。然而，通常用得最多的是“法向过载”。

##### 二、关于过载的概念

“过载”是在导弹设计工作中用得很普遍的一个概念，但是，同时也是常常容易弄混乱的一个概念。

最常用的“过载”定义是这样说的<sup>[6]</sup>：飞行器的过载是一个向量，其方向同作用在飞行器上的全部主动力的合力方向一致，其模则等于此合力的模与重力  $mg$  之比，即

$$\vec{n} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{mg} \quad (4-1-37)$$

其中， $F_i$  是作用在飞行器上的各个主动力（主要是指表面力，如空气动力、发动机推力等等）； $mg$  则是飞行器在地面上受地球重力场作用而具有的重力。

这个从主动力概念引出的过载定义是正确的，缺点是有时使用不方便。例如，按此定义，关于合力  $\sum \vec{F}_i$  的计算是很繁琐的。此外，如果不仅考察整个导弹，而且考察导弹上任一内部零件或零件的任一部分，它虽然没有直接受到那些主动力的作用，却同整个导弹一样，具有同样的过载，并且受到一定的惯性力，其大小恰好等于此内部零件的重量的  $n$  倍。这一事实说明，(4-1-37) 式尚未表明过载这个概念的本质。

过载的概念，其实是从超重和失重现象引伸而来的。在电梯中，或在加速运动的汽车中，以及在机动飞行的飞机中，人们都会遇到超重或失重现象。这种现象是由于物体具有

加速度而引起的。物体的加速度愈大，物体所“感受”到的惯性力就愈大，所以在加速运动的汽车中，人感到被压在椅背上；在加速上升的电梯中则感到体重增加。然而，如果运动加速度的方向同重力场所产生的重力加速度的方向一致，则惯性力的方向就同重力的方向相反，因而互相抵消，所以在加速下降的电梯中的人会有失重的感觉。这样一种“感觉到的重量”是同运动加速度与重力场所产生的重力加速度的向量差成正比的，同时也是同物体本身的质量成正比的。在加速运动的物体上所“感觉到的重量”，相对于此物体静止于地面时的“习惯的重量”之比，就是过载。然而分子及分母中包括有同样的质量，所以，过载就是运动加速度与“当地的”重力加速度的向量差对于地面上的重力加速度之比（参考〔6〕），即

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} - \vec{g}}{g_0} \quad (4-1-38)$$

这个式子同（4-1-37）式的结果是一致的，然而更明确的。不管飞行器（或任一物体）受有多少外力，在（4-1-38）式中都只包含三个量  $\vec{a}$ 、 $\vec{g}$  及  $g_0$  值。此外，对于一个正在进行着复杂的运动的飞行器内部的零件来说，如果想要求出飞行器结构作用在此零件上的力，就用不着通过迂回曲折的途径，只需由此零件的运动加速度  $\vec{a}$  即可知道它的过载  $\vec{n}$ ，也就是知道飞行器结构同此零件之间的相互作用力。这对于结构的设计工作是很方便的。所以，在导弹设计工作中，大都采用过载的概念。

### 三、需用过载和可用过载的关系

在导弹的设计工作中，很重要的问题就是要保证导弹能够发挥出足够大的法向过载，实际上也就是能够以足够大的法向加速度进行机动飞行。然而，并不是说，法向过载越大越好，要使法向过载大，导弹的弹翼就要做得大，因而飞行的攻角也要大，提供控制力的操纵机构及舵机也必须强有力，同时导弹的结构也必须坚固才能承受住伴随法向过载一同增大的外力及惯性力。此外，导弹在飞行中的阻力也必然要增大，因而弹上动力装置及推进剂的重量就要增加。所以，从这方面讲来，法向过载并不是越大越好。从两方面来考虑，实际能达到的法向过载应该恰好满足需要，也就是说，应该满足以下条件：

$$n_{\text{可用}} \geq n_{\text{需用}} + n_{\text{储备}} \quad (4-1-39)$$

其中，需用的法向过载  $n_{\text{需用}}$  应根据导弹能以足够高的概率命中运动目标的条件来确定。当然主要是根据导弹沿理想导引弹道运动时所需要的法向加速度（法向过载）来确定。由式（4-1-34）或（4-1-36）可知，假定导弹是在通过目标的水平平面上运动的，那么沿理想三点法导引弹道运动的需用过载为

$$n_{\text{需用}} = \frac{a_{N \cdot \max}}{g} \approx \frac{2v v_T}{gh} = \frac{2v \omega_{T \cdot \max}}{g} \quad (4-1-40)$$

备用的法向过载  $n_{\text{储备}}$  则是考虑到导弹在实际飞行中总会遇到一些随机的干扰，因而会偏离理想的三点法导引弹道，所以，在按理想条件计算出来的需用过载之外，必须加上一定的储备量。在启控点以前，导弹是无控飞行，因而，启控点处的弹道偏离理想三点法导引弹道最严重。关于这个问题，将在以后讨论。

## § 4-2 启控点散布

### § 4-2-1 反坦克导弹设计中的启控点散布问题

上一节研究了反坦克导弹沿理想导引弹道运动的问题。然而，事实上，任何反坦克导弹（以及任何战术导弹）都不是发射后立刻就能进行制导的，更不是马上就能够沿着理想弹道运动的。任何主要依靠空气动力举力来进行机动飞行的战术导弹，都必须首先达到一定的速度才能进行有效的机动，而达到一定的速度就需要时间。某些第二代反坦克导弹是从无座力炮式的发射管中发射的，当它离开发射管时已具有相当的速度，已经具有机动飞行的条件，但是，由于导引系统中的红外测角仪的视场角有限，它只能在距炮口适当远的距离上才能进入测角仪视场，才能开始用测角仪进行闭环制导。

开始对导弹进行大回路闭环制导的弹道点称为“启控点”。在启控点之前，大部分导弹只能进行无控飞行，个别的导弹可以在程序指令作用下，或在弹上稳定回路（或称小回路）作用下按预定弹道飞行。

在从发射到启控这一段时间内，由于存在着各种随机扰动的作用（包括目标的机动运动在内），导弹的启控点不会恰好位于瞄准线上，导弹在启控时的速度向量的方向也不会恰好是所希望的方向。启控点的位置及启控时的速度方向的随机分布就是“启控点散布”。

反坦克导弹的启控点散布是由于大量的随机的扰动因素引起的。这些随机因素中包括：导弹离开发射定向器瞬时的弹体姿态角及弹体转动角速度，导弹的起飞发动机推力向量偏斜，导弹质量分布不对称，导弹空气动力外形不对称，沿飞行弹道的风向及风速分布等。显然，反坦克导弹在启控点前的飞行弹道本质上就是一个无控火箭的飞行弹道。因此，可以运用无控火箭的飞行散布理论来研究反坦克导弹的启控点散布的规律。关于无控火箭的飞行散布理论，三十多年来已经有大量的文献做了详尽的研究<sup>[7~11]</sup>。在这样短短的一节里详尽地重述这个复杂的理论是不可能的。但是由于这个问题对于反坦克导弹的设计工作非常重要，所以，有必要在这里简要地说明它的主要概念和结论，特别要指明把这个理论应用于反坦克导弹设计工作时的某些特点。

### § 4-2-2 关于弹道散布的一般研究方法及概念

要研究弹体在飞行中的弹道偏差及散布，有理论分析和实验统计两种方法。通过理论分析可以对弹体飞行过程中各种扰动因素的作用机理及严重程度有全面的理解，但是其结果需要通过实验来验证，并且有些数据只能从实验中取得。因此，理论分析和实验统计两方面工作要结合起来。

#### 一、无控飞行扰动运动的方程

理论分析要从建立弹体飞行过程的数学模型开始。

考虑一个受推力作用而加速飞行的无控弹体在各种扰动因素作用下的运动。为了简化，假定弹体的扰动运动是在一个水平平面内进行的；并假定侧滑角 $\beta$ 、弹道偏角 $\Psi$ 及弹体偏航角 $\psi$ 都很小（图4-5）。于是，可直接写出线性化的运动方程如下：

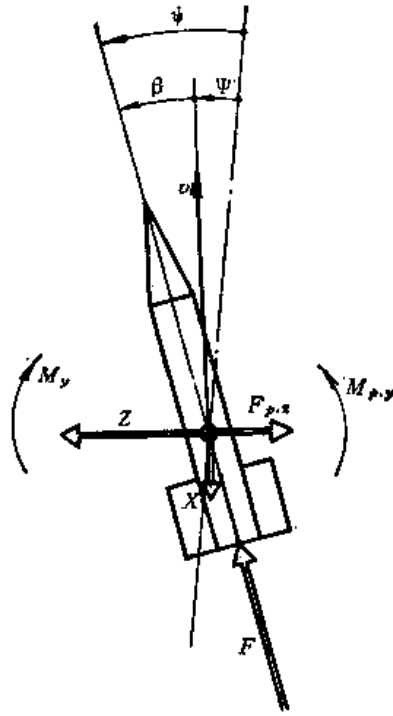


图4-5 弹体的偏航扰动运动

$$\begin{cases} \psi - \beta - \Psi = 0 & (4-2-1) \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + b_1 \frac{d\psi}{dt} + b_2\beta = \frac{M_{p,y}}{J_y} & (4-2-2) \\ b_4\beta - \frac{d\Psi}{dt} = \frac{F_{p,z}}{mv} & (4-2-3) \end{cases}$$

其中

$$b_1 = \left( \frac{\partial M_y}{\partial \omega_y} \right) / J_y = -m_y^{\omega_y} S L^2 \rho v / (2 J_y);$$

$$b_2 = \left( \frac{\partial M_y}{\partial \beta} \right) / J_y = -m_y^{\beta} S L \rho v^2 / (2 J_y);$$

$$b_4 = \frac{\left( \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + F}{mv} = \frac{-\frac{1}{2} C_x^{\beta} S \rho v^2 + F}{mv};$$

$F_{p,z}$ ——各种扰动力在弹道坐标系  $o_1 z_2$  轴上的投影;

$M_{p,y}$ ——各种扰动力矩在弹体坐标系  $o_1 y_1$  轴上的投影。

在反坦克导弹的起飞段上,各动力系数  $b_1$ 、 $b_2$  及  $b_4$  中含有的许多因素都变化不大,如  $F$ 、 $m$ 、 $J_y$ 、 $m_y^{\omega_y}$ 、 $m_y^{\beta}$  及  $C_x^{\beta}$  都可近似视为常数;但是,唯独速度  $v$  是剧烈变化的量,必须给出它的变化规律。严格说来,应该增加一个关于速度  $v$  的方程

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \left( F - \frac{1}{2} C_x S \rho v^2 \right)$$

然而,实际上,由于各扰动因素只是在弹体的速度比较低的时候才能对弹道偏差表现出比较显著的影响,这时,空气阻力是微乎其微的;因此,可以简单地认为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = a \quad (4-2-4)$$

考虑到  $F$  及  $m$  在短时间内变化都不大, 可认为  $a$  为常值, 即

$$\begin{cases} v = at \\ s = vt = \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

于是可将方程 (4-2-2) 及 (4-2-3) 改写为

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi}{dt^2} + b'_1 v \frac{d\psi}{dt} + b'_2 v^2 \beta = \frac{M_{p,y}}{J_y} \end{cases} \quad (4-2-5)$$

$$\begin{cases} \left( b'_4 v + \frac{a}{v} \right) \beta - \frac{d\Psi}{dt} = \frac{F_{p,x}}{mv} \end{cases} \quad (4-2-6)$$

其中,

$$b'_1 = \frac{-m_y^2 SL^2 \rho}{2 J_y},$$

$$b'_2 = \frac{-m_y^2 SL \rho}{2 J_y},$$

$$b'_4 = \frac{-C_x^2 S \rho}{2 m}$$

方程 (4-2-5) 和 (4-2-6) 是变系数的微分方程, 为了便于进行解析研究, 需进行一些变换, 即把自变量  $t$  换成  $s$ , 把未知参量  $\beta$  换成  $(v\beta)$ 。变换的目的是获得一个常系数的线性二阶微分方程, 从而易于获得解析解。在变换的过程中, 主要用到如下的关系

$$\frac{d}{dt}(\quad) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d}{ds}(\quad) = v \cdot \frac{d}{ds}(\quad)$$

先对 (4-2-1) 式微分, 可得

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} \quad (4-2-7)$$

将 (4-2-6) 式中的  $\frac{d\Psi}{dt} = b'_4 v \beta + \frac{a}{v} \beta - \frac{F_{p,x}}{mv}$  代入 (4-2-7) 式右端, 而得

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{a}{v} \beta + b'_4 v \beta - \frac{F_{p,x}}{mv} \quad (4-2-8)$$

然而

$$\frac{d\beta}{dt} + \frac{a}{v} \beta = \frac{1}{v} \left( v \frac{d\beta}{dt} + \frac{dv}{dt} \beta \right) = \frac{d(v\beta)}{ds}$$

故 (4-2-8) 式又可写成

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d(v\beta)}{ds} + b'_4 (v\beta) - \frac{F_{p,x}}{mv} \quad (4-2-9)$$

再对 (4-2-9) 式微分一次, 可得

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = v \frac{d^2(v\beta)}{ds^2} + v \cdot b'_4 \frac{d(v\beta)}{ds} + \frac{a}{mv^2} \cdot F_{p,x} - \frac{1}{m} \frac{dF_{p,x}}{ds} \quad (4-2-10)$$

将上二式一并代入到 (4-2-5) 式中, 并认为  $\frac{dF_{p,x}}{ds} = 0$ , 即可得

$$\frac{d^2(v\beta)}{ds^2} + (b'_1 + b'_4) \frac{d(v\beta)}{ds} + (b'_2 + b'_1 b'_4) (v\beta) = \frac{M_{p,y}}{J_y v} + \frac{1}{mv} \left( b'_1 - \frac{a}{v^2} \right) F_{p,x} \quad (4-2-11)$$



式(4-2-11)已是常系数的线性二阶微分方程,易于用解析方法求解,但还可以化简。

在无控火箭和反坦克导弹的情况下,大量的计算结果表明,同空气动力阻尼力矩有关的系数  $b'_1$  及同升力有关的系数  $b'_4$  是很小的,它们的作用同系数  $b'_2 = \frac{m_y^2 SL \rho}{2 J_y}$  相比往往可以略去不计,其结果只带来不大于百分之几的误差。故(4-2-11)式可以简化为

$$\frac{d^2(v\beta)}{ds^2} + b'_2(v\beta) = \frac{M_{p,y}}{J_y v} + \frac{1}{mv} \left( \frac{-a}{v^2} F_{p,x} \right) \quad (4-2-12)$$

## 二、摆动波长及运动方程的无量纲化

下面要引入一个重要的参量——“摆动波长  $\lambda$ ”,

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2J_z}{m_y^2 SL \rho}} = 2\pi \sqrt{\frac{2J_y}{m_y^2 SL \rho}} = \frac{2\pi}{\sqrt{b'_2}} \quad (4-2-13)$$

并定义弹体从静止状态以等加速度  $a$  走过一个摆动波长  $\lambda$  的距离时所达到的速度为特征速度  $v_\lambda$

$$v_\lambda = \sqrt{2a\lambda} \quad (4-2-14)$$

关于它们的物理意义,以后再谈。

还要引入一个无量纲变量  $\xi$

$$\xi = 2\pi \frac{s}{\lambda} \quad (4-2-15)$$

于是方程(4-2-12)可改写为以  $\xi$  为自变量的方程

$$\frac{d^2(v\beta)}{d\xi^2} + (v\beta) = \frac{M_{p,y}}{J_y} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2a\xi}} - \frac{F_{p,x}}{F} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{a}{2\xi}} \quad (4-2-16)$$

于是,运动方程已化为最单纯的形式,在相应的齐次方程中除了未知变量  $(v\beta)$  及自变量  $\xi$  之外,已经不含任何参量了。因此,如果根据典型的初始条件及扰动作用,求出方程的解,这样的解就有可能适用于任何一个具体的弹体,而不管其系数  $b'_2$  的数值为何。

一旦从方程(4-2-16)解出  $(v\beta)$ ,即可知道  $\beta$  随  $s$  变化的情况。然后由式(4-2-6)略去其中的小系数  $b'_4$  (因  $b'_4$  只是  $\frac{a}{v^2}$  的百分之几)再进行类似的自变量变换,可得

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{\beta}{2\xi} - \frac{1}{2\xi} \cdot \left( \frac{F_{p,x}}{F} \right) \quad (4-2-17)$$

在  $\beta$  已知的情况下,即可由单纯的积分求得弹道偏角在扰动因素作用下的偏差变化

$$\Psi = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\beta}{2\xi} d\xi - \int_{\xi_0}^{\xi} \left( \frac{F_{p,x}}{F} \right) \frac{1}{2\xi} d\xi \quad (4-2-18)$$

弹道在侧向的线偏移  $z$  可按下式计算

$$\frac{dz}{ds} = \Psi$$

对自变量  $s$  进行同样的变换可得

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{\lambda}{2\pi} \Psi$$

在  $\Psi$  已求出的情况下,即可由积分得到

$$z = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi} \Psi d\xi \quad (4-2-19)$$

### 三、定向器的有效长度

关于积分的起点，在时间  $t$  的坐标中是离开定向器的时刻  $t_0$ ，在行程  $s$  的坐标中则是定向器的有效长度  $s_0$ 。 $s_0$  是一个假想的定向器长度，是根据弹体的炮口速度  $v_0$  及飞行中的加速度  $a$  前推到某个假想的起动点来计算的，即

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a} \quad (4-2-20)$$

相应的无量纲参数为

$$\xi_0 = \frac{2\pi s_0}{\lambda} \quad (4-2-21)$$

在采用无座力炮发射的情况下，虽然实际的炮身很短，但  $v_0$  很高，并且炮外加速度  $a$  不大，故定向器有效长度  $s_0$  可能很大。

### 四、俯仰扰动运动

对于弹体的俯仰扰动运动，可建立类似的方程组，并导出形式上同偏航运动完全相似的结果。只是必须考虑到，重力在弹道法线上的投影也是一个“干扰力”，若初始的弹道倾角是  $\Theta_0$ ，则这个干扰力就是  $mg\cos\Theta_0$ ，并可近似认为沿整个弹道是不变的。因此，线性化了的运动方程组就是

$$\begin{cases} \delta - \alpha - \Theta = 0 & (4-2-1)' \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} + a_1 \frac{d\delta}{dt} + a_2\alpha = \frac{M_{p,x}}{J_x} & (4-2-2)' \\ a_4\alpha - \frac{d\Theta}{dt} = \frac{-F_{p,y}}{mv} + \frac{g\cos\Theta_0}{v} & (4-2-3)' \end{cases}$$

这里，

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-m_z^2 SL^2 \rho v}{2J_x}, \\ a_2 &= \frac{-m_z^2 SL \rho v^2}{2J_y}, \\ a_4 &= \frac{\frac{1}{2} C_y^* S \rho v^2 + F}{mv}; \end{aligned}$$

$F_{p,y}$ ——各种扰动力（除重力外）在  $oy$  轴上的投影；

$M_{p,x}$ ——各种扰动力矩在  $oz_1$  轴上的投影。

对于通常的轴对称的弹体， $a_1 = b_1$ ， $a_2 = b_2$ ，且  $a_4 = b_4$ 。因此俯仰运动同偏航运动具有同样的摆动波长  $\lambda$ 。

经过类似地推导过程，可得

$$\frac{d^2(v\alpha)}{d\xi^2} + (v\alpha) = \frac{M_{p,x}}{J_x} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2a\xi}} + \left[\left(\frac{F_{p,y}}{F}\right) - \frac{g\cos\Theta}{a}\right] \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{a}{2\xi}} \quad (4-2-16)'$$

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{\alpha}{2\xi} + \frac{1}{2\xi} \left(\frac{F_{p,y}}{F}\right) - \frac{g\cos\Theta_0}{2\xi a} \quad (4-2-17)'$$

或

$$\Theta = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\alpha}{2\xi} + \int_{\xi_0}^{\xi} \left( \frac{F_{p,y}}{F} \right) \frac{d\xi}{2\xi} - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{g \cos \Theta_0}{2a\xi} d\xi \quad (4-2-18)'$$

弹道在俯仰方向的线偏差  $y$  则为

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi} \Theta d\xi \quad (4-2-19)'$$

于是, 计算起飞无控段弹道的偏差及散布的问题, 就归结为解一个常系数线性二阶微分方程(4-2-16) [或(4-2-16)']和计算两个定积分(4-2-18)及(4-2-19) [或(4-2-18)']及(4-2-19)']的问题。

下面不再详述解方程(4-2-16)及计算积分(4-2-18)及(4-2-19)的过程, 而直接给出在各种初始条件及扰动作用下的积分结果。但是, 首先需要研究一下摆动波长及临界段的概念, 这对于深入理解后面的论题是有帮助的。

### 五、摆动波长及临界段的概念

摆动波长是表征无控火箭飞行特征的一个重要参数, 是无控火箭飞行散布理论中最重要的概念之一。

考虑一个空气动力静稳定的弹体在自由飞行中的摆动运动。假设此弹体没有滚转, 并且在考察的时间内维持着等速直线运动(至少在近似的程度上), 则弹体的摆动运动发生在一个平面内(如发生在铅垂面内)。于是摆动运动的方程为

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + a_1 \frac{d\alpha}{dt} + a_2\alpha = 0$$

其中,

$$a_1 = \frac{-m_z^{\alpha} S L^2 \rho v}{2 J_x},$$

$$a_2 = \frac{-m_z^{\alpha} S L \rho v^2}{2 J_x}$$

一般情况下,  $a_1 \ll \sqrt{a_2}$ ; 这时, 将  $a_1$  略去并不致引起显著的误差。于是上式可简化为

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_n^2 \alpha = 0$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{-m_z^{\alpha} S L \rho v^2}{2 J_x}} \quad (4-2-22)$$

就是说, 弹体在自由飞行中的摆动运动乃是一个典型的简谐振荡(近似视为无阻尼的), 这个振荡的固有频率就是  $\omega_n$ 。从而, 振荡的周期就是

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{2 J_x}{-m_z^{\alpha} S L \rho v^2}}$$

于是, 在振荡的一个周期中, 弹体所飞过的距离就是

$$\lambda = vT = 2\pi \sqrt{\frac{2 J_x}{-m_z^{\alpha} S L \rho}} \quad (4-2-23)$$

在无控火箭的飞行理论中, 习惯于采用摆动波长  $\lambda$  来描述弹体的摆动运动特征, 而不习惯采用摆动频率  $\omega_n$ 。这种情况是由几个方面的原因造成的。

首先, 摆动波长  $\lambda$  是一个更直观的物理参量, 人们可以在弹体的飞行试验中, 通过高速照像直接测量出摆动波长  $\lambda$ 。在火箭技术发展的初期, 曾经用这种办法来校核风洞实验中所获得的空气动力俯仰力矩系数导数  $m_z^*$  的数据。

此外, 摆动波长  $\lambda$  同弹体的飞行速度  $v$  无关。从式 (4-2-23) 中即可看出这一点。虽然, 速度  $v$  的变化对系数  $m_z^*$  的值多少有些影响, 但在低速情况下影响很小。然而, 另一方面, 摆动频率  $\omega_n$  却同速度  $v$  成直接正比关系。这种情况说明, 对于无控火箭来说, 摆动波长  $\lambda$  是比摆动频率  $\omega_n$  更能反映物理本质的参数。事实上, 即便弹体以等加速度运动, 摆动波长仍然不变, 这正是前面的 (4-2-12) 式及 (4-2-16) 式的所表明规律。

最后, 摆动波长  $\lambda$  可以用来表述弹体在受到各种扰动作用时的飞行偏差的变化情况。下面将会看到, 在无控飞行弹道的开始段上, 在各种扰动因素的作用下, 在大约相当于半个摆动波长 ( $\lambda/2$ ) 的行程之内, 弹道的方向角偏差要急剧增大。但随后, 这个方向角偏差就达到一个极大点, 然后即围绕某个比较稳定的偏差值做轻微的波动变化。有些文献 (如 [8]), 把弹道的方向角偏差急剧增大到极大点之前的这一段弹道叫做“临界段”。临界段的长短, 主要决定于摆动波长, 但也同发射定向器的有效长度有关。

### § 4-2-3 各种扰动因素对弹道方向角偏差的影响分析

为了实用的目的, 并不需要知道攻角  $\alpha$  和测滑角  $\beta$  在扰动弹道中的变化情况, 我们感兴趣的只是弹道的飞行方向角  $\Theta$  及  $\Psi$  的变化, 以及弹道轨迹的线偏移  $y$  及  $z$  的变化。

#### 一、初始扰动对散布的影响

##### (一) 初始扰动的形成

弹体在发射定向器上通常是依靠前后两个定向滑块来支持并提供准确的定位。然而, 定向滑块及定向器滑道之间总是要有配合间隙的。因此, 弹体在沿定向器运动过程中会发生晃动。

此外, 在前定向滑块已离开定向器而后一个定向滑块尚未离开的时候, 弹体是处于一种“半约束”的运动状态之中, 在各种扰动因素作用下, 弹体将围绕其后定向滑块支点做空间的摆动运动。在这些扰动因素中, 有发射定向器的振动、发动机推力偏心的扰动作用、火箭喷气从障碍物反射回来又作用在弹体上的扰动作用、弹体质量分布不对称的作用以及横风的扰动作用等。

这样, 在弹体完全离开定向器并且开始在空中飞行时, 它的运动初始条件将具有随机分布的特性。这些随机的运动初始条件包括弹体对于弹体坐标系横轴  $oy_1$  及  $oz_1$  的旋转角速度  $\dot{\theta}_0$  和  $\dot{\psi}_0$ , 以及弹体的姿态角  $\theta_0$  及  $\psi_0$ , 另外还有速度向量  $\vec{v}_0$  的方向角  $\Theta_0$  及  $\Psi_0$ 。这些随机的初始条件总称为初始扰动。

一般情况下, 这些随机的初始扰动是服从正态分布律的, 并可用相应的标准偏差  $\sigma_{\dot{\theta}_0}, \dots$ , 或概率偏差  $E_{\dot{\theta}_0}, \dots$  等来表述其分布特征。

##### (二) 初始扰动角速度 $\dot{\theta}_0$ 及 $\dot{\psi}_0$ 的影响

对于不滚转的静稳定的弹体, 由于在炮口处 ( $\xi_0$ ) 的初始扰动角速度  $\dot{\theta}_0$  而引起弹道上任一点处 ( $\xi$ ) 的弹道倾角  $\Theta$  的偏差  $\Delta\Theta_{\dot{\theta}_0}$ , 乃是  $\xi_0$  及  $\xi$  的函数, 表为  $\Delta\Theta_{\dot{\theta}_0}(\xi_0, \xi)$ , 可按如下公式计算:

$$\Delta \Theta \dot{\psi}_0 = \dot{\psi}_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} R_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-24)$$

其中,  $R_q(\xi_0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\sin(\sigma - \xi_0)}{2\sigma\sqrt{\sigma}} d\sigma$ , 乃是由单位的无量纲的初始扰动角速度  $\dot{\psi}_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2a}}$  所引起的弹道任一点处的弹道倾角偏差, 称为特征函数; 为计算方便, 已编成专门的函数表<sup>〔9〕,〔11〕</sup>, 其曲线如图 4-6 所示。

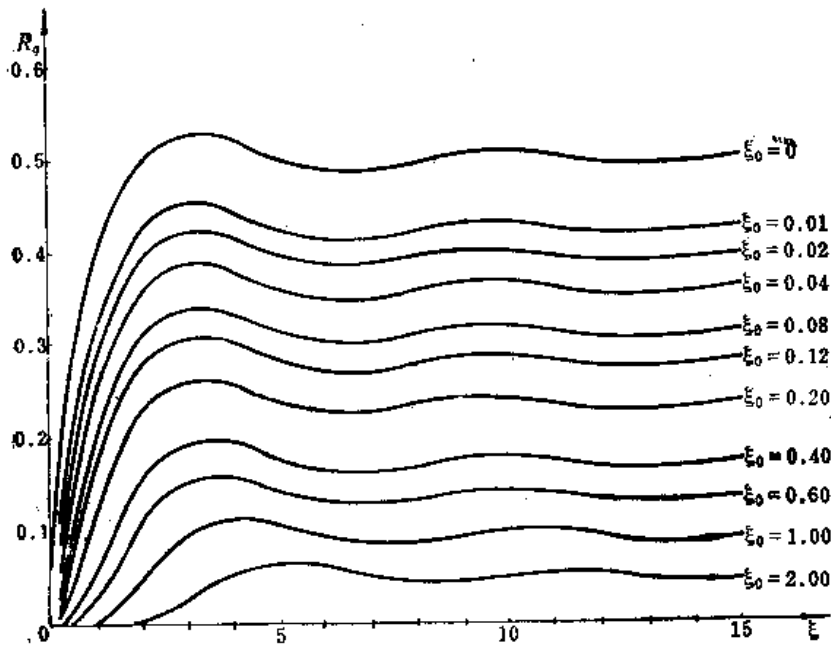


图4-6 特征函数  $R_q(\xi_0, \xi)$  的曲线

由偏航方向的初始扰动角速度  $\dot{\psi}_0$  所引起的弹道偏角  $\Psi$  的偏差  $\Delta \Psi \dot{\psi}_0$ , 也可类似计算。从函数  $R_q(\xi_0, \xi)$  的曲线可以看出, 它的弹道临界点恰好发生在  $\xi - \xi_0 = \pi$  的地方, 也就是说, 它的临界段恰好是半个摆动波长  $\frac{\lambda}{2}$ 。此外定向器有效长度 ( $\xi_0$ ) 愈大, 弹道的偏差愈小。

在弹体低速滚转的情况下, 如果初始扰动同弹体无滚转时一样, 那么仍可用式(4-2-24)来近似计算飞行方向角的偏差(注意, 这时的弹道是一个空间曲线, 初始扰动同它所引起的偏差并不在同一平面上)。但是, 问题在于, 弹体的滚转往往可能引起初始扰动本身的增加, 这一问题稍后再谈。

## (二) 初始方向角偏差 $\Delta \Theta_0$ 及 $\Delta \Psi_0$ 的影响

定向器的轴线有一个名义的偏角  $\Theta_0$  及方位角  $\Psi_0$ , 但是, 当导弹飞出炮口时, 实际的速度方向相对于名义的  $\Theta_0$  及  $\Psi_0$  可能发生偏差  $\Delta \Theta_0$  及  $\Delta \Psi_0$ , 这就是初始方向角偏差。注意, 所谓实际的速度方向, 是指弹体重心的出口速度向量  $\vec{v}_0$  的方向, 并不是弹体轴线的方向, 这二者是不同的。

由于初始弹道倾角偏差  $\Delta \Theta_0$  而引起的弹道倾角的角偏差  $\Delta \Theta(\xi_0, \xi)$  可如下计算

$$\Delta \Theta_{\Delta \Theta_0}(\xi_0, \xi) = \Delta \Theta_0 \cdot R_{\psi_0}(\xi_0, \xi) \quad (4-2-25)$$

其中,  $R_{\psi_0}(\xi_0, \xi) = 1 - \sqrt{\xi_0} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\cos(\sigma - \xi_0)}{2\sigma\sqrt{\sigma}} d\sigma$ , 也是一个特征函数, 其曲线如图 4-7。由初始弹道偏角偏差  $\Delta\Psi_0$  所引起的弹道偏角的偏差  $\Delta\Psi(\xi_0, \xi)$  也可类似计算。

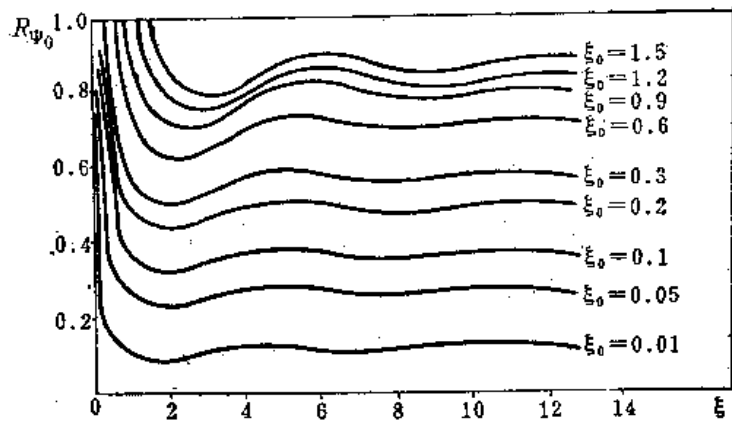


图4-7 特征函数  $R_{\psi_0}(\xi_0, \xi)$  的曲线

### (三) 初始姿态角偏差 $\Delta\theta_0$ 及 $\Delta\psi_0$ 的影响

在初始方向角偏差及初始扰动角速度皆为零 (即  $\Delta\Theta_0 = \Delta\Psi_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0 = 0$ ) 的条件下, 初始姿态角偏差  $\Delta\theta_0$  及  $\Delta\psi_0$  对于弹道角偏差的影响如下计算:

$$\Delta\Theta_{\Delta\theta_0}(\xi_0, \xi) = -\Delta\theta_0 R_{\psi_0}(\xi_0, \xi)$$

$$\Delta\Psi_{\Delta\psi_0}(\xi_0, \xi) = -\Delta\psi_0 R_{\psi_0}(\xi_0, \xi)$$

## 二、发动机推力偏心 and 推力偏斜对散布的影响

### (一) 发动机的推力偏心

对于不旋转并具有空气动力静稳定性的无控火箭来说, 推力偏心量的随机散布是引起弹体飞行散布的主要因素, 这一点已由许多理论及实验的研究所证实。

火箭发动机的推力偏心是由下述因素形成的 (见图 4-8)。首先, 发动机喷口的轴线同弹体的几何轴线可能不同轴, 这样就造成线偏差  $h_{T.1}$ , 这称为几何偏心。

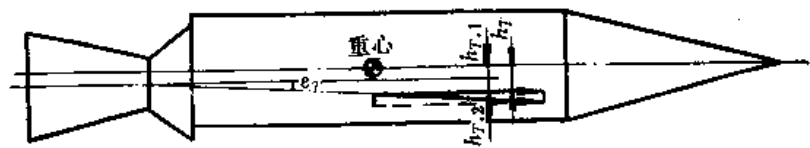


图4-8 火箭发动机的推力偏心

其次, 火箭发动机的燃气流在离开喷口时的总的动量向量的方向可能同弹体的几何轴线之间有夹角  $\epsilon_T$ 。这样, 推力向量同重心之间就又导致一个线偏差  $h_{T.2} = L_T \epsilon_T$  ( $L_T$ 指重心至喷喉断面之距离), 称为燃气流的动态偏心。它的大小和方向在发动机的整个工作过程中是要变化的, 并且是很难通过工艺措施来控制的。

总的推力偏心  $h_T$  就是这两个分量的向量和。这两个分量的大小都是服从正态分布规律的随机量。因此, 在计算总推力偏心的分布特征时, 要用平方相加的办法, 如

$$\sigma_{h_T} = \sqrt{(\sigma_{h_{T.1}})^2 + (\sigma_{h_{T.2}})^2} \quad (4-2-26)$$

在这种情况下, 比较大的推力偏心分量就会起主导作用了。

一般说来, 燃气流动态偏心是很难消除或在工艺上控制的, 很多实验资料都说明, 燃

气流动态偏差角的中间偏差大约为  $E_{\sigma} \approx (1.0 \sim 1.5) \times 10^{-3}$  弧度。同时，最常见的弹体布局方案是把火箭发动机的喷口放在弹体的尾部，这样一来，弹体重心至喷喉断面的距离  $L_T$  就相当大。因此，通常燃气流动态偏心在总的推力偏心中占显著的地位。

然而，在有些反坦克导弹布局方案中，发动机的喷口在弹体中部，接近重心的位置，这时燃气流动态偏心的影响就可能下降。这对减小启控点散布是有利的。

### (二) 推力偏心对于不滚转弹体的扰动作用

推力偏心  $h_T$  所引起的飞行方向角偏差，可按下式计算；假定  $h_T$  发生在俯仰平面上，并且弹体没有滚转，则

$$\Delta \Theta_{h_T} = h_T \cdot \frac{\lambda}{2\pi K^2} \cdot R_A(\xi_0, \xi) \quad (4-2-27)$$

其中  $K$ ——弹体绕横轴的回转半径， $K = J_x/m$ ；

$R_A(\xi_0, \xi)$ ——特征函数，见图 4-9，定义为

$$R_A(\xi_0, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} R_a(\sigma, \xi) d\sigma.$$

若  $h_T$  在水平面上，则将引起弹道偏角的偏差  $\Delta \Psi_{h_T}$ 。

由图 4-9 可知，由推力偏心引起的飞行方向角偏差，其弹道临界段大约为  $0.7\lambda$ ；若定向器有效长度  $\xi_0$  愈大，则偏差愈小。

由式(4-2-27)可知，摆动波长  $\lambda$  的增大将导致散布的增大。摆动波长  $\lambda$  同弹体的静稳定程度有密切关系，静稳定度小的弹体，弹体的自振频率  $\omega_n$  也小，于是摆动波长  $\lambda$  就会增大。因此，为了减小推力偏心造成的散布，常常希望弹体具有尽可能大一些的静稳定度。然而，在反坦克导弹的设计工作中，为了取得较好的弹体操纵性，必须使弹体的静稳定度小一些。这样就同减小启控点散布的要求发生矛盾。有一些反坦克导弹，采取了把起飞发动机

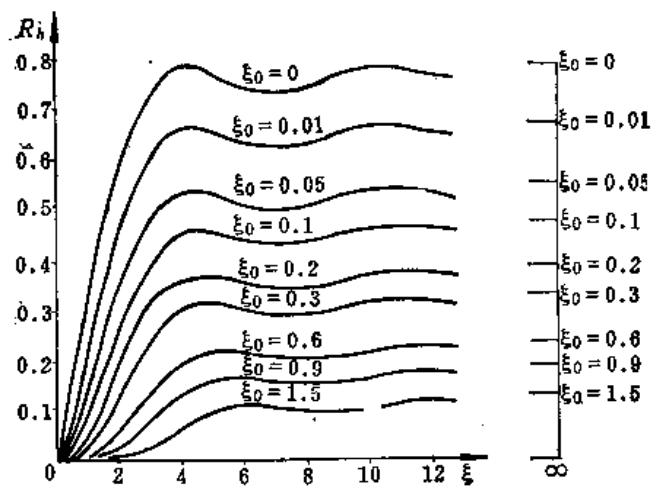


图4-9 特征函数  $R_A(\xi_0, \xi)$

放在弹体重心前部的布局方案。这样，在起飞发动机工作初期，弹体具有较大的静稳定度，有利于减小推力偏心造成的散布。然而随着起飞发动机中的推进剂的燃烧，弹体重心逐渐向后移动，静稳定度不断减小。若启控点是位于起飞段之后的弹道点上，这时弹体的静稳定度最小，有利于提高弹体的操纵性。这样的布局方案有利于解决上述启控点散布同操纵性之间的矛盾。

### (三) 推力偏心对于滚转弹体的扰动作用

为了有效地减小推力偏心引起的飞行散布，人们普遍地采用使弹体低速滚转的办法。在弹体发生滚转以后，推力偏心所造成的使弹体偏摆的力矩（推力偏心力矩）将随同弹体一道旋转，从而不断地自我抵消，因此能显著地减小它所引起的方向角偏差。显然，弹体

滚转愈快, 推力偏心力矩就能更有效地自我抵消。然而, 不论弹体往后的滚转多快, 在弹体刚离开定向器并滚转过  $1/4$  周之前, 推力偏心力矩所造成的弹道方向角偏差是基本上抵消不掉的, 在这段距离上所形成的方向角偏差将成为整个飞行过程中形成的方向角偏差的主要部分。在弹体滚转过  $1/4$  周以后, 推力偏心力矩的自我抵消效应就比较显著了。因此, 最要紧的是应该使弹体在离开定向器后尽量短的行程上就转过  $1/4$  周。事实上, 一个低速滚转的火箭的方向角偏差大体上是同它在转过头  $1/4$  周的时间内所走过的距离成正比的。因此, 如果想借助低速滚转来改进由推力偏心所引起的散布, 那么, 最要紧的是提高炮口附近的转速, 而不是提高弹道后段的转速。最好的办法是使弹体在定向器中就开始加速滚转, 这样在出炮口时就能具有较大的炮口转速。

假如弹体在离开定向器时已具有一定的炮口转速, 并且能继续保持此转速, 那么就可以通过下面的近似关系来估计弹道末端的方向角偏差 (弹道应当长于临界段)<sup>(9)</sup>:

$$\Delta\Theta_{\text{滚}} \approx \frac{1}{2n_A} \cdot \Delta\Theta_{\text{不滚}} \quad (4-2-28)$$

其中  $n_A$  —— 弹体在通过第一个摆动波长的过程中所转过的周数。

上式的限制条件是  $n_A$  不大于弹体的赤道转动惯量与极转动惯量之比。

如果弹体依靠火箭发动机上的斜喷管、斜置燃气舵片或切向喷气孔等方法来提供滚转力矩, 那么, 它除了在炮口处有角速度  $\omega_{x,0}$  之外, 还能继续加速滚转, 其滚转角加速度大体为常数, 并且在往后的弹道上, 滚转角速度  $\omega_x$  同弹体速度  $v$  之比值也能维持为常数。在这种情况下, 可如下计算推力偏心引起的弹道角偏差:

$$\Delta\Theta_{\text{推}} \approx h_T \cdot \frac{a}{K^2 \omega_{x,0}} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} R_g(\xi_0, \xi) \quad (4-2-29)$$

将式 (4-2-29) 同 (4-2-24) 相比较可以看出, 推力偏心对于滚转弹体的扰动作用, 近似地等效于一个初始扰动角速度  $\dot{\theta}_0 = h_T \cdot \frac{a}{K^2 \omega_{x,0}}$  对于不滚转的弹体的扰动作用。

#### (四) 推力偏斜及重力的扰动作用

燃气流偏斜角  $\varepsilon_T$  的存在, 导致推力  $F$  也偏斜  $\varepsilon_T$ , 于是, 在垂直于弹体轴线的方向上, 就产生了一个推力  $F$  的侧向分量  $F \sin \varepsilon_T$ 。它使得弹体产生持续的侧向加速度, 从而也使得弹道倾角  $\Theta$  产生相应的偏差 (在弹体不滚转的情况下)

$$\Delta\Theta_{\text{推}} = \varepsilon_T R_g(\xi_0, \xi) \quad (4-2-30)$$

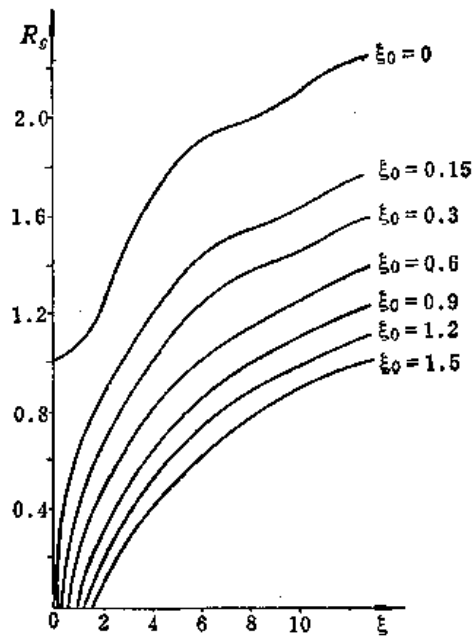
其中, 特征函数  $R_g(\xi_0, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\sigma} \left[ 1 - \sqrt{\sigma} \int_{\sigma}^{\xi} \frac{\cos(\xi - \sigma)}{2\xi\sqrt{\xi}} d\xi \right] d\sigma$ , 其曲线如图 4-10 所示。

在此附带指出, 重力对于弹道倾角  $\Theta$  的影响, 也可利用这个特征函数  $R_g(\xi_0, \xi)$  来计算, 即

$$\Delta\Theta_g = \frac{-g \cos \Theta_0}{a} R_g(\xi_0, \xi) \quad (4-2-31)$$

重力只对俯仰运动有影响, 故偏航运动无类似的偏差项。



图4-10 特征函数 $R_p(\xi_0, \xi)$ 的曲线

### 三、弹体质量分布不对称对散布的影响

#### (一) 质量偏心引起推力矩所形成的扰动作用

弹体质量分布不对称的第一个结果，是使弹体的质心偏离于弹体的几何轴线一个距离 $h_e$ 。前面在计算推力偏心时，曾认为弹体的质心就在几何轴线上。那么，现在由于质心本身偏离了轴线，所以相应地又产生了一部分推力偏心力矩 $Fh_e$ ，因而产生的弹道方向角偏差应仿照式(4-2-27)计算，即

$$\Delta\Theta_{h_e} = h_e \frac{\lambda}{2\pi K^2} R_h(\xi_0, \xi) \quad (4-2-32)$$

在弹体滚转的情况下，则应分别按照式(4-2-28)或(4-2-29)来计算质量偏心引起的方向角偏差 $\Delta\Theta_{h_e}$ 。

#### (二) 质量偏心引起初始方向角偏差所形成的扰动作用

在弹体具有炮口转速的情况下，质量偏心将同炮口转速耦合起来而引起一个附加的初始扰动。这是由于弹体在定向器内滚转时受到定向器的约束。因此，其滚转运动基本上是围绕其几何轴线进行的。这时，质心即以 $h_e$ 为半径绕几何轴线做圆周运动，其速度为

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_{x_0} \times \vec{h}_e \quad (4-2-33)$$

当弹体恰好飞出炮口时，此扰动速度 $\vec{v}_e$ 将垂直于原来的初速 $\vec{v}_0$ ，二者的向量和才是弹体的真实初速。此真实初速的方向同定向器轴线方向之间具有一个夹角 $\omega_{x_0} h_e / v_0$ 。这样一来，就好像是存在着一个速度方向角的初始扰动一样。严格说来，滚转弹体的运动轨迹是一个空间曲线。但是，在转速不太高的情况下，可以认为由此扰动速度 $\vec{v}_e$ 所引起的弹道方向角偏差同 $\vec{v}_e$ 本身是位于同一平面上的。即若 $\vec{v}_e$ 位于铅垂平面上，则将引起一个弹道倾角的偏差 $\Delta\Theta_{v_e}$ 如下

$$\Delta\Theta_{v_e}(\xi_0, \xi) = \frac{v_e}{v_0} R_{v_0}(\xi_0, \xi) \quad (4-2-34)$$

其中  $R_{\psi_0}(\xi_0, \xi)$  如图 4-7 所示。

### (三) 动不平衡的扰动作用

质量偏心又称为静不平衡。然而弹体质量分布不均衡还将引起动不平衡。动不平衡只有在弹体滚转的情况下才能表现出来。

为了说明动不平衡的问题，参见图 4-11。设有一个原来的质量分布完全均衡的弹体，其质心位于  $o_1$  点，后来在弹体内  $x_1 o_1 y_1$  平面的某一点  $A$  上增加了一个小的质量  $\Delta m$ ， $A$  点的坐标为  $(x_A, y_A)$ 。于是弹体将产生质量偏心  $h_0 = \frac{\Delta m \cdot y_A}{m}$ ，这是静不平衡。现在若弹体以角速度  $\omega_x$  绕

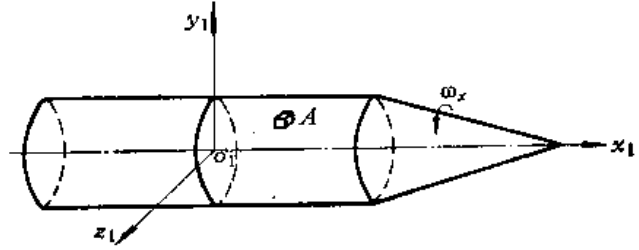


图4-11 弹体上的质量不平衡

$x_1$  轴滚转，那么，在点  $A$  的小质量  $\Delta m$  将产生一个离心力  $\Delta m y \omega_x^2$ ，此力对于  $o_1 z_1$  轴将产生力矩  $\Delta m y \omega_x^2$ ，这就是动不平衡现象。然而，如果弹体绕某一个新的轴旋转，动不平衡现象将能消除（即无惯性离心力矩产生），此新轴称为动平衡轴，它同原来的几何对称轴  $o x_1$  之间将存在一个夹角  $\varepsilon_D$ 。动不平衡角  $\varepsilon_D$  同  $A$  点处之不平衡质量  $\Delta m$  之间有关系

$$\varepsilon_D = - \frac{\Delta m x_A y_A}{J_x - J_z} \quad (4-2-35)$$

在无控飞行中，滚转弹体的动不平衡所引起的方向角扰动可如下近似计算。

$$\Delta \Theta_{\varepsilon_D} \approx \varepsilon_D \omega_{x,0} \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha}} R_d(\xi_0, \xi) \quad (4-2-36)$$

将此式同 (4-2-24) 式相比，可以看出动不平衡的扰动作用大约相当于一个等效的初始扰动角速度的作用，这个等效的初始扰动是  $\dot{\theta}_0 = \varepsilon_D \omega_{x,0}$ 。

由 (4-2-33) ~ (4-2-36) 式可知，提高导弹的转速虽然能够减小推力偏心的扰动作用，但是同时将导致初始扰动增大。因此，将存在一个最优的出口转速  $\omega_{x,0}$ ，使得总的散布为最小。

### 四、风对散布的影响

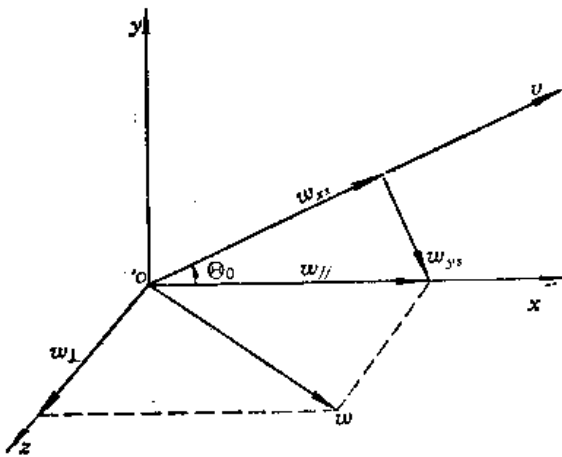


图4-12 风速  $\vec{w}$  的分解

地面附近的风速一般是平行于地面的。对于无控弹体的飞行散布影响较大的是同弹体速度  $\vec{v}$  方向相垂直的横风。对风速  $\vec{w}$  可以按图 4-12 分解为以下几个分量： $\vec{w}_\perp$ ——平行于地面  $xoz$  且垂直于弹速  $\vec{v}$  的风速分量，即横风； $\vec{w}_\parallel$ ——平行于地面且位于射面  $xoy$  内的风速分量，即纵风； $\vec{w}_{xr}$  及  $\vec{w}_{xz}$ ——由  $\vec{w}_\parallel$  分解而得的分别平行于或垂直于弹速  $\vec{v}$  的风速分量，即纵向平行风及纵向垂直风，在炮口处有  $w_{xr} = w_\parallel \cos \Theta_0$ ， $w_{xz} = w_\parallel \sin \Theta_0$ 。对弹体飞行散布影响最大的是横风  $w_\perp$ ，其次，在

定向器有仰角 $\Theta_0$ 的情况下，纵向垂直风 $w_{vr}$ 也影响飞行散布。

风对弹体的扰动，在弹体有推力作用（加速飞行）和无推力作用的情况下，其效果是截然不同的。

对于常见的具有一定的空气动力静稳定性的弹体，正当它在火箭推力作用下加速飞行时，如果遇到横风的作用，它将趋向于顶风飞行从而使弹道向逆风方向偏斜。然而若没有推力作用，则它的弹道将顺风偏斜。这是关于风对弹体扰动效果的一个重要的概念。

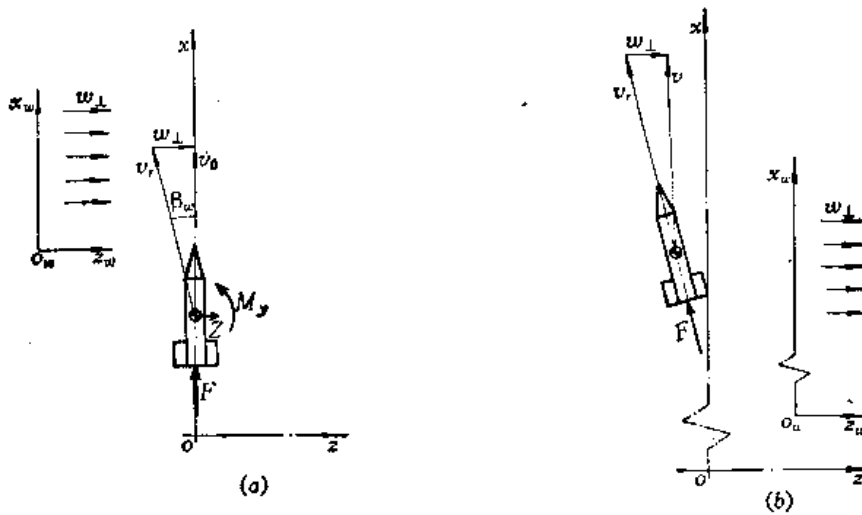


图4-13 横风影响弹道偏斜

为了说明这一点，可参看图4-13。图中(a)表示一个刚出口的有推力作用的弹体，遇到横风 $w_{\perp}$ 的扰动作用。在地面坐标系中，弹体的（绝对）速度为 $\vec{v}_0$ ，但是在一个随横风运动的相对坐标系 $x_w O_w z_w$ 中，弹体的相对速度却是 $\vec{v}_{r,0} = \vec{v}_0 - \vec{w}_{\perp}$ 。 $\vec{v}_r$ 就是空气对于弹体的相对运动速度，由于 $v_r$ 的存在，使弹体上产生各种空气动力和力矩。这时将产生两个扰动效果，第一是空气动力侧向力 $Z$ ，将使得弹体产生一个顺风的加速度 $\frac{Z}{m}$ ，这个效应是比较小的。第二是空气动力偏航力矩 $M_y$ ，力图使弹体轴线趋向于 $\vec{v}_r$ 方向，也就是说，静稳定的弹体好像一个风向标，总是倾向于转动到顶风的方向上；这时推力就产生两个分量—— $F_x$ 及 $F_z$ ，其中侧向推力 $F_z$ 的效应是使弹体向逆风方向加速运动。因此，在通常推力 $F$ 很大的情况下，弹体将很快地获得一个偏向于顶风方向的速度 $v$ ，如图4-13(b)所示。在图中，弹体轴线已同相对速度 $\vec{v}_r$ 一致，这是一个平衡位置，但是由于弹体在摆动过程中已经获得一定的角速度，因此，弹体实际上将继续摆动下去，结果就形成围绕平衡位置的振动。

横风引起的弹道偏角的偏差，可如下计算：

$$\Delta \Psi_w = w_{\perp} \left[ \frac{R_{\Psi_0}(\xi_0, \xi)}{v_0} - \frac{1}{v} \right] = \frac{w_{\perp}}{v_x \sqrt{2\pi}} \left[ \frac{R_{\Psi_0}(\xi_0, \xi)}{\sqrt{\xi_0}} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right] \quad (4-2-37)$$

其中，特征函数 $R_{\Psi_0}(\xi_0, \xi)$ 已经在式(4-2-34)中引用过，其图线已示于图4-7。

在计算纵风 $w_{||}$ 所引起的弹道倾角的偏差 $\Delta \Theta$ 时，要注意到起作用的风速是 $w_{vr} = w_{||} \sin \Theta_0$ ，故

$$\Delta \Theta_w = w_{11} \sin \Theta_0 \left\{ \frac{R_{\psi_0}(\xi_0, \xi)}{v_0} - \frac{1}{v} \right\} \quad (4-2-38)$$

在计算风的扰动作用时,要考虑到风速的阵动性很大。有些反坦克导弹在战术技术要求中规定了发射导弹时的允许最大风速,这是指平均风速而言。实际的风速是在稳定的平均风速之上叠加了一些变化频率较高的随机风速成分。稳定的平均风速引起弹道的确定型的偏差;而随机风速则引起弹道的随机型的散布。这两种情况应该分开计算。有些资料认为在比较平坦的地形上,随机风速的概率偏差大约是平均风速的十分之一,即

$$E_w \approx 0.1w \quad (4-2-39)$$

#### § 4-2-4 各种扰动因素对弹道的线偏差的影响分析

由式(4-2-19)可知,某种扰动因素所引起的弹道线偏差  $\Delta z$  乃是相应的方向角偏差的积分。或者引用如下的特征函数(见图4-14~4-17):

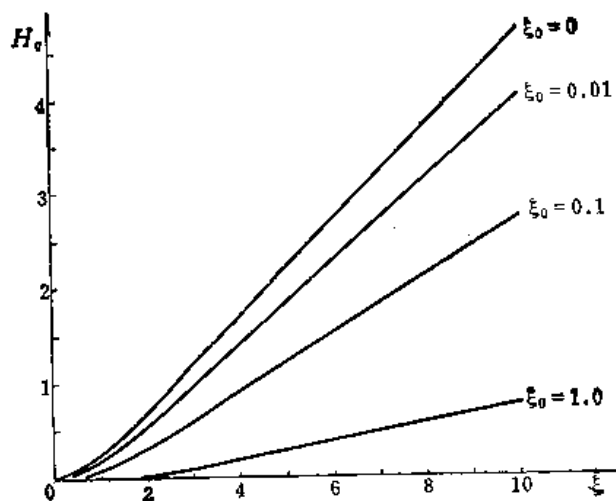


图4-14 特征函数  $H_q(\xi_0, \xi)$

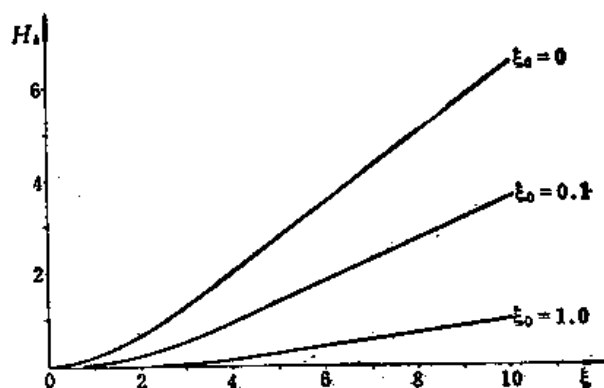


图4-15 特征函数  $H_b(\xi_0, \xi)$

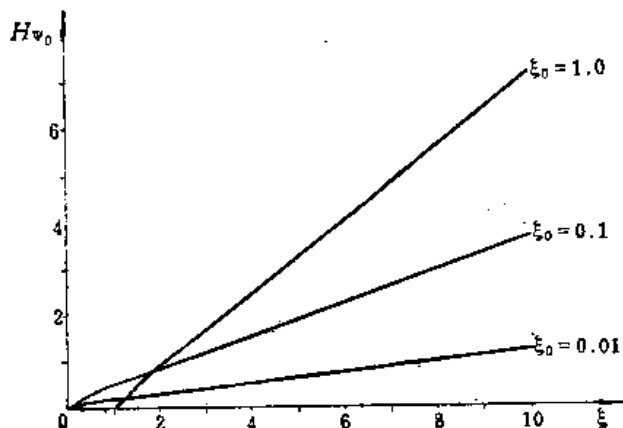


图4-16 特征函数  $H_{\psi_0}(\xi_0, \xi)$

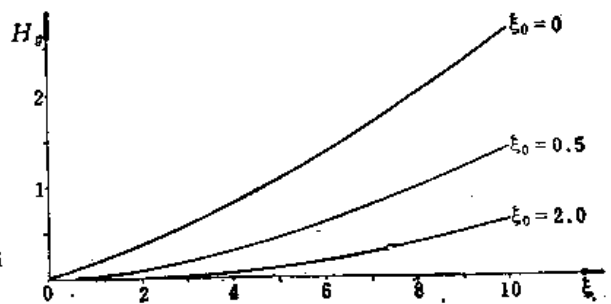


图4-17 特征函数  $H_g(\xi_0, \xi)$

$$H_q(\xi_0, \xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} R_q(\xi_0, \sigma) d\sigma \quad (4-2-40)$$

$$H_h(\xi_0, \xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} R_h(\xi_0, \sigma) d\sigma \quad (4-2-41)$$

$$H_{\psi_0}(\xi_0, \xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} R_{\psi_0}(\xi_0, \sigma) d\sigma \quad (4-2-42)$$

$$H_z(\xi_0, \xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} R_z(\xi_0, \sigma) d\sigma \quad (4-2-43)$$

于是, 可将各种扰动因素所引起的线偏差  $\Delta z$  用相应的特征函数表示。

### 一、在弹体不滚转的情况下

#### 1. 初始扰动角速度引起的线偏差

$$\Delta y_{\dot{\theta}_0} = \dot{\theta}_0 \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} H_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-44)$$

#### 2. 推力偏心引起的线偏差

$$\Delta y_{h_T} = h_T \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{K^2} H_h(\xi_0, \xi) \quad (4-2-45)$$

#### 3. 质量偏心引起的线偏差

$$\Delta y_{h_e} = h_e \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{K^2} H_h(\xi_0, \xi) \quad (4-2-46)$$

#### 4. 推力偏斜引起的线偏差

$$\Delta y_{\varepsilon_T} = \varepsilon_T \frac{\lambda}{2\pi} H_r(\xi_0, \xi) \quad (4-2-47)$$

#### 5. 重力引起的弹道下沉

$$\Delta y_x = -\frac{g \cos \Theta_0}{a} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right) H_z(\xi_0, \xi) \quad (4-2-48)$$

### 二、在弹体滚转的情况下

#### 1. 推力偏心引起的线偏差

$$\Delta y_{h_T} = h_T \frac{\lambda a}{2\pi K^2 \omega_{x \cdot 0}} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} H_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-49)$$

#### 2. 质量偏心引起的线偏差

$$\Delta y_{h_e} = h_e \frac{\lambda a}{2\pi K^2 \omega_{x \cdot 0}} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} H_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-50)$$

$$\Delta y_{\psi_0} = \omega_{x \cdot 0} h_e \frac{\lambda}{2\pi v_0} H_{\psi_0}(\xi_0, \xi) \quad (4-2-51)$$

#### 3. 动不平衡引起的线偏差

$$\Delta y_{\varepsilon_D} = \omega_{x \cdot 0} \varepsilon_D \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} \cdot H_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-52)$$

### § 4-2-5 弹道方向角偏差同线偏差之间的相关性——偏差相关系数

在反坦克导弹起飞段弹道或助推段弹道上所发生的方向角偏差和线偏差不是相互独立的, 它们之间是由简单的积分关系式 (4-2-19) 联系起来的。因此, 如果某种扰动因素所

引起的弹道方向角偏差比较大，相应的线偏差也应该比较大。但是这种相关依存关系又不是简单的正比。这种相关依存关系对于反坦克导弹的设计工作是很重要的。

例如，由初始扰动角速度  $\dot{\theta}_0$  所产生的弹道线偏差，式 (4-2-44) 为

$$\Delta y_{\dot{\theta}_0} = \dot{\theta}_0 \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} H_q(\xi_0, \xi)$$

同时，相应的方向角偏差，由式 (4-2-24) 是

$$\Delta \Theta_{\dot{\theta}_0} = \dot{\theta}_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} R_q(\xi_0, \xi)$$

于是二者之比乃是

$$\frac{\Delta y_{\dot{\theta}_0}}{\Delta \Theta_{\dot{\theta}_0}} = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right) \frac{H_q(\xi_0, \xi)}{R_q(\xi_0, \xi)} = \frac{\lambda}{2\pi} K_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-53)$$

其中  $K_q(\xi_0, \xi) = \frac{H_q}{R_q}$ ，定义为初始扰动的偏差相关系数。

类似地，可有

$$\frac{\Delta y_h}{\Delta \Theta_h} = \frac{\lambda}{2\pi} K_h(\xi_0, \xi) \quad (4-2-54)$$

其中， $K_h(\xi_0, \xi) = H_h/R_h$ ，定义为推力偏心的偏差相关系数。

这两个偏差相关系数的曲线示于图 4-18 及 4-19 中。

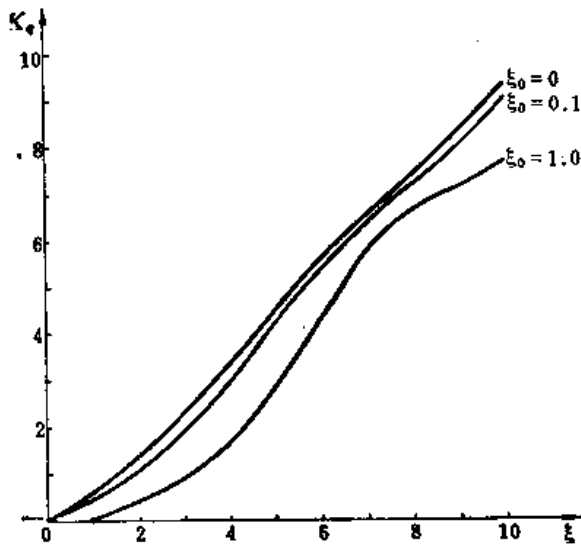


图4-18 初始扰动的偏差相关系数  $K_q(\xi_0, \xi)$

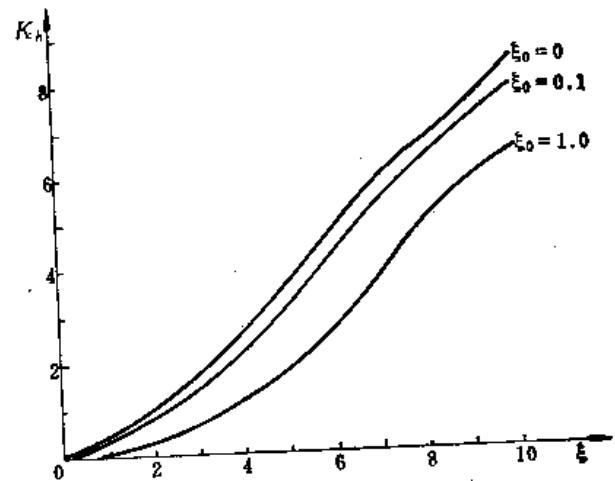


图4-19 推力偏心的偏差相关系数  $K_h(\xi_0, \xi)$

类似地还有

$$\frac{\Delta y_g}{\Delta \Theta_g} = \frac{\lambda}{2\pi} K_g(\xi_0, \xi)$$

其中  $K_g(\xi_0, \xi)$ ——重力的偏差相关系数，定义为

$$K_g(\xi_0, \xi) = \frac{H_g(\xi_0, \xi)}{R_g(\xi_0, \xi)}$$

其曲线示于图 4-20。

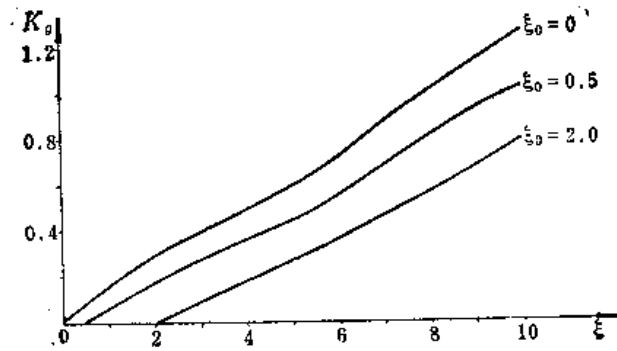


图4-20 重力的偏差相关系数

#### § 4-2-6 启控点偏差及散布的计算

有些扰动因素是有可能在发射前以一定的准确性测量出来的。例如，质量偏心及动不平衡的大小及方向，定常的平均风速的大小及方向等扰动因素，都能事前被测出。因此，有可能在发射前以一定的准确性预测这些因素所引起的弹道偏差的大小及方向。此外，重力对弹道的扰动作用所引起的偏差也能预测。

对于这些确定型的弹道偏差，应该尽可能准确地计算出来，并在设计工作中采取必要的措施予以补偿或予以限制。例如，赋予发射定向器以适当的发射角以补偿重力引起的起飞段弹道下沉，以及限制发射时的最大允许平均风速、限制弹体的质量偏心 and 动不平衡度等。为了使所采取的技术措施奏效，应充分利用电子计算机来计算相应的弹道偏差。

还有另一类非确定型的扰动因素，如初始扰动、推力偏心及推力偏斜、随机风速以及在调整质量偏心及动不平衡的工艺过程中所必不可免的公差等，这些扰动因素所引起的弹道偏差是随机型的。

如果已知各种扰动因素的统计特征，则有可能在电子计算机上计算反坦克导弹在启控点处的弹道散布。但是，由于我们经常对扰动因素的统计特征缺少足够的了解，所以单纯依靠计算机的计算是不行的。这时往往需要依靠理论分析同实验验证相结合的方法。在这种情况下，上面举出的表明诸扰动因素同弹道散布之间关系的简单公式是很有用的。

影响散布的诸因素本身也是由多种随机性的原因激起的。因此，它们的分布服从正态律。所以，在计算这些因素的总影响时，应利用平方相加的规律。若以  $\sigma_{\dot{\theta}_0}$ 、 $\sigma_{h_T}$ 、 $\sigma_{h_0}$ 、 $\sigma_{\omega}$ 、……表示诸扰动因素的标准偏差，那么利用前述诸公式就可计算出由这些因素所引起的弹道散布的标准偏差，例如，由  $\dot{\theta}_0$  及  $h_T$  的散布所引起的弹道倾角  $\Theta$  散布的标准偏差  $\sigma_{\Theta_0}^e$  及  $\sigma_{\Theta_T}^e$  就是

$$\sigma_{\Theta_0}^e = \sigma_{\dot{\theta}_0} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} R_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-55)$$

$$\sigma_{\Theta_T}^e = \sigma_{h_T} \frac{\lambda}{2\pi K^2} R_h(\xi_0, \xi) \quad (4-2-56)$$

再如，由  $\dot{\theta}_0$  及  $h_T$  所引起的弹道高度  $y$  散布的标准偏差  $\sigma_{y_0}^y$  及  $\sigma_{y_T}^y$  就是

$$\sigma_{y_0}^y = \sigma_{\dot{\theta}_0} \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} H_q(\xi_0, \xi) \quad (4-2-57)$$

$$\sigma_{h_T}^y = \sigma_{h_T} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{K^2} H_h(\xi_0, \xi) \quad (4-2-58)$$

于是, 总的弹道倾角 $\Theta$ 及弹道高度 $y$ 散布的标准偏差 $\sigma_\Theta$ 及 $\sigma_y$ 就是

$$\sigma_\Theta = \sqrt{(\sigma_{\dot{\theta}_0}^\Theta)^2 + (\sigma_{h_T}^\Theta)^2 + \dots} \quad (4-2-59)$$

$$\sigma_y = \sqrt{(\sigma_{\dot{y}_0}^y)^2 + (\sigma_{h_T}^y)^2 + \dots} \quad (4-2-60)$$

在影响弹道散布的诸随机因素中, 分开来看, 如果某种扰动因素单独作用时将引起最强烈的弹道散布; 那么, 这种因素在同其它诸因素综合地作用时, 就将表现为居于支配地位的因素。通过下面的例子可以看出这种较强的因素趋于支配的因素的原因。

例如, 假若有一个无控发射的导弹, 其初始扰动所引起的弹道方向角散布的标准偏差是 $\sigma_{\dot{\theta}_0}^\Theta = 0.2^\circ = 0.0035$  弧度, 而起飞发动机推力偏心所引起的方向角散布的标准偏差是 $\sigma_{h_T}^\Theta = 1^\circ = 0.0175$  弧度, 即相差为 5 倍, 其他扰动因素略而不计。那么, 总的弹道方向角散布的标准偏差就是

$$\sigma_\Theta = \sqrt{(\sigma_{\dot{\theta}_0}^\Theta)^2 + (\sigma_{h_T}^\Theta)^2} = \sqrt{(0.2)^2 + (1.0)^2} = 1.02^\circ$$

由此可知, 在分别计算时, 两种随机因素的作用强烈程度只差 5 倍; 但在综合作用时, 较强的因素成为决定性的因素, 另一种因素的作用竟然退居为 1/50。

这一现象可用以下更普遍的方式说明: 若有数种随机的扰动因素, 皆服从正态分布律, 其作用效果的标准偏差分别为 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , 并且满足条件

$$\sigma_0 > \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-2-61)$$

于是, 诸因素综合作用效果的标准偏差就是

$$\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n (\sigma_i)^2} = \sigma_0 \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^2}$$

用台劳级数展开上式右端, 即可证明下式成立:

$$\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (4-2-62)$$

但在(4-2-61)式的前提之下, 经常能使

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^2 \ll 1$$

这时, 就可以采用下面的近似估计式

$$\sigma \approx \sigma_0$$

在无控火箭及反坦克导弹的无控起飞段, 通常情况下, 起飞发动机的推力偏心是起主导作用的扰动因素。如果采用了使弹体低速滚转的措施来降低推力偏心的扰动作用, 那么起始扰动的影响就会有所加强。所以, 一般地, 我们只需考虑这两种随机扰动因素对弹道



散布的影响就行了。

#### § 4-2-7 反坦克导弹启控点的散布域

所谓“散布域”并不是“散布区域”。它们是完全不同的两个概念。

人们常说的“散布区域”是指在靶场试验中，弹着点在地面上或靶板上的散布图象所占的地域，即弹道散布的线偏差在俯仰和偏航（或纵、横）两个方向上的可能范围。这个概念是一个相当直观的概念。

这里要说的散布域，是一个更抽象的概念。它所表明的是反坦克导弹的弹道在启控点处的角偏差和线偏差之间的关系。具体地讲，如果先只考虑弹体在俯仰方向上的弹道偏差，并且用其线偏差 $y$ 及角偏差 $\Theta$ 两个参量来描述这个弹道偏差的“状态”，那么就可以用一个平面图形来从几何上反映这个状态。这个图形的横坐标是弹道的方向角偏差 $\Theta$ ，纵坐标是无量纲的线偏差 $\tilde{y}$ （ $\tilde{y} = y \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$ ），由这两个坐标所规定的平面称为“相平面”。相平面上的任一点都确定了弹道的一种可能的俯仰偏差的状态。对于任何一种型号的反坦克导弹来说，它的启控点处的弹道散布的状态乃是多次发射中弹道偏差的状态的集合；它们在 $(\Theta, \tilde{y})$ 相平面上表现为一个点集，这就是该种反坦克导弹的启控点散布域。分析这个散布域的特征，对于启控点的选择及调整工作是很重要的。

由于在反坦克导弹的情况中，俯仰和偏航两个方向的散布特征是大体上相等的。所以通常只需研究其中一个方向的散布情况即可。但考虑到反坦克导弹在俯仰方向上的散布有可能导致导弹在启控点前后触地坠毁，这一问题比偏航散布的重要性更大。因此，应该着重研究俯仰散布的问题。

在影响弹体散布的诸因素中，通常情况下，推力偏心 $h_T$ 和初始扰动 $\dot{\theta}_0$ 是两个首先要注意的因素。在弹体不滚转的情况下，推力偏心往往表现为支配的因素；在低速滚转的情况下，初始扰动可能上升为支配的因素。然而，由于它们的标准偏差值 $\sigma_{h_T}$ 和 $\sigma_{\dot{\theta}_0}$ 是很难准确获得的，因此，按公式直接计算它们对弹道散布的影响也是很难获得准确结果的。这种情况迫使我们去进行实弹飞行试验，以求直接获得弹道散布的数据。飞行实验可以这样进行：在弹道的启控点位置上设置一个立靶，对反坦克导弹的实验弹进行无控发射，于是在立靶上即可获得一组弹着点的随机分布，从而可以获得弹道线偏移散布的标准偏差 $\sigma_y$ 。这一数据是多种随机扰动因素作用的总效果，主要是推力偏心及初始扰动作用的综合效果。关于弹道角偏差散布的数据却只能通过高速摄影来获得，然而，这一方法的准确度却低得多。不过，我们已经有了偏差相关系数 $K_h$ 及 $K_{\dot{\theta}}$ 的知识，可以把偏差相关系数的概念同散布域的概念结合起来处理这个问题。具体地说，由随机的初始扰动 $\dot{\theta}_0$ 所引起的弹道偏差在启控点的全部可能状态，都将落在 $(\Theta, \tilde{y})$ 相平面中的一条直线上（如图4-21中的直线B）。这条直线通过原点，并且其斜率就是该种导弹在弹道的启控点处的初始扰动偏差相关系数 $K_{\dot{\theta}}(\xi_0, \xi)$ 。类似地，由随机的推力偏心 $h_T$ 所引起的弹道偏差在启控点的全部可能状态，都将落在以推力偏心相关系数 $K_h(\xi_0, \xi)$ 为斜率且通过原点的直线上，如图4-21中的直线A。

前面由实弹射击已能获得弹着点在 $y$ 方向的散布规律，若以散布中心为原点，则散布

的标准偏差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}{n-1}}$$

其中,  $n$  为弹着点数。按一般做法取  $\pm 3\sigma$  做为弹着点偏差的边界值, 即  $y_{\max} = 3\sigma$ 。于是在  $(\Theta, \tilde{y})$  相平面上可以做出两条平行直线  $\tilde{y} = \pm 3\sigma \frac{2\pi}{\lambda}$ 。这样, 启控点处弹道散布的状态  $(\Theta, \tilde{y})$  就将基本上位于由这两条直线所决定的区域内 (大约有 0.3% 的“野弹”, 其散布状态可能位于此带域之外)。如果推力偏心是唯一的随机扰动因素, 则启控点散布域就是  $A_1A_2$  线段; 如果初始扰动是唯一的因素, 则启控点散布域就是  $B_1B_2$  线段。在上述两个随机因素的综合作用下, 弹道在启控点处的偏差状态在相平面上将位于直线段

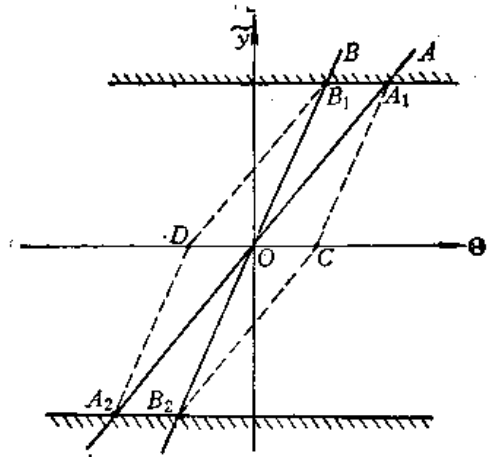


图4-21 启控点散布域

$A_1A_2$  和  $B_1B_2$  之间; 哪一种扰动作用更强, 状态点就靠近同该种扰动相对应的那一条直线。如果推力偏心同初始扰动的作用方向是一致的, 那么弹道在启控点处的散布状态  $(\Theta, \tilde{y})$  将位于相平面的三角形  $OA_1B_1$  或  $OA_2B_2$  之中; 如果这两个扰动因素的作用是异向的, 那么启控点的弹道散布状态  $(\Theta, \tilde{y})$  将位于相平面的四边形  $OA_1CB_2$  或  $OA_2DB_1$  之中 ( $A_1C \parallel B_1B_2, B_1D \parallel A_1A_2$ )。因此, 几乎全部启控点的弹道散布状态  $(\Theta, \tilde{y})$  都将位于六边形  $A_1B_1DA_2B_2C$  之中。这个六边形就是在推力偏心及初始扰动两种随机因素作用下的启控点的散布域。

如果导弹无滚转, 或在炮口附近的转速  $\omega_{x_0}$  很低, 那么, 推力偏心的扰动作用将是主要的。于是散布域将退化为靠近  $A_1A_2$  线的一个较小的多边形, 甚至可用  $A_1A_2$  线来代替启控点散布域。反之, 若导弹具有较高的炮口转速, 那么, 初始扰动就可能上升为主要的因素, 就有可能用  $B_1B_2$  线来近似代替启控点散布域。

## § 4-3 反坦克导弹的导入段的分析及设计

### § 4-3-1 反坦克导弹的导入段问题

反坦克导弹的发射位置及发射方向同瞄准线之间往往具有偏差。尤其是第一代反坦克导弹的发射位置及发射方向常严重偏离瞄准线。此外, 在导弹的起飞段上还不可避免地会发生弹道散布。因此, 导弹在启控点处的弹道位置通常不会恰好落在瞄准线上 (存在着位置偏差), 而且启控点处的速度方向也不会同瞄准线一致 (存在着角偏差)。尤其是对于第一代反坦克导弹来说, 启控点对于瞄准线的位置偏差及角偏差常常是很大的。

由于导弹在启控点处具有位置偏差及角偏差, 所以, 导弹在启控点处还不可能开始按三点法原则进行制导。为了能够按三点法原则进行制导, 必须首先把导弹从启控点制导到

瞄准线上来, 这个过程的弹道就是导入段。在导入段上, 导弹不可能以足够高的概率命中敌方目标。因此, 导入段愈短愈好, 但是总不可能取消导入段。

由于导入段的存在, 就引起了两方面的问题。

1. 若已经给定导弹系统的特征及参数 (可用法向过载、启控点的位置偏差及角偏差的分布特征等等), 那么, 这个导弹在导入段上的飞行时间、行程和距离也就被决定了。这时, 根据给定的导弹参数来求算导弹的射程范围和可能攻击区范围, 这是“正面问题”。

2. 若根据战术技术要求, 已经给定了导弹的最小有效射程, 从而限定了导入段的距离。那么, 只有恰当地设计导弹系统, 使它具有合适的参数, 才能恰好满足预定的射程范围等战术要求, 这就是“反面问题”。

为了解决以上两方面的问题, 必须首先确定导弹在导入段上的制导规则及运动规律。这种制导规则及相应的运动规律并不是唯一的。适当地选择和设计制导规则, 能够提高导弹的性能。

### § 4-3-2 第一代反坦克导弹的理想导入段弹道

#### 一、理想导入段的概念

在研究第一代导弹的导入段弹道时, 首先要假定目标静止, 因此瞄准线没有转动角速度, 其次还要假定导弹的速度大小不变, 射手在观测导弹对于瞄准线的偏差并相应地发出控制指令的过程中没有滞后和误差, 以及导弹对于这些指令的响应也没有滞后和误差。

所谓的理想导入段, 就是在上述假定条件之下, 导弹以最大的可用过载进行机动飞行, 力图尽快地消除导弹相对于瞄准线的位置偏差以及导弹速度方向相对于瞄准线的角偏差, 以便在最短的时间和距离内实现三点法导引的飞行过程。

假定导弹在水平平面内运动(见图 4-22), 设  $\overline{OAB}$  为瞄准线,  $A_0$  为启控点,  $A_0A = z_0$  为启控点的位置偏差;  $\Psi_0$  为启控点处导弹速度方向与瞄准线方向之间的角度偏差。这里考虑的是  $\Psi_0$  与  $z_0$  偏向同一边的情况。

将导弹导入瞄准线的理想过程是这样实现的: 启控开始, 射手先给导弹一个右转弯的全指令, 使导弹以最小转弯半径  $R$  围绕曲率中心  $O'$  盘旋。当达到  $A_1$  点时, 速度方向应与瞄准线一致; 但这时导弹距瞄准线的位置误差则为  $z_1$ , 达到了极大值。然后, 射手继续保持这个指令, 以便让导弹继续围绕曲率中心  $O'$  以最小曲率半径  $R$  做右转弯的盘旋, 于是导弹的位置偏差不断减小, 但速度方向却不能保持与瞄准线平行, 而是愈来愈向瞄准线的另一侧偏过去。假若射手一直让导弹这样运动下去, 导弹就将很快到达瞄准线上, 使位置误差成为零; 但这时, 导弹的速度方向却与瞄准线的方向有很大的偏差 (向右), 即使射手马上再给导弹一个左转弯的指令, 导弹仍将继续向右偏去, 绕一个圆弧才能回到瞄准线上来。结果就将使导弹在瞄准线左右两边

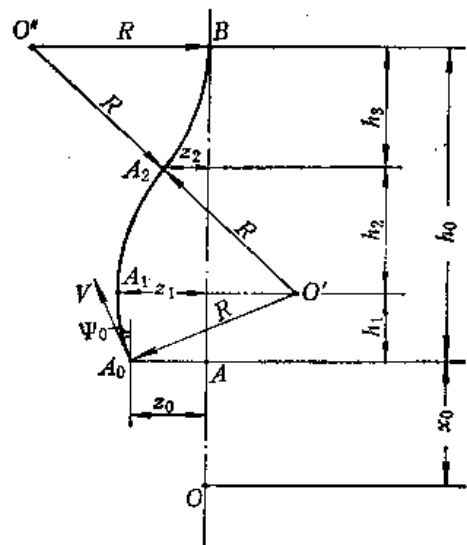


图4-22 理想导入段弹道

振荡不止，总不能稳定地沿着瞄准线飞行。为了避免这一现象出现，射手应在某个适当的  $A_2$  点提前变换指令方向，使导弹以  $O'$  为曲率中心向左转弯。如果这个  $A_2$  点的位置恰当，就能使导弹在  $B$  点处到达瞄准线，同时其速度方向也恰好与瞄准线一致。这样的  $A_2$  点，就称为“理想拐点”。

在目标静止不动而且导弹以等速飞行的情况下，理想拐点  $A_2$  的位置很容易确定。若  $z_2$  为理想拐点  $A_2$  距瞄准线的位置偏差，则应使  $z_2 = -\frac{1}{2}z_1$ （理由很明显，因为必须使弧段  $\widehat{A_1A_2}$  与  $\widehat{A_2B}$  在  $A_2$  点两边对称，才能既使  $B$  点落在瞄准线上，同时又使导弹在  $B$  点的速度方向与瞄准线一致——即  $\widehat{A_2B}$  与瞄准线在  $B$  点相切）。

## 二、根据转弯半径 $R$ 求导入段距离及飞行时间

现在来求，在转弯半径  $R$  为已定的条件之下，导入段的飞行距离  $h_0$ （简称“导入距离”）及相应的飞行时间。为此应将导入弹道分解成三段： $\widehat{A_0A_1}$ 、 $\widehat{A_1A_2}$  及  $\widehat{A_2B}$ ；与它们相应的飞行距离是  $h_1$ 、 $h_2$  及  $h_3$ 。

在  $\widehat{A_0A_1}$  段（见图 4-23）有

$$h_1 = R \sin \Psi_0 \quad (4-3-1)$$

而导弹飞过  $\widehat{A_0A_1}$  所需的时间为

$$t_{\widehat{A_0A_1}} = \frac{\widehat{A_0A_1}}{v} = \frac{R \Psi_0}{v} \quad (4-3-2)$$

此外， $A_1$  点之位置偏差为

$$z_1 = \overline{A_1B_1} = z_0 + \overline{A_1C_1} = z_0 + R(1 - \cos \Psi_0) \quad (4-3-3)$$

在  $\widehat{A_1A_2}$  段及  $\widehat{A_2B}$  段（参见图 4-24），显然对于  $A_2$  点来说， $\widehat{A_1A_2}$  及  $\widehat{A_2B}$  是扭对称的，故  $h_2 = h_3$ 。此外确定  $A_2$  点位置的条件是  $z_2 = -\frac{z_1}{2}$ ，所以若  $\overline{A_2C_2} \perp \overline{A_1B_1}$ ，则  $C_2$  点为  $\overline{A_1B_1}$

的中点，且  $\overline{A_1C_2} = -\frac{z_1}{2}$ 。因此，由直角三角形  $A_1C_2A_2$  可得

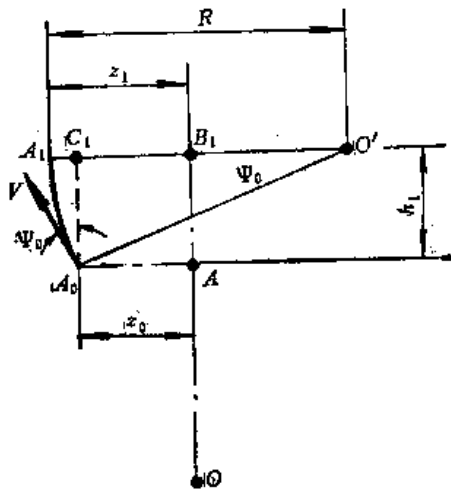


图4-23 导入段的一部分

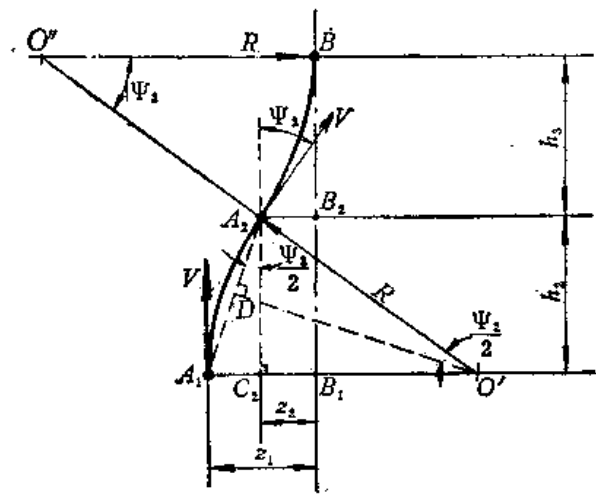


图4-24 导入段的一部分

$$h_2 = \overline{A_2 C_2} = \sqrt{A_1 A_2^2 - A_1 C_2^2}$$

即

$$h_2 = h_3 = \sqrt{A_1 A_2^2 - \left(\frac{z_1}{2}\right)^2} \quad (4-3-4)$$

再做  $\overline{A_1 A_2}$  的中垂线  $\overline{OD}$ , 可见

$$\angle A_1 A_2 C_2 = \angle A_1 O' D = \frac{\Psi_2}{2}$$

∴

$$\frac{\overline{A_1 D}}{R} = \frac{\overline{A_1 C_2}}{A_1 A_2} = \sin \frac{\Psi_2}{2}$$

但

$$\overline{A_1 D} = \frac{\overline{A_1 A_2}}{2}$$

$$\overline{A_1 A_2} = 2 R \cdot \overline{A_1 C_2} = R \cdot z_1$$

代入 (4-3-4) 式中, 就得

$$h_2 = h_3 = \sqrt{R z_1 - \left(\frac{z_1}{2}\right)^2} \quad (4-3-5)$$

再将式 (4-3-3) 中的  $z_1$  代入上式, 得到

$$h_2 = h_3 = R \sqrt{1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R} - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R}\right)^2} \quad (4-3-6)$$

同时, 导弹飞过  $\widehat{A_1 A_2}$  (或  $\widehat{A_2 B}$ ) 的时间为

$$t_{\widehat{A_1 A_2}} = t_{\widehat{A_2 B}} = \frac{\widehat{A_1 A_2}}{v} = \frac{R \Psi_2}{v}$$

而由  $\triangle A_2 C_2 O'$  可知

$$\Psi_2 = \cos^{-1} \left( \frac{R - \frac{z_1}{2}}{R} \right) = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{z_1}{2R} \right)$$

将 (4-3-3) 式中之  $z_1$  代入  $\Psi_2$  式中, 就得

$$\Psi_2 = \cos^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z_0}{R} + 1 - \cos \Psi_0 \right) \right] = \cos^{-1} \left( \frac{1 + \cos \Psi_0 - \frac{z_0}{R}}{2} \right) \quad (4-3-7)$$

于是

$$t_{\widehat{A_1 A_2}} = t_{\widehat{A_2 B}} = \frac{R}{v} \cos^{-1} \left( \frac{1 + \cos \Psi_0 - \frac{z_0}{R}}{2} \right) \quad (4-3-8)$$

现在总起来看导入段弹道的参量, 可得

$$h_0 = h_1 + h_2 + h_3$$

$$\text{即 } h_0 = R \left[ \sin \Psi_0 + 2 \sqrt{1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R} - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R}\right)^2} \right] \quad (4-3-9)$$

上式较复杂, 可在一定的条件下进行化简。若  $\Psi_0$  不大 (例如, 当  $\Psi_0 < 6^\circ \approx 0.1$  弧度时), 则

可得到  $\sin \Psi_0 \approx \Psi_0$  及  $\cos \Psi_0 \approx 1 - \frac{\Psi_0^2}{2}$ 。此外若同时还存在  $z_0 \ll R$  的条件, 则可将 (4-3-9) 式中根号内的平方项略去, 在这些条件下可近似得到

$$h_0 \approx R \left[ \Psi_0 + 2 \sqrt{\frac{\Psi_0^2}{2} + \frac{z_0}{R}} \right] \quad (4-3-10)$$

此外, 总的导入段飞行时间为

$$t_{\text{导}} = t_{A_0 A_1} + t_{A_1 A_2} + t_{A_2 B}$$

$$\text{即 } t_{\text{导}} = \frac{R}{v} \left[ \Psi_0 + 2 \cos^{-1} \left( \frac{1 + \cos \Psi_0 - \frac{z_0}{R}}{2} \right) \right] \quad (4-3-11)$$

### 三、根据导入段距离求需用过载

上面是对于具有已定的转弯半径  $R$  的导弹求出了它的理想导入段弹道。下面再来看反面的问题——在已经规定导入段距离  $h_0$  的情况下, 应怎样计算导入段的需用过载 (简称为  $n$ )。

将 (4-3-9) 式两边用  $R$  除, 移项后再平方, 可得:

$$\left( \frac{h_0}{R} - \sin \Psi_0 \right)^2 = 4 \left[ 1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R} - \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R} \right)^2 \right]$$

展开后整理之, 就得到一个对于曲率  $\left( \frac{1}{R} \right)$  的二次方程式:

$$\frac{1}{R^2} (h_0^2 + z_0^2) - \frac{2}{R} (h_0 \sin \Psi_0 + z_0 + z_0 \cos \Psi_0) - 2(1 - \cos \Psi_0) = 0$$

将曲率  $\frac{1}{R}$  从中解出, 并弃去无实际意义的负根, 即得:

$$\frac{1}{R} = \frac{h_0 \sin \Psi_0 + z_0 (1 + \cos \Psi_0)}{(h_0^2 + z_0^2)} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2(1 - \cos \Psi_0)(h_0^2 + z_0^2)}{(h_0 \sin \Psi_0 + z_0 + z_0 \cos \Psi_0)^2}} \right] \quad (4-3-12)$$

若  $z_0 \leq \frac{h_0}{10}$ , 并且  $\Psi_0 \leq \frac{1}{10}$  弧度 (这是常见的情况); 则与  $h_0^2$  相比  $z_0^2$  不到  $h_0^2$  的 1/100 可略

去之; 由于  $\sin \Psi_0 \approx \Psi_0$ ,  $\cos \Psi_0 \approx 1 - \frac{\Psi_0^2}{2} \approx 1$ , 因而可以得到近似公式

$$\frac{1}{R} \approx \frac{h_0 \Psi_0 + 2z_0}{h_0^2} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{(h_0 \Psi_0)^2}{(h_0 \Psi_0 + 2z_0)^2}} \right]$$

于是导入段的需用过载为

$$n = \frac{v^2}{gR} \approx \frac{v^2}{gh_0} \left( \Psi_0 + \frac{2z_0}{h_0} \right) \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\left( 1 + \frac{2z_0}{h_0 \Psi_0} \right)^2}} \right] \quad (4-3-13)$$

这个近似式仍较复杂, 为便于应用, 还可以设法简化。注意式中方括号内的数值是  $\frac{2z_0}{h_0 \Psi_0}$  的函

数 (即与启控点的位置偏差对于速度方向角偏差的比值有关), 当  $\frac{2z_0}{h_0 \Psi_0}$  在  $(0, \infty)$  区间内变

化时, 有

$$\left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2z_0}{h_0\Psi_0}\right)^2}} \right] = 2 \sim 2.414 \quad (4-3-14)$$

图 4-25 中绘出了 (4-3-14) 式左端组合参数的变化曲线。由图可知, 这个参数的变化范围在  $2 \sim 2.414$  之间, 并且变化较平缓。

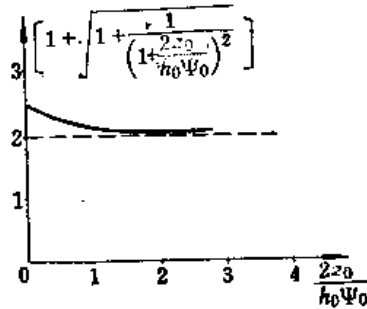


图 4-25 组合参数  $\left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2z_0}{h_0\Psi_0}\right)^2}} \right]$

事实上, 在启控点的位置偏差  $z_0$  及方向偏差  $\Psi_0$  之间是有相关性的。这种相关性又可分为两种情况。

第一种情况, 导弹的发射方向同目标的出现方向之间有很大的偏差角  $\Psi_0$ 。这时, 可以略去起飞段的弹道散布, 则启控点的位置偏差就是

$$z_0 = s_R \cos \theta_0 \sin \Psi_0 \approx s_R \Psi_0$$

其中  $s_R$ ——起飞段行程。

在通常情况下,  $s_R \ll h_0$ ; 因此, 相对参量  $\frac{2z_0}{h_0\Psi_0} \ll 1$ 。在这种情况下, 可以近似认为

$$n \approx 2.4 \frac{v^2}{gh_0} \cdot \frac{z_0}{h_0} \left( 2 + \frac{h_0\Psi_0}{z_0} \right)$$

第二种情况, 导弹的发射方向同目标的出现方向基本一致。这时, 我们应该主要考虑起飞段弹道散布。由于启控点散布域在  $(\Theta, \tilde{y})$  或  $(\Psi, \tilde{z})$  相平面中的主要方向的斜率是

$\frac{z_0}{\Psi_0} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$ , 所以, 通过简单的换算就可知道  $\frac{2z_0}{h_0\Psi_0}$  之值,

$$\frac{2z_0}{h_0\Psi_0} = \left( \frac{z_0}{\Psi_0} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \right) \frac{\lambda}{\pi h_0}$$

这样, 利用图 4-25 所示之曲线可以适当地决定一个在  $2.0 \sim 2.4$  之间的系数, 从而计算出导入段的需用过载。

#### 四、若干实际问题

在以上关于导入段的研究中, 有若干因素没有考虑, 必须提起注意;

1. 没有考虑导弹本身可能有的加速运动。

2. 没有考虑目标可能有的运动。目标的运动将导致瞄准线旋转, 从而在导入距离已定的条件下, 可能导致需用过载的增大; 或者在可用过载已定的条件下, 导致导入距离增长。

3. 实际的导弹对于控制指令的响应是有滞后和有过渡过程的。此外，射手很难准确判定理想拐点的位置。

因此，实际的导入段不会是理想的。

事实上，只有当导弹的发射方向同目标出现的方向之间偏差很大时，射手在操纵导弹的初期，才会采用这种全指令大机动的操纵方法，以求在较短的时间内将导弹的位置及速度向量引导到瞄准线附近。但在导弹偏离瞄准线的程度不太大的情况下，射手最好采用比较平缓的操纵导弹的方法（见 § 4-3-5）。

### § 4-3-3 第一代反坦克导弹的最小有效射程和可能攻击区

#### 一、最小有效射程

反坦克导弹的“最小有效射程”就是有效射程的下界限。如果目标出现在比这个下界限还小的距离上，射手就不可能准确地将导弹导向目标。因此，有时又称最小有效射程为“死区”。为了提高导弹的战斗效能，就要尽量缩小死区。

由图 4-26，可见最小有效射程  $x_{\min}$  为

$$x_{\min} = x_{\text{起飞}} + x_{\text{压低}} + x_{\text{导入}} \quad (4-3-15)$$

其中  $x_{\text{起飞}}$ ——起飞段的水平距离；

$x_{\text{压低}}$ ——将导弹在铅直面上进行俯仰导引，从起飞段终点的高度压低到 2~3 米的高度所需的压低段水平距离（对于某些导弹来说，起飞段很低，就不需要压低段）；

$x_{\text{导入}}$ ——在偏航方向上对导弹进行导引，直至导入瞄准线所需的导入段距离。

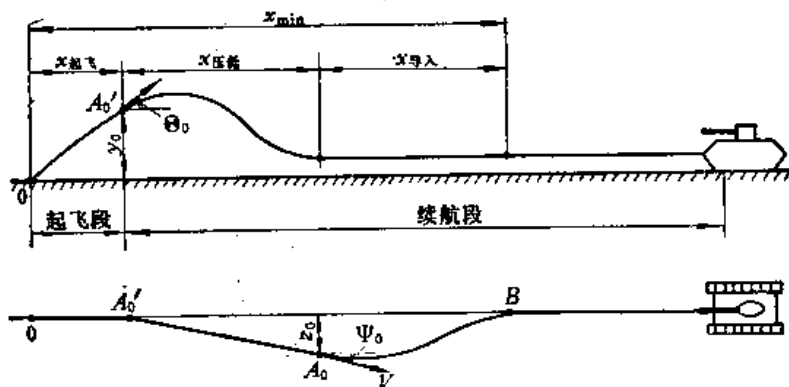


图4-26 最小有效射程  $x_{\min}$  的构成示意图

压低段实际上也是一种导入段，所以对  $x_{\text{压低}}$  及  $x_{\text{导入}}$  的计算，都是利用式 (4-3-9) 或式 (4-3-10)。

**例题 4-1** 某导弹的起飞段终点参数是， $x_{\text{起飞}}=30$  米， $y_0=6$  米， $\theta_0=6^\circ$ ， $t_{\text{起飞}}=0.5$  秒， $v=100$  米/秒，且在续航段维持此速度不变，在压低段进行俯仰机动飞行的过载为  $n=1.0$ （维持平飞的过载  $n_{\text{平飞}}=1.0$  未计算在内）。

求 压低段的距离  $x_{\text{压低}}$ 。

于是，在铅垂平面上的转弯半径为

$$R = \frac{v^2}{ng} = \frac{100^2}{1 \times 9.8} \approx 1000 \text{ 米}$$



并且,

$$\frac{\Delta y_0}{R} = \frac{y_0 - y_{\text{目标}}}{R} = \frac{6 - 3}{1000} = 0.003$$

此外,

$$\Theta_0 = 6^\circ = 6 \times 0.01745 \text{ 弧度} = 0.105 \text{ 弧度}$$

利用式 (4-3-10), 用  $x_{\text{压低}}$ 、 $\Delta y_0$  及  $\Theta_0$  取代式中的  $h_0$ 、 $z_0$  及  $\Psi_0$ , 可得

$$x_{\text{压低}} = R \left[ \Theta_0 + 2 \sqrt{\frac{\Theta_0^2}{2} + \frac{\Delta y_0}{R}} \right] = 1000 \left[ 0.105 + 2 \sqrt{\frac{0.105^2}{2} + 0.003} \right] = 289 \text{ 米}$$

此外, 计算压低段的飞行时间可利用式 (4-3-11), 即

$$\begin{aligned} t_{\text{压低}} &= \frac{R}{v} \left[ \Theta_0 + 2 \cos^{-1} \left( \frac{1 + \cos \Theta_0 - \frac{\Delta y_0}{R}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1000}{100} \left[ 0.105 + 2 \cos^{-1} \left( \frac{1 + 0.995 - 0.003}{2} \right) \right] = 2.8 \text{ 秒} \end{aligned}$$

**例题 4-2** 同上导弹, 假定在起飞段终点有速度方向角偏差  $\Psi_0 = 2^\circ$ , 在导入段所采用的机动过载为  $n = 2$ 。

求 死区  $x_{\text{min}}$

对于偏航导引来说, 压低段终点才是偏航运动的启控点。假设导弹在压低段上运动时航向角没有变化, 于是在压低段终点的航向角偏差仍为  $\Psi_0 = 2^\circ$ , 并且其位置偏差为  $z_0 = x_{\text{压低}}$ ,  $\Psi_0 = 289 \times 2 \times 0.01745 = 10.1$  米。

转弯半径为  $R = \frac{v^2}{gn} = \frac{100^2}{9.8 \times 2} \approx 500$  米。仍利用式 (4-3-10) 得到

$$\begin{aligned} x_{\text{导入}} &= R \left( \Psi_0 + 2 \sqrt{\frac{\Psi_0^2}{2} + \frac{z_0}{R}} \right) = 500 \left( 2 \times 0.01745 + 2 \sqrt{2 \times (0.01745)^2 + \frac{10.1}{500}} \right) \\ &= 161 \text{ 米} \end{aligned}$$

于是死区为

$$x_{\text{min}} = x_{\text{起飞}} + x_{\text{压低}} + x_{\text{导入}} = 30 + 289 + 161 = 480 \text{ 米}$$

对于第一代反坦克导弹来说, 最小有效射程通常都是针对着目标出现于导弹发射方向的正前方的战况而言的。因此, 启控点对于瞄准线的偏差, 通常是不太大的。在这种情况下, 射手也可以考虑采用线性的导入操作方法。此外, 对于熟练的射手来说, 也可以将铅直平面上的压低段及水平平面上的导入段结合在一起, 同时进行俯仰方向和偏航方向的操纵; 这时, 射手发出的指令称为“复合指令”。

## 二、可能攻击区 (第一代反坦克导弹)

先进的第二代反坦克导弹大都是装在发射管中, 从射手肩上射出或从车辆中射出; 它的发射方向基本上与目标的出现方向一致。对于这类导弹, 只有“死区”的问题, 无所谓“可能攻击区”问题。

第一代反坦克导弹大都直接放在地上或装在简单的发射架上发射, 而且射手大多位于远离导弹发射阵地的瞄准阵地 (控制站) 上; 导弹在阵地上的放列方向是预置的, 因此发

射方向同目标的出现方向之间可能有很大的偏差。在这种情况下，才提出了“可能攻击区”的问题。

如果目标不是恰好出现在预定的“基准射向”上，则导弹必须经过较长的导入段才能进入瞄准线，这样，在这个方向上的死区就要比基准射向上的死区更大。最小有效射程随着目标的方位角而变化，这就确定了“可能攻击区”的下边界，如图 4-27 中的  $B$  线。同时，导弹所能飞达的最远距离也随着目标方位角而变化，这样就确定了可能攻击区的上边界，如图 4-27 中的  $D$  线。

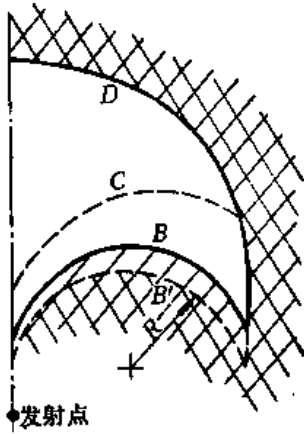


图4-27 可能攻击区及可能飞达区示意图  
 $B'$ —可能飞达区的下边界； $B$ —可能攻击区的下边界；  
 $C$ —准确攻击区的下边界； $D$ —可能攻击区的上边界。

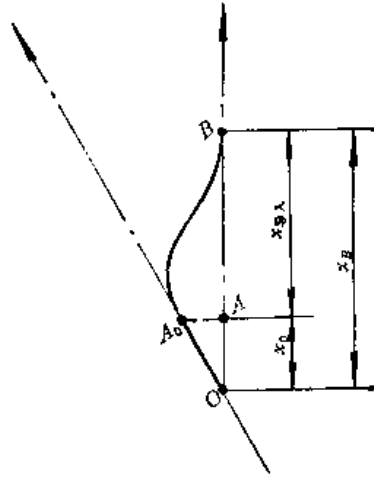


图4-28 计算可能攻击区的下边界点

下面用例子来说明可能攻击区的计算方法。在这种计算中一般都是假定目标静止不动。

**例题 4-3** 同例题 4-1 中的导弹，但取导入段的可用过载为  $n = 2.0$ ，发动机工作时间为 20 秒。要求算出它的可能攻击区在方位角  $30^\circ$  方向上的下边界点及上边界点。

1. 计算下边界 ( $B$ ) 点：

不考虑启控点  $A_0$  处的随机散布偏差。如图 4-28 所示，原始数据为

$$\Psi_0 = 30^\circ$$

$$z_0 = \overline{OA_0} \cdot \sin 30^\circ = (30 + 289) \cdot \sin 30^\circ = 160 \text{ 米}$$

$$x_0 = \overline{OA_0} \cdot \cos 30^\circ = 278 \text{ 米}$$

$$R = \frac{v^2}{gn} = \frac{100^2}{9.8 \times 2} = 500 \text{ 米}$$

利用式 (4-3-9)

$$\begin{aligned} x_{B\lambda} &= R \left[ \sin \Psi_0 + 2 \sqrt{\left( 1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \Psi_0 + \frac{z_0}{R} \right)^2} \right] \\ &= 500 \left[ 0.5 + 2 \sqrt{\left( 1 - 0.866 + \frac{160}{500} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 - 0.866 + \frac{160}{500} \right)^2} \right] = 800 \text{ 米} \end{aligned}$$

故下边界点至发射点的距离是

$$x_B = x_0 + x_{B\lambda} = 278 + 800 = 1078 \text{ 米}$$

2. 计算上边界D点:

由例题 4-1 已知,  $t_{起飞} = 0.5$  秒,  $t_{压低} = 2.8$  秒, 再计算  $t_{导入}$ , 仍利用式 (4-3-11)。注意

$$\Psi_0 = 30^\circ \times \frac{0.01745}{1} = 0.5235 \text{ 弧度}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad t_{导入} &= \frac{R}{v} \left[ \Psi_0 + 2 \cos^{-1} \left( \frac{1 + \cos \Psi_0 - \frac{z_0}{R}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{500}{100} \left[ 0.5235 + 2 \cos^{-1} \left( \frac{1 + 0.856 - 0.32}{2} \right) \right] = 9.5 \text{ 秒} \end{aligned}$$

故从 B 点起, 导弹尚能飞行的时间是

$$\begin{aligned} t_{BD} &= 20 \text{ 秒} - t_{起飞} - t_{压低} - t_{导入} \\ &= 20 - 0.5 - 2.8 - 9.5 = 7.2 \text{ 秒} \end{aligned}$$

从 B 点起, 导弹尚能飞行的距离是

$$x_{BD} = v t_{BD} = 100 \times 7.2 = 720 \text{ 米}$$

上边界点至发射点的距离是

$$x_D = x_B + x_{BD} = 1078 + 720 = 1798 \text{ 米}$$

另外, 还有一种划定“可能攻击区”下边界的方法, 即从偏航运动的启控点起, 给导弹发出最大的向右 (或向左) 指令, 使导弹以最小转弯半径盘旋, 于是导弹的航迹将如图 4-27 中的  $B'$  线, 划出一个半圆弧。有人把  $B'$  线称为“可能攻击区”的下边界。但应指出, 以  $B'$  线为下边界划出的区域, 只表明导弹能够飞到这里; 而无法使导弹在  $B'$  及  $B$  两条曲线之间的区域内稳定地沿着瞄准线飞行。所以, 在这块区域内很难使导弹命中目标, 事实上达不到攻击敌人之目的。所以, 实事求是地讲, 把  $B'$  线称为“可能飞达区域”的下边界才恰当。

最后还应指出, 虽然位于可能攻击区内之目标有可能被导弹击中, 但是, 在刚刚进入可能攻击区而且离下边界  $B$  较近的位置处, 命中概率将是相当低的。这是因为很难使导弹完全按理想的导入段弹道运动 (如 § 4-3-2 第四款所指出的), 往往在射手已经发出了一组导入指令后, 导弹仍然距瞄准线有一定的偏差, 而且大多是有一些“过调量”。于是, 不得不再发出一组较轻的导入指令。这样一来, 导弹就将在瞄准线附近“振荡”。这时导弹当然不会有太高的命中概率。在适当的操纵之下, 这种振荡应该是衰减的; 在经过一段时间之后, 就可以认为振荡已被消除, 但这时导弹已越过可能攻击区的下边界  $B$  相当远的距离, 而到达图 4-27 中曲线  $C$  的位置上。因此, 在曲线  $C$  与  $D$  之间的区域内才能达到比较高的命中概率。

#### § 4-3-4 第一代反坦克导弹的线性导入段弹道

##### 一、线性的导入操作方法

理想的导入操作方法要求射手以阶跃作用的方式向导弹发出指令, 并且在理想拐点处应该突然地变换指令方向。这种操作方法在实践中是难于掌握的。

还可以提出另外一种导入操作方法, 即线性的导入操作方法。这种方法要求射手, 根

据导弹相对于瞄准线的位置偏差的大小和方向，按线性规则来移动操纵手柄。就是说，射手应时时力求在俯仰及偏航两个方向上按下式来移动操纵手柄

$$\lambda_y(t) = -k_y^{\lambda} y(t) \quad (4-3-16)$$

$$\lambda_z(t) = -k_z^{\lambda} z(t) \quad (4-3-17)$$

式中  $\lambda_y$  及  $\lambda_z$ ——在俯仰及偏航方向上，操纵手柄被扳动的角度；

$k_y^{\lambda}$  及  $k_z^{\lambda}$ ——射手环节在俯仰及偏航两个方向上的放大系数；

$y$  及  $z$ ——导弹相对于瞄准线的位置偏差在俯仰及偏航两个方向上的分量。

这一操作方法可能是较易掌握的，但是对于导弹的制导系统必须提出一些特殊的设计要求。

## 二、线性导入段弹道的数学模型

当射手按线性的导入操作方法来操纵导弹时，所形成的导入段弹道，称为线性导入段弹道。为了便于叙述，先只讨论导弹的偏航运动。

假若，在偏航通道中，控制盒输出的控制指令的强度（以指令系数  $K_z$  代表）同操纵手柄的偏角  $\lambda_z$  是简单的线性关系，并且导弹机动飞行的过载  $n_z$  同指令系数  $K_z$  之间也是简单的线性关系，那么就会有

$$K_z = k_{\lambda}^K \lambda_z \quad (4-3-18)$$

及

$$n_z = k_K^n K_z \quad (4-3-19)$$

其中  $k_{\lambda}^K$ ——控制盒的放大系数；

$k_K^n$ ——导弹弹体环节的放大系数。

在引入 (4-3-19) 式时，事实上已假定导弹对指令的响应过程是无滞后及无畸变的线性过程，就是说

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = n_z g = g k_K^n k_{\lambda}^K \lambda_z$$

再考虑到射手的操作规则 (4-3-17)，则应有

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + g k_K^n k_{\lambda}^K k_z^{\lambda} z = 0 \quad (4-3-20)$$

这是一个二阶线性齐次微分方程，其通解为

$$z = z_0 \cos \omega_s t + \frac{\dot{z}_0}{\omega_s} \sin \omega_s t \quad (4-3-21)$$

式中  $z_0$  及  $\dot{z}_0$ ——初始条件；

$\omega_s$ ——包括射手环节在内的导弹系统的等效固有频率， $\omega_s = \sqrt{g k_K^n k_{\lambda}^K k_z^{\lambda}}$ 。

由 (4-3-21) 式可知，当射手按 (4-3-17) 式的规则来操纵导弹时，导弹的运动将成为围绕瞄准线的不衰减的振荡，这是不能容许的。为了改变这种情况，应在制导回路中加入阻尼。

只要在控制箱中加入一个微分电路，就可以提供同手柄偏角的变化角速度成正比的信号。当射手按 (4-3-17) 式的规则移动手柄时，手柄移动的角速度自然会同导弹趋近（或离开）瞄准线的速度  $\frac{dz}{dt}$  成正比；从而，微分电路输出的信号也将同  $\frac{dz}{dt}$  成正比。将这部分微分后的信号，同原来的信号叠加起来，用以形成控制指令，就有

$$K_z = k_{\lambda}^K \lambda_z + k_{\lambda}^K \frac{d\lambda_z}{dt} \quad (4-3-22)$$

于是,考虑到 (4-3-17)~(4-3-19) 式之后,包括射手环节在内的制导系统的数学模型即为

$$\frac{d^2z}{dt^2} + gk_K^* k_\lambda^K k_z^\lambda \frac{dz}{dt} + gk_K^* k_\lambda^K k_z^\lambda z = 0 \quad (4-3-23)$$

或

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\omega_e \frac{dz}{dt} + \omega_e^2 z = 0 \quad (4-3-24)$$

式中  $\omega_e$ ——仍为系统的等效固有频率,  $\omega_e = \sqrt{gk_K^* k_\lambda^K k_z^\lambda}$ ;

$\zeta$ ——相对阻尼系数,  $\zeta = \frac{\omega_e}{2} \left( \frac{k_\lambda^K}{k_\lambda^K} \right)$ 。

为了便于描述射手按线性规则操作时导弹的运动,线性二阶齐次微分方程 (4-3-23) 可取如下的初始条件: 当  $t=0$  时,  $z=z_1$ ,  $\frac{dz}{dt}=0$ 。这时,方程的解为

$$z = z_1 \frac{e^{-\zeta\omega_e t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_e \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi) \quad (4-3-25)$$

其中  $\phi$ ——相位角,

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (4-3-26)$$

这就是说,当射手按线性规则操作,并且控制盒内具有适当的微分电路时,第一代反坦克导弹做为一个可控质点在导入段上的运动过程,乃是围绕着瞄准线进行的衰减振荡。

### 三、线性导入段的分析及参数选择

为了研究各种参数对导入过程的影响,取导弹位置偏差  $z$  的无量纲值  $\bar{z} = z/z_0$ ; 并认为初始条件是:  $\bar{z}_0 = 1$ ,  $\dot{\bar{z}}_0 = 0$ , 于是 (4-3-25) 式成为

$$\bar{z} = \frac{e^{-\zeta\omega_e t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \left[ \omega_e \sqrt{1-\zeta^2} t - \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right] \quad (4-3-27)$$

以  $\omega_e t$  为无量纲自变量,以  $\zeta$  为参数,可将 (4-3-25) 式绘成如图 4-29 所示的曲线。

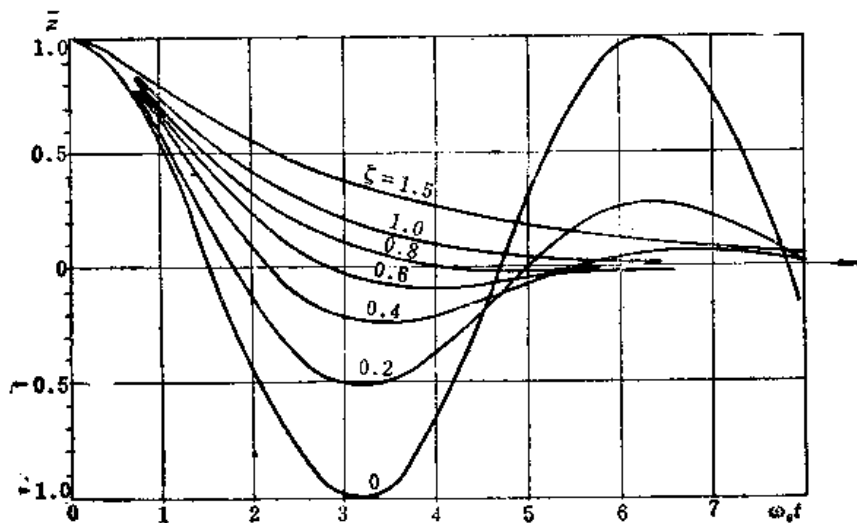


图4-29 导入段运动过程

我们希望导入过程结束得愈快愈好。由图 4-29 可知, 当相对阻尼系数  $\zeta$  很小时 (如  $\zeta=0.1$ ), 导入过程将发生强烈的振荡; 当  $\zeta$  很大时 (如  $\zeta \geq 1.0$ ) 导入过程不发生振荡, 但导弹逼近瞄准线的速度太慢。最适当的相对阻尼系数是在  $\zeta=0.7 \sim 0.8$  左右, 这时, 导弹将很快地逼近瞄准线, 并且只略微地发生振荡, 振荡的幅值将不超过初始偏差的 5%, 可以略而不计。

在  $\zeta=0.7$  的条件下, 导弹以初始偏差之 5% 的精度进入瞄准线附近 (并且不再逸出) 所需之无量纲时间大约是  $\omega_e t = 3$ 。就是说, 实际所需的导入时间大约是

$$t'_{\text{导}} \approx \frac{3}{\omega_e} = \frac{3}{\sqrt{gk_K^n k_\lambda^K k_z^\lambda}} \quad (4-3-28)$$

由此可见, 从缩短导入段的角度看来, 应该使相对阻尼系数  $\zeta=0.7 \sim 0.8$ , 并使包括射手环节在内的制导系统的等效固有频率  $\omega_e$  也尽可能地大。

现在来考察, 系统的等效固有频率  $\omega_e$  及相对阻尼系数  $\zeta$

$$\omega_e = \sqrt{gk_K^n k_\lambda^K k_z^\lambda} \quad (4-3-29)$$

$$\zeta = \omega_e k_\lambda^K / (2k_K^n) \quad (4-3-30)$$

应特别注意其中的  $k_z^\lambda$ ——射手环节的放大系数, 它表明, 当导弹位置出现偏差  $z$  时, 射手移动操纵手柄的猛烈程度。显然, 这个放大系数是由射手主观掌握的。同样, 如果这个系数很大, 导入过程是可以缩短的 (当然还要保持  $\zeta$  为最优的条件)。但是, 射手不应该任意地增大放大系数到不适当的程度。因为系统的相对阻尼系数  $\zeta$  应是根据某个预定的  $\omega_e$  而设计为最优值的, 当射手任意地增大放大系数  $k_z^\lambda$  的时候, 他就有可能破坏了最优的设计条件。另一方面, 当射手对于比较小的导弹位置偏差做出比较猛烈的操纵动作的时候, 他就很难再以线性的规律随着导弹位置的变化而移动操纵手柄, 整个系统实际上将成为非线性的, 弄不好将出现强烈的振荡甚至失去稳定, 这是不许可的。

#### 四、线性导入段的长度

现在来考察, 当射手按 (4-3-16) 式的规则进行操作时, 导入段弹道的长度为何, 并将它同理想导入段长度进行比较。

利用最优条件下的导入时间计算公式 (4-3-28), 可求得相应的导入段长度为

$$h'_0 = v'_{\text{导}} = \frac{3v}{\omega_e} = \frac{3v}{\sqrt{gk_K^n k_\lambda^K k_z^\lambda}} \quad (4-3-31)$$

现假定, 当导弹的初始偏差为  $z = z_1$  时 (同时  $\frac{dz}{dt} = 0$ ), 射手把操纵手柄置于偏航操纵的极限位置; 然后, 在  $z < z_1$  的范围内按线性规则来移动手柄。于是

$$k_z^\lambda = \frac{\lambda_{z, \max}}{z_1} \quad (4-3-32)$$

当  $\lambda_z = \lambda_{z, \max}$  时, 控制盒输出的偏航指令具有最大的指令系数  $K_{z, \max}$ , 并使导弹以最大偏航过载  $n_{z, \max}$  进行机动飞行以修正弹道偏差, 因而

$$k_K^n k_\lambda^K k_z^\lambda = \left( \frac{n_{z, \max}}{K_{z, \max}} \right) \left( \frac{K_{z, \max}}{\lambda_{z, \max}} \right) \left( \frac{\lambda_{z, \max}}{z_1} \right) = \frac{n_{z, \max}}{z_1} \quad (4-3-33)$$

于是, 按式 (4-3-29) 及 (4-3-31) 有

$$\omega_e = \sqrt{g \frac{n_{z, \max}}{z_1}} \quad (4-3-34)$$

及

$$h'_0 = 3v \sqrt{\frac{z_1}{gn_{z, \max}}} = 3 \sqrt{\frac{v^2 z_1}{gn_{z, \max}}} = 3 \sqrt{z_1 R_{s, \min}} \quad (4-3-35)$$

其中,  $R_{s, \min}$ ——导弹在水平面上进行偏航机动时之最小转弯半径,  $R_{s, \min} = \frac{v^2}{gn_{z, \max}}$ 。

现在, 将 (4-3-35) 式之结果同理想导入段的结果进行比较。注意, (4-3-35) 式的前提是: 把初始偏差缩小至 5%, 即认为导入过程结束。因此对理想导入段也应附加上这一条件, 以使用同一标准进行比较。为此, 应在瞄准线两侧绘出宽度为  $0.05z_1$  的区域, 只要导弹进入此区域并不再逸出即认为导入过程结束 (见图 4-30, 并对照图 4-22)。于是理想导入段的长度应是  $h_2 + h'_3$ 。

由条件  $\overline{A_3 B_3} = 0.05z_1$ , 利用类似于式 (4-3-5) 的推导过程, 可得

$$\overline{BB_3} = \sqrt{0.05 z_1 R - \left(\frac{0.05 z_1}{2}\right)^2} \approx \sqrt{0.05 z_1 R}$$

于是, 以 5% 的精度逼近瞄准线的理想导入段长度即为

$$h_2 + h'_3 = h_2 + h_3 - \overline{BB_3} = 2 \sqrt{z_1 R - \left(\frac{z_1}{2}\right)^2} - \sqrt{0.05 z_1 R} \approx \sqrt{z_1 R} \left[ 1.776 - \frac{z_1}{4R} \right] \quad (4-3-36)$$

将 (4-3-35) 式同 (4-3-36) 式相比, 可以看出, 在射手采用线性的操作规则 (4-3-16) 时, 导入段的长度  $h'_0$  将比理想导入段长度  $h_2 + h'_3$  有所增加。并且两种导入段长度之比是

$$\frac{h'_0}{h_2 + h'_3} = \frac{3}{1.776 - \frac{z_1}{4R}} \approx 1.7 \quad (4-3-37)$$

即线性的导入操作方法将使导入段的长度比理想的导入段增长约 70%。这是这种导入操作方法的缺点。

#### § 4-3-5 关于第一代反坦克导弹的操纵方法

必须再次强调指出, 为了能够采用线性的导入操作方法, 在导弹的制导系统中必须装有适当设计的微分电路, 而且导弹系统闭环应具有接近于  $\zeta = 0.7$  的等效相对阻尼系数。

但是, 事实上, 一般的反坦克导弹系统的等效相对阻尼系数  $\zeta$  往往显著偏小。在这种情况下, 按线性的导入操作方法来操纵导弹是不适当的 (有可能使导弹在瞄准线附近振荡的过程延续较长的时间)。

实际上, 在导弹严重偏离瞄准线的情况下, 尤其是在目标距发射阵地很近的紧急情况

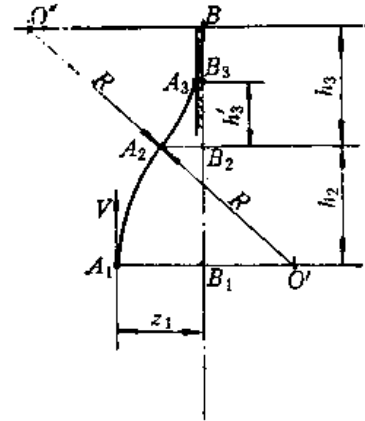


图4-30 以5%的精度逼近瞄准线的理想导入段

下,为了缩短导入距离,第一代反坦克导弹的射手应尽可能按理想的导入操作方法来操纵导弹。但是,由于射手的反应总是略有迟滞的,因此,在控制盒中往往仍需接入适当的微分超前电路来进行补偿。此外,在理想拐点附近,常常需要使手柄在中立位置上略有停顿,以便更准确地掌握导弹的运动,并且减小导弹弹体在过渡过程中的剧烈摆动。

在最初的巨大偏差已被大体纠正之后,也可利用近似于线性的导入操作方法来进一步纠正导弹的微小偏差。但是,由于一般的反坦克导弹系统的等效相对阻尼太小,射手往往必须在自己的动作中加入人为的微分超前作用,这是一种只能在训练中获得的技巧。

在导弹已经进入瞄准线之后,为了把导弹稳定地保持在瞄准线上,仍然需要射手的熟练操作。目标的运动是千差万别的,并且每发导弹的实际操纵特性也都略有不同(由于制造公差所引起的)。此外,导弹在飞行过程中的速度及弹体重心位置等因素也是逐渐变化的。这些情况迫使射手必须时时对导弹的操纵特性保持敏锐的感觉,并据此调整自己的操纵动作,才能把导弹稳定地保持在瞄准线上。有些有经验的射手,往往使手柄在中立位置附近轻微而迅速地摇动,以获得这种操纵的感觉。

这是一个很有意思的问题,“控制论”的创始人 N. 维纳 (Norbert Wiener) 曾经谈到过类似的例子<sup>[12]</sup>,他说:“当一辆卡车驾驶在结冰的道路上时,我们会看到另外一种有趣的反馈形式。我们的整个驾驶操作依赖于对路面滑溜情况的知识,即依赖于对车-路系统运转特征的知识。如果我们想依靠这系统的通常运转来获得这个知识的话,那么,我们在获得这个知识以前可能就滑出去了。因此,我们必须不断给驾驶盘以小而迅速的力,这些力不会使卡车更严重地滑出去,却完全足够向我们的运动神经报告这卡车是否有滑翻的危险,我们就根据这些消息来调节驾驶操作。

这种控制方法可以叫做信息反馈控制,……。”

看来,某些有经验的射手,在力图把导弹保持在瞄准线上时,也正是采用这种控制方法的。但是,为了能够采用这种方法,反坦克导弹系统必须有恰到好处的操纵性能;就是说,当射手轻微而快速地摇动手柄时,导弹应该以足够快的响应使射手能够感觉到自己的动作效果,但却又不致使导弹偏离瞄准线太显著。如果考虑到对于导弹系统的这种特殊的设计要求,那么,宁愿依靠射手的经验来提供人为的微分超前作用,却不在控制系统中加入微分作用更强的校正电路——这种通常的作法就可以被理解了。

#### § 4-3-6 第二代反坦克导弹的导入段弹道

##### 一、简化的数学模型

第二代反坦克导弹在导入段上的运动规律和第一代导弹在射手按线性规则操作时的导入运动规律非常相似。简言之,就是把导弹看做是一个可控质点。在制导系统的控制作用之下,导弹的运动好像是围绕瞄准线做衰减的振荡。

仍以偏航运动为例进行研究。假定,地上制导装置接收到导弹偏离瞄准线的误差信息之后,即向导弹发出如下的控制指令

$$K_z = -k_0 z - k_1 \frac{dz}{dt} \quad (4-3-38)$$

式中  $k_0$  及  $k_1$ ——导弹的地上制导装置对于导弹的位置偏差  $z$  及速率偏差  $\frac{dz}{dt}$  的放大系数。



同时, 还假定, 导弹收到控制指令之后, 能够无迟滞无畸变地做出运动响应, 即产生法向加速度  $n_z g$ , 仍如 (4-3-19) 式。

于是, 导弹的运动方程式将为

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + g k_k^n k_1 \frac{dz}{dt} + g k_k^n k_0 z = 0 \quad (4-3-39)$$

或仍写成规范形式

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\zeta \omega_e \frac{dz}{dt} + \omega_e^2 z = 0 \quad (4-3-40)$$

这里,  $\omega_e$  是包括红外测角仪环节在内的制导系统闭环的等效固有频率

$$\omega_e = \sqrt{g k_k^n k_0} \quad (4-3-41)$$

$\zeta$  是制导系统闭环的等效相对阻尼系数

$$\zeta = \frac{\omega_e}{2} \left( \frac{k_1}{k_0} \right) \quad (4-3-42)$$

注意, 式 (4-3-40) 在形式上虽然同第一代反坦克导弹的线性导入段公式 (4-3-24) 一样, 但是, 它们的初始条件却有所不同。当第一代导弹的射手开始按线性导入规则进行操作时, 他非常可能选择某个  $z = z_1$  且  $\frac{dz}{dt} = 0$  的弹道点做为开始点。但是, 对于第二代反坦克导弹的制导系统来说, 却没有这样的自由。所以, 对于式 (4-3-40) 必须把初始条件取为: 当  $t = 0$  时,  $z = z_0$  且  $\frac{dz}{dt} = \dot{z}_0$ , 以求普遍化。

这时, 式 (4-3-40) 的解即为

$$z = A_z e^{-\zeta \omega_e t} \cos(\omega_e \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi_0) \quad (4-3-43)$$

其中

$$A_z = z_0 \sqrt{\frac{1 + 2\zeta \frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}\right)^2}{1 - \zeta^2}} \quad (4-3-44)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{\zeta + \dot{z}_0 / (z_0 \omega_e)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (4-3-45)$$

这也是一个围绕瞄准线的衰减振荡, 只是由于初始条件中含有  $\dot{z}_0$ , 故在振荡的开始一段上, 振幅将有所增加 (注意, 由于启控点处弹道散布的线偏差  $z_0$  及角偏差  $\Psi_0 = (\dot{z}_0/v)$  具有相关性, 故,  $z_0$  及  $\dot{z}_0$  总具有同一符号, 故振荡的开始段振幅必是渐增的), 如图 4-31 所示。

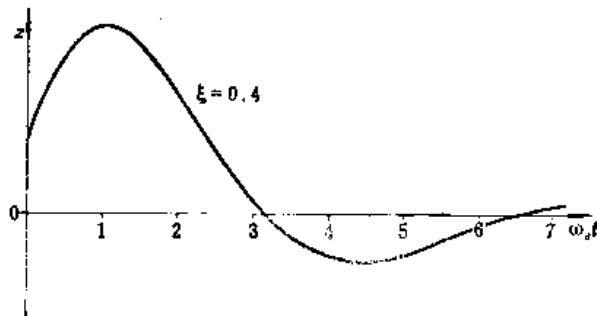


图4-31 第二代反坦克导弹的导入段弹道

## 二、导入过程的分析及计算

### (一) 导入过程的精度要求

由于导弹在导入段开始的一段弹道上，位置偏差  $z$  具有渐增性，因此，振荡的第一个波峰之振幅  $z_1$  将比启控点处之位置偏差  $z_0$  略大。然而，在这以后，第二个波峰  $z_2$ 、第三个波峰  $z_3$ 、……就将愈来愈小，而使导弹逼近瞄准线。

导入段的设计，应该力求使导弹的第二个波峰  $z_2$  即能以足够的精度逼近瞄准线，若有困难，无论如何第三个波峰  $z_3$  应以足够的精度逼近瞄准线。

这里所说的精度要求，可以是相对的精度要求，也可以是绝对的精度要求，应根据设计中的具体情况规定。

相对的精度要求是说，若导弹的某个波峰  $z_i$  达到了启控点处位置偏差  $z_0$  的某一个百分数以下，即可认为导入过程结束。例如，使

$$\left| \frac{z_i}{z_0} \right| \leq 5\% \quad \text{或} \quad 10\%$$

绝对的精度要求，是规定一个具体的数值，例如  $z^* = 0.1$  米，或  $z^* = 0.2$  米，等等；若导弹运动的某一个波峰  $z_i$  进入此精度范围之内，即若  $|z_i| \leq z^*$ ，则可认为导入过程结束。

### (二) 导入段诸波峰的时间

若  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ ……分别为导弹围绕瞄准线振荡时的第一、第二、第三……波峰处之偏差值（有正有负）；并且，达到这些波峰所相应的时刻是  $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$ ……。

对 (4-3-43) 式取导数，可得

$$\frac{dz}{dt} = -A_s \omega_s e^{-\xi \omega_s t} \cos(\omega_s \sqrt{1-\xi^2} t - \phi_0 - \phi_1) \quad (4-3-46)$$

其中

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (4-3-47)$$

于是， $z(t)$  的各波峰，应由下面的条件求得

$$\cos(\omega_s \sqrt{1-\xi^2} t - \phi_0 - \phi_1 - (i-1)\pi) = 0 \quad (4-3-48)$$

其中  $i$  ——相当于波峰次序的正整数，即  $i = 1, 2, \dots$

对于第一个波峰 ( $i = 1$ )，可得条件

$$\omega_s \sqrt{1-\xi^2} t_1 - \phi_0 - \phi_1 = \frac{-\pi}{2} \quad (4-3-49)$$

从此可解出达到第一波峰  $z_1$  的时刻  $t_1$

$$t_1 = \frac{\phi_0 + \phi_1 - \frac{\pi}{2}}{\omega_s \sqrt{1-\xi^2}} \quad (4-3-50)$$

将 (4-3-45) 及 (4-3-47) 式中之  $\phi_0$  及  $\phi_1$  代入上式，并利用三角公式化简后，可得

$$t_1 = \frac{\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi + \omega_s z_0 / \dot{z}_0} \right)}{\omega_s \sqrt{1-\xi^2}} \quad (4-3-51)$$

式 (4-3-51) 可改写为无量纲形式如下

$$\omega_e t_1 = \frac{\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi + \frac{\omega_e z_0}{\dot{z}_0}} \right)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (4-3-52)$$

将上式绘成曲线如图 4-32 所示。在图中，当  $\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} \leq 1$  时，查 I 组曲线；当  $\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} \geq 1$ ，查 II 组曲线。

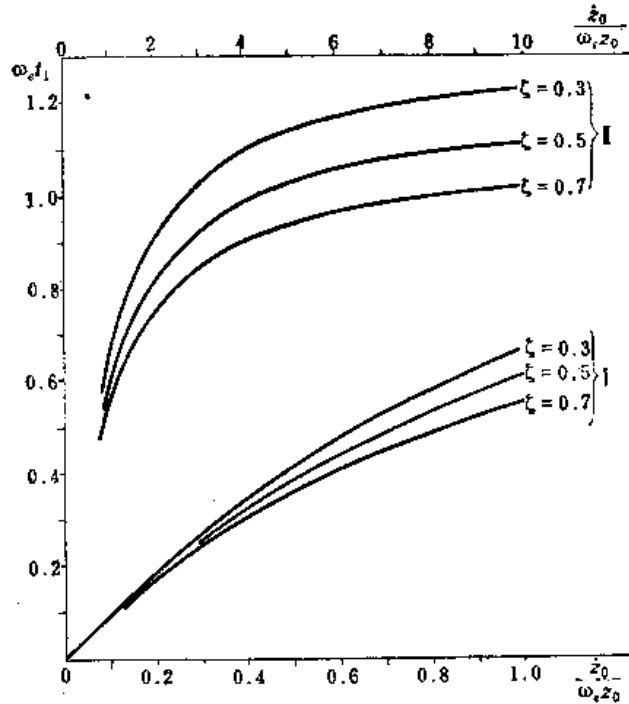


图4-32 发生第一波峰的无量纲时间  $\omega_e t_1$

已知第一波峰的发生时间  $t_1$  之后，即可按下式推求以后诸波峰的发生时间  $t_i$ ，

$$t_i = t_1 + (i - 1) \frac{T}{2} \quad (4-3-53)$$

式中  $T$ ——导弹在导入段上运动的振荡周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega_e \sqrt{1-\xi^2}} \quad (4-3-54)$$

### (三) 导入段诸波峰处的偏差值

先求第一波峰处的偏差值  $z_1$ 。将 (4-3-51) 式代入于 (4-3-43) 式之中，利用三角公式化简之后，即可得

$$z_1 = A_x \sqrt{1-\xi^2} \exp \left\{ \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tan^{-1} \left[ \frac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi + \left( \frac{\omega_e z_0}{\dot{z}_0} \right)} \right] \right\} \quad (4-3-55)$$

或考虑到 (4-3-44) 式，并将上式改写成无量纲形式如下

$$\frac{z_1}{z_0} = \sqrt{1 + 2\xi \frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} + \left( \frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} \right)^2} \exp \left\{ \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi + \left( \frac{\omega_e z_0}{\dot{z}_0} \right)} \right] \right\} \quad \dots \dots \quad (4-3-56)$$

此式的曲线，如图 4-33 所示。

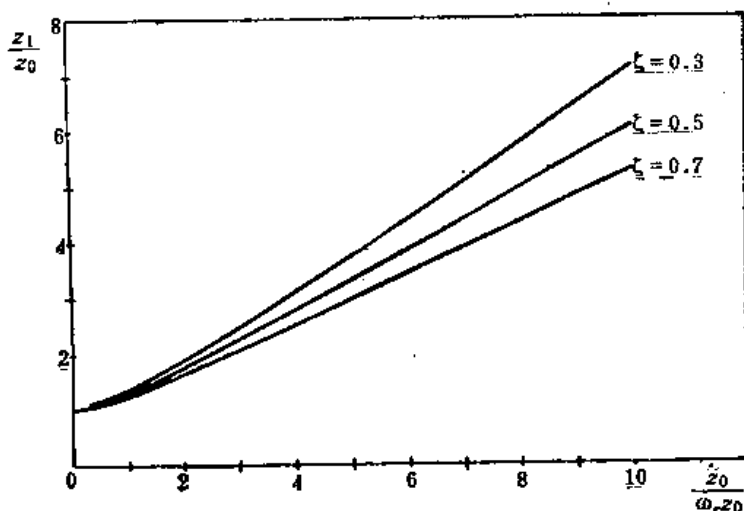


图4-33 第一波峰的无量纲偏差值

求得第一波峰  $z_1$  之后，其他各波峰甚易求得。将 (4-3-53) 式代入于 (4-3-43) 式中，可有

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} = \dots = \frac{z_n}{z_{n-1}} = -e^{-\zeta\omega_n \frac{T}{2}} = -e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (4-3-57)$$

或

$$\frac{z_i}{z_1} = (-1)^{i-1} \exp\left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(i-1)\pi\right] \quad (4-3-58)$$

#### (四) 导入时间及导入段距离

若设计工作中对导入精度具有绝对尺度的要求  $z^*$ ，并希望在导入段的第二个波峰处即使导弹在瞄准线附近的振荡进入  $\pm z^*$  之内的精度范围，则设计中应满足以下的条件

$$|z_2| = z_1 \exp\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi\right) \leq z^* \quad (4-3-59)$$

将  $\zeta$  做为未知数从上式中解出，应得

$$\zeta \geq \ln\left(\frac{z_1}{z^*}\right) / \sqrt{\pi^2 + \left(\ln\frac{z_1}{z^*}\right)^2} \quad (4-3-60)$$

按 (4-3-60) 式，对于不同的  $\frac{z_1}{z^*}$  之值，可得下列数据

$\frac{z_1}{z^*}$	10	20	30
$\zeta \geq$	0.59	0.69	0.732

可见，若  $\zeta \approx 0.7$ ，则一般情况下，在导入段的第二波峰处即可进入导入精度要求的范围。

但是, 使反坦克导弹制导系统闭环的等效相对阻尼系数  $\zeta \approx 0.7$  可能是有困难的。如果不能获得这样大的阻尼, 导弹在第二波峰处可能超出导入精度的范围。在这种情况下, 无论如何应使导弹在第三波峰进入导入精度范围。这时, 应满足的设计条件就是

$$\zeta \geq \ln\left(\frac{z_1}{z^*}\right) / \sqrt{(2\pi)^2 + \left(\ln\frac{z_1}{z^*}\right)^2} \quad (4-3-61)$$

在此条件下, 可得另一组数据

$\frac{z_1}{z^*}$	10	20	30
$\zeta \geq$	0.344	0.43	0.476

根据反坦克导弹制导系统的等效相对阻尼系数  $\zeta$  之值, 就可按照上列两表判断导弹能够在第二波峰抑或第三波峰处进入瞄准线的精度范围。从而按照式(4-3-51)及(4-3-53)求出波峰时间  $t_2$  或  $t_3$ ; 然后, 从  $t_2$  或  $t_3$  前推  $\frac{1}{4}$  周期, 即可求得导入段所需时间

$$t_{\text{导入}} = t_1 + (i-1)\frac{T}{2} - \frac{T}{4} = t_1 + \frac{(2i-3)T}{4} \quad (4-3-62)$$

于是, 导弹的导入段距离即可如下求得: 在导弹等速飞行的情况下, 有

$$x_{\text{导入}} = v_{\text{导入}} t_{\text{导入}} \quad (4-3-63)$$

在导弹加速飞行的情况下

$$x_{\text{导入}} = v_0 t_{\text{导入}} + \frac{a}{2} (t_{\text{导入}})^2 \quad (4-3-64)$$

#### (五) 导弹在导入段上的法向加速度及法向过载

对  $\frac{dz}{dt}$ , 即(4-3-46)式, 再取一次导数, 可得

$$\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = A_z \omega_e^2 e^{-\zeta \omega_e t} \cos(\omega_e \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_0 - 2\phi_1) \quad (4-3-65)$$

这就是导弹在偏航的导入段上的法向加速度。

现在来求导入段上的法向加速度的最大值。将(4-3-65)式再取导数, 利用通常的求极大值的方法, 可求得(4-3-65)式为极大之条件

$$\omega_e \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_0 - 3\phi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (4-3-66)$$

将此条件代入(4-3-65)式中, 即得最大法向加速度为

$$\ddot{z}_{\text{max}} = z_0 \omega_e^2 \sqrt{1 + 2\zeta \frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}\right)^2} \exp\left[\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\phi_0 + 3\phi_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (4-3-67)$$

可以近似认为, 导弹在偏航的导入段上运动时的法向加速度就是  $\ddot{z}$ 。于是, 导弹在导入段上的最大法向过载在水平面上的投影乃是

$$n_{z(\text{max})} = \frac{z_0 \omega_e^2}{g} f_n\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}, \zeta\right) \quad (4-3-68)$$

其中

$$f_n\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}, \xi\right) = \sqrt{1 + \xi \frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}\right)^2} \exp\left[\frac{-\xi}{\sqrt{1 + \xi \frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0} + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}\right)^2}} \left(\phi_0 + 3\phi_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (4-3-69)$$

函数  $f_n\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}, \xi\right)$  之曲线如图 4-34 所示。

导弹在启控点的位置偏差  $z_0$  是随机散布, 但是, 位置偏差  $z_0$  及其导数  $\dot{z}_0$  之间却具有相关性, 即

$$\frac{\dot{z}_0}{z_0} = v_0 \left( \frac{\Psi_0}{z_0} \right) \quad (4-3-70)$$

联系到 § 4-2-7, 可知  $\frac{\dot{z}_0}{z_0}$  主要决定于导弹在启控点的散布域的斜率。于是, 在已知导弹的启控点散布域的斜率情况下, 即能算出

$$\frac{\dot{z}_0}{z_0} \text{ 和 } f_n\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}, \xi\right)$$

由于导弹在启控点处的位置偏差  $z_0$  是随机量, 其统计特征可由标准偏差  $\sigma_{z_0}$  或概率偏差  $E_{z_0}$  来表示。所以, 对于每次发射来说, 导弹在导入段上的最大法向过载在偏航方向上的投影  $n_{z(\max)}$  也是随机量, 其统计特征可用  $\sigma_{n_x}$  或  $E_{n_x}$  来表示, 并有

$$\sigma_{n_x} = \sigma_{z_0} \frac{\omega_e^2}{g} f_n\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}, \xi\right) \quad (4-3-71)$$

类似地, 在每次发射中, 导入段上的最大法向过载在铅垂平面上的投影  $n_{y(\max)}$ , 也是随机量其标准偏差  $\sigma_{n_y}$  为

$$\sigma_{n_y} = \sigma_{y_0} \frac{\omega_e^2}{g} f_n\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_e y_0}, \xi\right) \quad (4-3-72)$$

式 (4-3-71) 及 (4-3-72) 是由于启控点散布所引起的导入段最大过载的标准偏差, 或记为  $\sigma_{n_x}|_{\text{启控散布}}$  及  $\sigma_{n_y}|_{\text{启控散布}}$ 。

### 三、在导入过程中目标有机动的情况

上面关于法向过载的计算是在不考虑目标机动的前提下进行的。在一般情况下, 目标是有机动的, 因此瞄准线是要旋转的。如果目标从距发射点很近的地方快速横越过去, 那么瞄准线的旋转角速度可能相当大。这一问题对于第二代反坦克导弹的设计工作是更重要的, 因为对于第二代反坦克导弹的最小有效射程的要求通常比较严格; 并且第二代反坦克导弹的操作方式要求射手以瞄准具的十字线跟踪目标。

可以把这一问题化为相对运动来处理 (见图 4-35)。图中,  $ox$  为地面坐标轴;  $ox_T$  是瞄准线, 其旋转角速度为  $\omega_T$ 。在  $t=0$  时,  $ox_T$  重合于  $ox$ ,  $M$  点为导弹,  $z$  为  $M$  点对于  $ox$  轴之偏差, 或称基本偏差;  $z_r$  为  $M$  点相对于瞄准线之偏差, 称为相对偏差;  $z_0$  为  $M$  点在瞄准线上之投影  $M_r$  点对于  $ox$  轴之偏差, 称为牵连偏差。在瞄准线转角尚不大时, 显

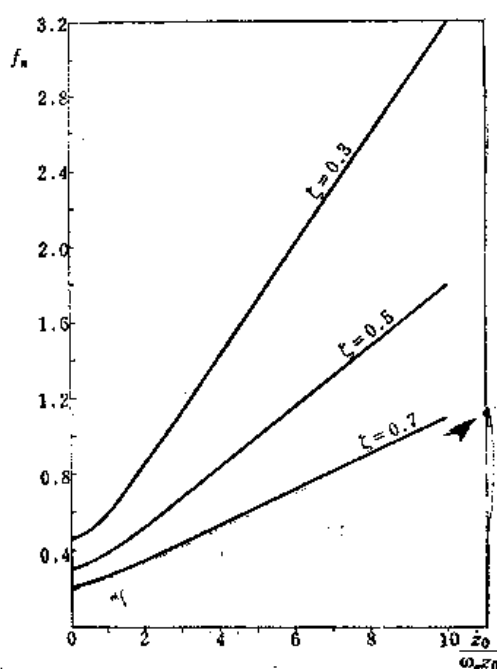


图4-34 函数  $f_n\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_e z_0}, \xi\right)$  之曲线

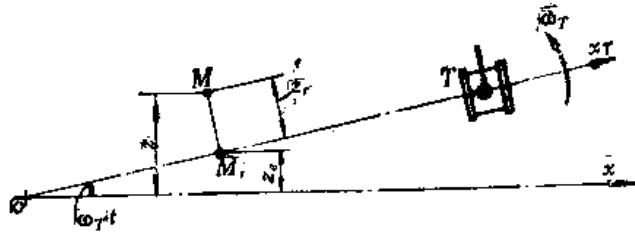


图4-35 瞄准线转动时导弹的相对运动关系

然有

$$z = z_e + z_r \quad (4-3-73)$$

及

$$\dot{z} = \dot{z}_e + \dot{z}_r, \quad \ddot{z} = \ddot{z}_e + \ddot{z}_r \quad (4-3-74)$$

事实上, 从红外测角仪测得的数据只是  $z_r$  及  $\dot{z}_r$ 。因此, 通过计算装置所形成的指令首先也是同  $z_r$  及  $\dot{z}_r$  成比例, 即

$$K_x = -k_0 z_r - k_1 \frac{dz_r}{dt} \quad (4-3-75)$$

于是, 导弹的横向运动方程是

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = k_k^* (-k_0 z_r - k_1 \dot{z}_r) mg \quad (4-3-76)$$

将 (4-3-41)、(4-3-42)、(4-3-73) 及 (4-3-74) 式代入上式, 可得

$$\frac{d^2 z_r}{dt^2} + 2\zeta \omega_e \frac{dz_r}{dt} + \omega_e^2 z_r = -\frac{d^2 z_e}{dt^2} \quad (4-3-77)$$

这个式子说明, 在导入过程中, 由于非齐次项  $-\frac{d^2 z_e}{dt^2}$  的存在, 导弹将不再围绕瞄准线振

荡, 却要围绕另一个由  $-\frac{d^2 z_e}{dt^2}$  所决定的平衡方向振荡。这样一来, 将带来制导误差。  $\frac{d^2 z_e}{dt^2}$  是由  $\omega_T$  及导弹飞行速度所决定的。所以, 在制导指令中应该引入同瞄准线旋转角速度  $\omega_T$  及导弹速度  $v$  有关的修正信号, 这一问题将在 § 5-3 中详谈。

现在假定我们已经在制导系统中引入修正信号, 使得 (4-3-77) 式右端的非齐次项被抵消为零。在这一条件下, 导弹相对于瞄准线的偏差  $z_r$  的运动方程仍将是一个齐次方程, 即

$$\frac{d^2 z_r}{dt^2} + 2\zeta \omega_e \frac{dz_r}{dt} + \omega_e^2 z_r = 0 \quad (4-3-78)$$

这个方程的初始条件应如下推得, 先假定导弹的发射方向同瞄准线的最初方向同轴, 并且导弹在起飞段上没有弹道散布, 但是由于瞄准线转动的结果, 导弹在启控点处仍有相对于瞄准线的横向偏差  $z_{r,0}$  及其导数  $\dot{z}_{r,0}$ 。

$$z_{r,0} = x_0 \omega_T t_0 \quad (4-3-79)$$

$$\dot{z}_{r,0} = v_0 \omega_T t_0 + x_0 \omega_T \quad (4-3-80)$$

式中  $t_0$ ——从发射到启控所经之时间;

$z_{r,0}$  及  $\dot{z}_{r,0}$ ——方程 (4-3-78) 之初始条件。

在此初始条件下, 方程 (4-3-78) 的解法仍同前述。在此条件下, 导弹在导入段上所经受的最大法向过载在水平面上的投影  $n_{z_r(\max)}$  同式 (4-3-68) 类似。

$$n_{z_r(\max)} = z_{r,0} \frac{\omega_z^2}{g} f_n\left(\frac{\dot{z}_{r,0}}{\omega_z z_{r,0}}, \xi\right) = \omega_T x_0 t_0 \frac{\omega_z^2}{g} f_n\left(\frac{v_0 t_0 + x_0}{\omega_z x_0 t_0}, \xi\right) \quad (4-3-81)$$

然而必须注意, 根据相对运动的理论, 在导弹的全部加速度(或过载)中, 除了相对加速度之外, 还应该包括牵连加速度及科氏加速度。在认为瞄准线转动的角加速度可以略去的条件下, 导弹的牵连加速度在  $z$  方向的分量也可略而不计。然而导弹的科氏加速度正好全部投影在  $z$  方向, 不能忽略不计, 由此引起的过载是

$$n_{z_c} = \frac{2\omega_T v}{g} \quad (4-3-82)$$

因此, 由于瞄准线转动所引起的导弹在偏航导入段上的最大过载是上述两部分之和, 即

$$n_{z,\omega_T(\max)} = \frac{\omega_T}{g} \left[ 2v + x_0 t_0 \omega_z^2 f_n\left(\frac{v_0 t_0 + x_0}{\omega_z x_0 t_0}, \xi\right) \right] \quad (4-3-83)$$

然而, 目标的机动速度及其方向是随机的, 因此, 瞄准线转动角速度  $\omega_T$  也是一个随机量。假定,  $\omega_T$  的随机分布特征服从于正态分布定律。于是根据  $\omega_T$  的最大可能值即可确定出其分布的标准偏差  $\sigma_{\omega_T}$  或概率偏差  $E_{\omega_T}$ 。

$$\text{如} \quad \sigma_{\omega_T} = \frac{1}{3} \omega_{T,\max} \quad (4-3-84)$$

在启控点无散布而瞄准线有转动的情况下, 导弹在导入段中的最大法向过载的标准偏差  $\sigma_{n_z|_{\omega_T}}$  为

$$\sigma_{n_z|_{\omega_T}} = \frac{\sigma_{\omega_T}}{g} \left[ 2v + x_0 t_0 \omega_z^2 f_n\left(\frac{v_0 t_0 + x_0}{\omega_z x_0 t_0}, \xi\right) \right] \quad (4-3-85)$$

在综合考虑启控点散布及瞄准线转动的情况下, 导弹在偏航导入段中运动的最大法向过载的标准偏差乃是

$$\sigma_{n_z} = \sqrt{(\sigma_{n_z|_{\text{启控散布}}})^2 + (\sigma_{n_z|_{\omega_T}})^2} \quad (4-3-86)$$

#### 四、复合的需用过载

坦克目标的机动运动主要是在水平平面上, 因此瞄准线的转动也主要在水平平面上。所以, 当计算导弹在俯仰方向上的最大过载时, 可不必考虑目标机动的影响。然而, 导弹维持平飞所需的过载则应予以考虑。在导入过程中, 导弹在俯仰方向上的总过载是维持平飞所需的过载及克服启控点散布所需的过载之和

$$n_y = 1 + n_{y|_{\text{启控散布}}} \quad (4-3-87)$$

然而, 由启控点散布所导致的俯仰导入段法向过载  $n_{y|_{\text{启控散布}}}$  是一个随机量(其计算方法同  $n_{z|_{\text{启控散布}}}$ ), 所以, 俯仰的总过载  $n_y$  也是随机量, 然而其平均值乃是 1, 在平均值附近的散布特征可用由 (4-3-72) 式算出的  $\sigma_{n_y}$  表示。

要计算俯仰与偏航两个方向的复合过载, 可参考图 4-36。

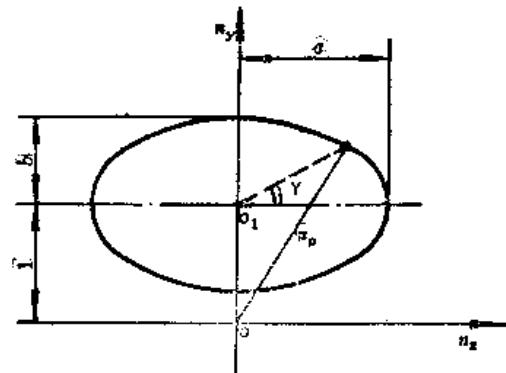


图4-36 复合过载的计算

在图 4-36 中,  $a = 3\sigma_{n_x}$ , 此  $\sigma_{n_x}$  按 (4-3-86) 式计算;  $b = 3\sigma_{n_y}$ , 此  $\sigma_{n_y}$  按 (4-3-72)



式计算，并有

$$n_p = \sqrt{(a \cos \gamma)^2 + (1 + b \sin \gamma)^2} \quad (4-3-88)$$

其中  $n_p$  为俯仰与偏航的复合过载。 $n_p$  作为  $\gamma$  角的函数，其为极大值的必要条件是

$$\frac{\partial n_p}{\partial \gamma} = 0 \quad (4-3-89)$$

具体计算后，此条件即为

$$(a^2 - b^2) \cos \gamma \cdot \sin \gamma - b \cos \gamma = 0 \quad (4-3-90)$$

这是一个关于  $\gamma$  的方程，它有两组根。第一组根是

$$\begin{cases} \cos \gamma = 0 \\ \sin \gamma = \pm 1 \end{cases} \quad (4-3-91)$$

或

$$\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$$

第二组根是

$$\begin{cases} \sin \gamma = \frac{b}{a^2 - b^2} \\ \cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{b^2}{(a^2 - b^2)^2}} \end{cases} \quad (4-3-92)$$

或

$$\gamma = \sin^{-1} \frac{b}{a^2 - b^2}$$

然而，只有在下面的条件之下，第二组根才存在，即

$$\frac{b}{a^2 - b^2} \leq 1 \quad (4-3-93)$$

若条件 (4-3-93) 成立，即  $n_p$  的极大值发生在  $\gamma = \sin^{-1} \frac{b}{a^2 - b^2}$  之处，这时

$$n_{p,\max} = 3\sigma_{n_x} \sqrt{1 + \frac{1}{(3\sigma_{n_x})^2 - (3\sigma_{n_y})^2}} \quad (4-3-94)$$

但若条件 (4-3-93) 不成立，则  $n_p$  的极大值发生在  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  处，这时

$$n_{p,\max} = 1 + 3\sigma_{n_y} = n_{y,\max} \quad (4-3-95)$$

这就是导弹在导入段中运动的需用过载。

## § 4-4 启控状态的调整

### § 4-4-1 启控域及散布域

在 § 4-2 中，曾定义启控点的散布域是“在  $(\Theta, \tilde{y})$  相平面上，启控点弹道散布的实际状态的集合”，并指出，散布域的概念对于启控点的选择及调整工作是很重要的。

在 § 4-3 中又指出, 启控点的偏差及散布状态, 影响或决定着导入段弹道的特征, 包括导入时间、导入距离、导入段需用过载等。

因此, 为了保证导入段弹道的品质, 就必须对启控点弹道散布状态提出一定的限制。这样就提出了“启控域”的概念。所谓“启控域”, 就是在相平面  $(\Theta, \tilde{y})$  中的某一个特定的集合  $\Omega$ , 必须使启控点的弹道散布状态  $(\Theta, \tilde{y})$  属于此集合, 才能使导弹在启控后的导入段弹道具有满意的特征。

具体地讲, 例如, 对于第二代反坦克导弹来说, 由于红外测角仪的视场角是已被限定的, 因此为了顺利启控, 必须要求弹道启控点以足够高的概率落在视场之内, 并且启控后的导入弹道也不越出视场范围。此外, 由于瞄准线离地面很近, 红外测角仪的视场的下半部分将在地平线以下, 因而还必须要求导弹保持在视场的上半部分飞行。这些要求, 可以归纳为两个数学上的条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y(t)}{x(t)} &\leq \mu, \\ y(t) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-4-1)$$

其中  $\mu$  —— 红外测角仪的视场角 (弧度)。

在这样的情况下, 就可以把启控域  $\Omega$  具体地定义为

$$\Omega = \left\{ [\Theta(t_0), \tilde{y}(t_0)] \left| \frac{\tilde{y}(t)}{x(t)} \leq \mu \frac{2\pi}{\lambda}, \tilde{y}(t) > 0 \right. \right\} \quad (4-4-2)$$

这里对启控域的定义中, 只考虑了导弹的俯仰运动, 这是因为导弹在俯仰运动中有触地的可能性, 比偏航运动更危险, 所以要首先予以考虑。在俯仰运动的问题解决以后, 偏航运动问题可类似地考虑解决。

为了在相平面  $(\Theta, \tilde{y})$  中具体地勾绘出  $\Omega$  的图象, 需要进行大量的实际计算工作。在 § 4-3 中所讲述的计算导入段的方法, 其前提是把导弹看做是一个可控质点, 得出的结论比较简单, 便于建立物理概念。但从定量的观点看来, 是不够精确的。事实上, 启控点的调整问题, 一般是在导弹设计工作的中、后期进行, 那时, 关于导弹及其制导系统的许多参数已经基本确定。在这种情况下, 就有条件对导弹的导入段弹道进行比较精确的计算。通常, 应该把导弹看做是变质量的刚体, 并考虑到各种力和力矩随时间而变化的作用以及制导系统中各种特定的补偿作用等。这样列出尽可能详尽完整的运动方程, 设定一系列启控点条件  $[\Theta(t_0), \tilde{y}(t_0)]$ , 然后在电子计算机上进行大量的计算, 根据计算结果是否满足条件式 (4-4-1), 来确定出启控域  $\Omega$  在相平面  $(\Theta, \tilde{y})$  中的边界。

现在, 假定通过对特定的导弹的大量计算, 已经确定了启控域  $\Omega$  的边界, 如图 4-37 中虚线所示。在此图中还绘出了该导弹的启控点散布域  $AB$ 。这是一个炮口转速较高的导弹, 它在助推段上的散布主要受炮口初始扰动的影响。因此, 散布域退化为一根直线。显然, 由于散布域  $AB$  的一部分位于启控域  $\Omega$  的边界之外, 因此, 在大量的射击中, 将有相当数量的导弹在启控前后可能逸出视场或触地。所以, 这样的导弹的

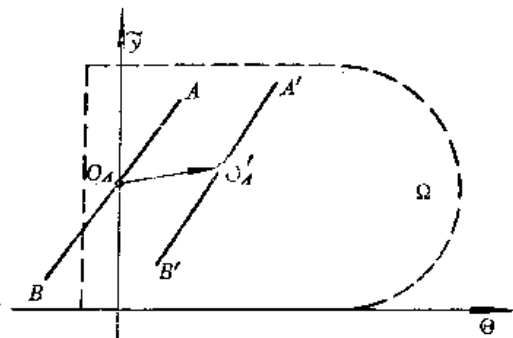


图 4-37 启控域及散布域

大量的射击中, 将有相当数量的导弹在启控前后可能逸出视场或触地。所以, 这样的导弹的

可靠性是不高的。为了解决这个问题，就需要进行启控状态的调整。

#### § 4-4-2 调整启控状态的几种方法

启控状态调整的目的，是要把散布域  $AB$  完全转移到启控域  $\Omega$  之内，以保证导弹能够顺利地启控，并且能够在规定的条件下顺利地通过导入段而进入瞄准线。

为了达到这个目的，可以通过多种方法。例如，第一种方法，可以在起飞（助推）段上施加一定的程序控制作用，来改变导弹散布域中心  $O_A$  的位置（如图 4-37 中所示）。第二种方法，借助于改变导弹发射定向器的仰角  $\Theta_L$ ，从而改变散布域中心  $O_A$  的位置。

另一种方法是，通过各种能够影响无控段弹道散布的措施，来缩小散布域  $AB$  的长度（或宽度）；或者改变散布域主轴线  $AB$  的方向。

还有一种方法，就是改变起飞段的弹道方案（速度图），从而改变启控点的速度  $v_0$  及启控点至发射点的距离  $x_0$ （以及启控时间  $t_0$ ）。在这种情况下，散布域  $AB$  及启控域  $\Omega$  的边界同时都会有所变化。然而这种方法牵动范围太大，在设计工作的后期可能难于进行。

在实际工作中，应该根据具体情况，决定采用那种方法，或者综合地采用多种方法。下面只讨论前两种方法。

#### § 4-4-3 改变发射定向器仰角对启控点散布域的影响

改变发射定向器的仰角，是最简单的技术措施。但可惜的是，这种方法对启控点散布域的影响是很有限的。

发射定向器仰角的调整，通常只能在很有限的范围内进行。主要的困难是在于，发射仰角的改变将导致启控点处的弹道高度及速度方向同时改变，它的影响具有严格的相关性。

若  $O_A$  为在某一个发射仰角  $\Theta_L$  条件下导弹的散布域的中心，若使  $\Theta_L$  连续地改变（在不大的范围内），则  $O_A$  在  $(\Theta, \tilde{y})$  相平面上描绘出的轨线基本上是一条直线（如图 4-38 所示）。这是因为，在发射定向器出口的弹道倾角  $\Theta_0$  具有特定值  $\Theta_0 = \Theta_L$  的情况下，由(4-2-31)及(4-2-48)式可得，弹道在启控点的下沉量  $\Delta y_g$  及弹道倾角变化量  $\Delta \Theta_g$  乃是

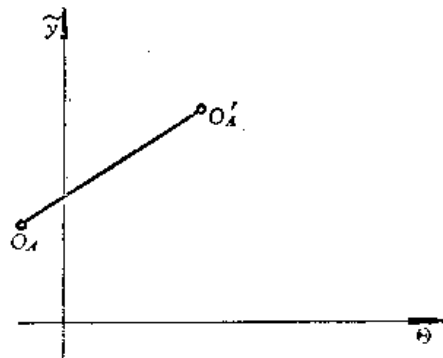


图4-38 改变发射仰角  $\Theta_L$  使散布域中心移动

$$\Delta y_g = -\frac{g \cos \Theta_L}{a} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right) H_g(\xi_0, \xi_{A\#})$$

$$\Delta \Theta_g = -\frac{g \cos \Theta_L}{a} R_g(\xi_0, \xi_{A\#})$$

所以

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y_g}{\Delta \Theta_g} = \frac{H_g(\xi_0, \xi_{A\#})}{R_g(\xi_0, \xi_{A\#})} = K_g(\xi_0, \xi_{A\#}) \quad (4-4-3)$$

这个比值就是在  $(\Theta, \tilde{y})$  相平面中  $O_A$  轨线的斜率，它同发射定向器的仰角  $\Theta_L$  无关，而只决定于  $\xi_0$ 、 $\xi_{A\#}$  及偏航波长  $\lambda$  三个参量。

#### § 4-4-4 自主控制对启控点散布域的影响

在导弹到达启控点之前，利用自主式控制系统对导弹施加一组控制作用，也可改变导弹在启控点处的弹道散布状态。

有一种用于反坦克导弹的自主式控制系统，类似于弹道式导弹的自动稳定及程序控制的基本原理，但稍为简单。在这种系统中包含特殊的陀螺组件，在特定的弹道段上测量弹体的摆动姿态及摆动角速度，并发出一定的控制指令，以使导弹按预定弹道飞行。这是一种闭环的自主式控制系统。这种系统能有效地调整并压缩启控点的散布域。但是这种系统略为复杂，只有少数的反坦克导弹采用这种系统（参考附录二：霍特导弹）。

还可以设想另一种开环的程序控制系统，它不包含用来敏感弹体姿态的陀螺组件，只是在程序控制器的作用下，在预定的时间间隔中，对导弹发出方向及大小已经预定好的控制作用。在它的作用下，可以把导弹在启控点的散布中心调整到所希望的状态，但是却难以压缩散布域的大小。下面对这种开环的程序指令的设计问题稍加讨论。

最简单的开环程序指令就是在启控前弹道的预定点上，对导弹施加一个脉冲的控制力。这样一个脉冲的控制作用的时间很短，它的主要效果是使导弹产生一个相对于重心的摆动角速度  $\dot{\theta}_k$

$$\dot{\theta}_k = -\frac{F_k L_k}{J_x} \Delta t \quad (4-4-4)$$

式中  $\Delta t$ ——脉冲的作用时间；

$F_k$ ——脉冲控制力的平均值；

$L_k$ ——舵控力作用点至弹体重心的距离。

如果把这样一个弹体摆动角速度  $\dot{\theta}_k$  看做是一种扰动，那么，就可利用 § 4-2 所说的特征函数来计算启控点处弹道倾角及线偏移的相应扰动，

$$\Delta \Theta_{\dot{\theta}_k} = \dot{\theta}_k \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha}} R_q(\xi_k, \xi_{\text{启}}) \quad (4-4-5)$$

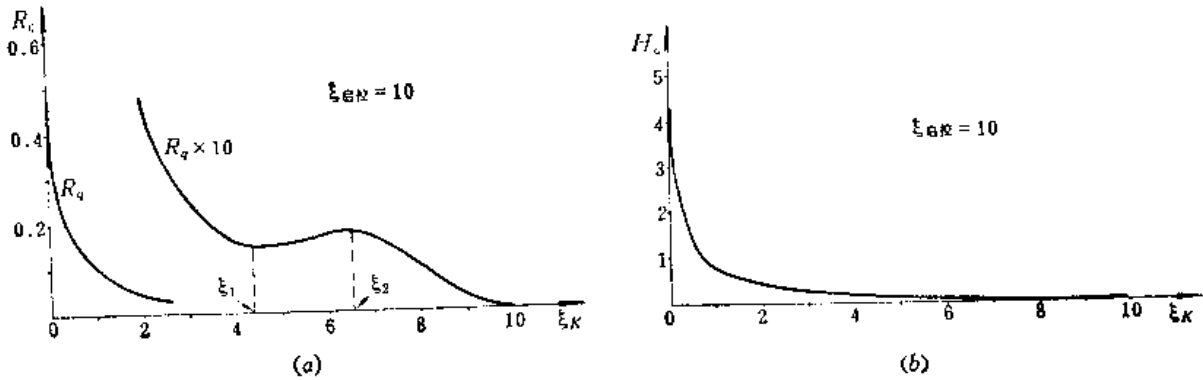
$$\Delta y_{\dot{\theta}_k} = \dot{\theta}_k \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha}} H_q(\xi_k, \xi_{\text{启}}) \quad (4-4-6)$$

式中  $\xi_k$ ——在施加控制脉冲时刻弹体的无量纲行程。

现在的问题是，这个控制脉冲应该在什么时刻施加给导弹。为此，可把  $\xi_k$  看做是变量， $\xi_{\text{启}}$  看做是常量或参量，做出  $R_q(\xi_k, \xi_{\text{启}})$  及  $H_q(\xi_k, \xi_{\text{启}})$  的曲线，如图 4-39 所示。

由图 4-39 (a) 可以看出，在  $\xi_{\text{启}} = \text{常数}$  的情况下，对于  $R_q$  而言，存在着两个临界点  $\xi_1$  及  $\xi_2$ 。当  $\xi_k < \xi_1$  时， $R_q$  比较大，但是随着  $\xi_k$  增大， $R_q$  急剧减小；当  $\xi_1 \leq \xi_k \leq \xi_2$  时， $R_q$  的变化比较平缓；当  $\xi_k > \xi_2$  时， $R_q$  进一步急剧减小，直到  $\xi_k = \xi_{\text{启}}$  时， $R_q = 0$ 。

这种现象的物理意义是明显的。在导弹离开定向器不久，导弹的速度不大，任何扰动（包括控制冲量）都将对启控点处的弹道倾角的变化产生显著影响；然而，随着导弹速度的急剧增加，扰动的影响将急剧减小。但是，当速度增加到一定程度之后，在不同的弹道点上施加扰动，其效果相差不多。最后，在  $\xi_k$  接近于  $\xi_{\text{启}}$  的情况下，若是把  $\xi_k$  看做是图

图4-39 特征函数 $R_q$ 及 $H_q$ 随 $\xi_K$ 之变化(a)  $R_q$ ; (b)  $H_q$ .

4-6 中的  $\xi_0$ , 则  $\xi_{\text{启控}}$  将位于临界段之内, 这时,  $\xi_K$  愈是接近于  $\xi_{\text{启控}}$ , 控制冲量对于弹道的影响就愈微弱。

现在来看, 一个脉冲控制作用所引起的启控点处弹道倾角变化  $\Delta\Theta_{\xi_K}$  及位置变化  $\Delta y_{\xi_K}$  之间的相关性, 由 (4-2-53) 式, 可有

$$\frac{\Delta y_{\xi_K}}{\Delta \Theta_{\xi_K}} = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right) \frac{H_q(\xi_K, \xi_{\text{启控}})}{R_q(\xi_K, \xi_{\text{启控}})} = \frac{\lambda}{2\pi} K_q(\xi_K, \xi_{\text{启控}}) \quad (4-4-7)$$

这就意味着, 若有一个脉冲控制作用, 在启控前弹道的某点 (相应于  $\xi_K$  的某点) 上施加给导弹, 则启控点的散布域中心  $O_A$  在  $(\Theta, \tilde{y})$  相平面上将沿着斜率为  $K_q(\xi_K, \xi_{\text{启控}})$  的直线移动。

因此, 利用启控前的脉冲控制作用来改变启控点处的散布域中心, 是更为灵活的方法。因为这个方法中有两个自由度, 一个是施加控制作用的弹道位置 ( $\xi_K$ ), 它决定着启控点散布域中心  $O_A$  点在相平面上移动的方向。另一个是控制作用的强度 ( $\dot{\theta}_K$ ), 它决定着  $O_A$  点在相平面上移动的距离。

#### § 4-4-5 启控前弹道的调整设计

通常必须综合地采用多种技术措施来调整启控点的散布域。下面只对综合采用调整发射定向器仰角  $\Theta_0$  以及施加程序控制脉冲两种方法的情况, 进行研究。

若是在某个发射仰角  $\Theta_L = \Theta_0$  的条件下, 启控点的散布域为  $AB$  (图 4-40); 并设散布域中心  $O_A$  位于  $\tilde{y}$  轴上 (这意味着, 在启控点处, 导弹的平均弹道具有  $\Theta = 0$  的弹道倾角)。然而, 散布域  $AB$  有一部分位于启控域  $\Omega$  之外, 因此, 必须设法调整发射仰角并施加适当的控制脉冲, 来把散布域转移到  $A'B'$ 。问题的焦点, 是要把散布域中心  $O_A$  转移到  $O'_A$ 。

图 4-40 中的  $\overline{O_A G}$ , 是在单纯调整发射仰角  $\Theta_L$  的情况下, 散布中心  $O_A$  在相平面上的移动方向, 其斜率由 (4-4-3) 式决定。

为了把散布中心  $O_A$  转移到  $O'_A$ , 可能有无穷多的途径, 如图 4-40 中各组虚折线所示。其中那一种方案最好呢? 可以合理地认为, 所需控制脉冲的强度为最小的那个方案, 就是最好的方案。假定, 图中虚折线  $O_A O_{AC} O'_A$  即代表这个最好方案的转移路径。就是说, 应该使发射定向器具有适当的倾角  $\Theta_L$ , 使得导弹在启控点处的平均弹道具有  $\Theta = \Theta_A$  的弹道

倾角；但还不够，还应该在适当的弹道点上，施加一个具有适当强度的控制脉冲，于是导弹在启控点处的平均弹道就将具有  $\Theta = \Theta'_A$  的弹道倾角以及  $y = \frac{\lambda}{2\pi} \bar{y}'_A$  的弹道高度。

控制脉冲的强度，如 (4-4-4) 式所示，可用它对弹体的扰动效果  $\delta_k$  来代表。它应该满足下面的方程

$$\delta_k \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} R_q(\xi_k, \xi_{\text{启控}}) = \Theta'_A - \Theta_A \quad (4-4-8)$$

或应有

$$\delta_k = \frac{\Theta'_A - \Theta_A}{\sqrt{\frac{\lambda}{2a}} R_q(\xi_k, \xi_{\text{启控}})} \quad (4-4-9)$$

注意上式右端含有一个未知量  $\xi_k$ ，它应该满足下面的方程

$$K_q(\xi_k, \xi_{\text{启控}}) = \tan \alpha \quad (4-4-10)$$

其中

$$K_q(\xi_k, \xi_{\text{启控}}) = \frac{H_q(\xi_k, \xi_{\text{启控}})}{R_q(\xi_k, \xi_{\text{启控}})}$$

$\tan \alpha$  —— 相平面图中  $\overline{O_{AG}O'_A}$  的斜率。

从理论上讲，要想求出  $\delta_k$  为极小值的条件，可运用各种最优化方法来求解。只是，由于特征函数  $R_q$  及  $K_q$  的复杂性，求解过程是比较麻烦的。

运用下面的工程方法，可以简单地近似求出  $\delta_k$  为最小值的条件。这个工程方法的实质，是利用 § 4-4-4 中所述特征函数  $R_q(\xi_k, \xi_{\text{启控}})$  的一个性质——在临界点  $\xi_1$  与  $\xi_2$  之间及其附近  $R_q$  的变化比较平缓〔参看图 4-39(a)〕。

从表面上看来，按 (4-4-9) 式，为了使  $\delta_k$  尽可能小，应该使  $R_q$  尽可能大；为此，似乎应该在  $\xi_k \ll \xi_1$  的某个弹道点上施加控制脉冲。但是，考虑到在这样的弹道点附近， $R_q$  的变化非常剧烈；因此，在  $\xi_k$  发生一些误差的时候， $R_q$  将会发生相当大的误差，结果将导致启控点处的弹道散布进一步增大。因此，把控制脉冲的作用点选在  $\xi_k \ll \xi_1$  的弹道点上是不一定适宜的；除非能够准确地控制施加控制脉冲的时刻（以减小  $\xi_k$  的误差），或者通过其他措施来保证启控点处的弹道散布不致增大。

在不采取特殊技术措施的情况下，在保证启控点处弹道散布不致增大的前提之下，为了使  $\delta_k$  尽可能小，最好是在  $\xi_k \approx \xi_2$  的弹道点处施加控制脉冲（见图 4-39）。这时， $R_q$  相对地较大，并且  $R_q$  的变化平缓；此外， $H_q$  也比较小，因此， $K_q = \tan \alpha$  也比较小，这对于缩小  $\Theta'_A - \Theta_A$  之值也是有利的（参图 4-40）。

若选取  $\xi_k = \xi_2$ ，即可求出

$$\tan \alpha = K_q(\xi_2, \xi_{\text{启控}}) = \frac{H_q(\xi_2, \xi_{\text{启控}})}{R_q(\xi_2, \xi_{\text{启控}})}$$

然后，在图 4-40 中，从  $O'_A$  点出发，以  $\tan \alpha$  为斜率绘一直线，交  $\overline{O_A G}$  于  $O_{AG}$  点。 $O_{AG}$  点的横坐标  $\Theta_A$  即为启控点处之平均弹道的弹道倾角。将  $\Theta_A$  代入 (4-4-9) 式，即可求得控制脉冲的强度  $\delta_k$ ；或由 (4-4-4) 式，在舵控力  $F_k$  已经限定的条件下，可确定出控制脉冲的持续时间。

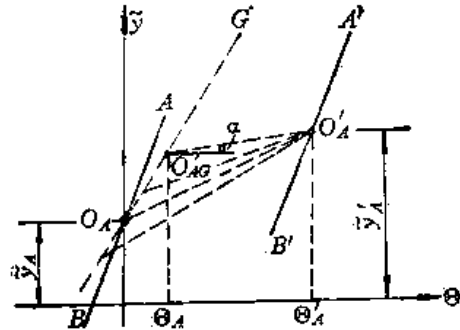


图4-40 启控点散布域的调整

## 第五章 反坦克导弹系统的动力学分析及设计

### § 5-1 弹体环节的动态特性及动力学参数的选择

#### § 5-1-1 引言和主要假定

在上一章中，曾把导弹看做是一个可控质点，研究了它在理想的导引弹道及导入段弹道上的运动，以及需用过载等问题。

然而，事实上，导弹不是一个质点，它具有一定的转动惯量及一定的气动外形。在导弹的被控飞行中，我们的目的是控制导弹重心的运动轨迹。然而，为了达到这个目的，对于大多数导弹构型来说，首先要控制的是导弹弹体相对于其重心的摆动运动（只有对于很少的导弹构型，例如，对于具有可动弹翼的导弹及具有侧向推力发动机的导弹，才可能不借助弹体的摆动而直接控制其重心的侧向运动；即使如此，它们的重心运动同弹体摆动过程，仍然是有密切关系的）。因此，导弹做为一个具有一定的转动惯量及一定的气动外形的弹体，它在摆动运动过程中的特点，对于导弹的控制性能具有决定性的影响。

所以，要想恰当地设计导弹，必须熟悉导弹弹体的动力学特性（或称动态特性）。因此，在§ 5-1中，结合反坦克导弹的特点，简要地重述飞行力学及自动调节理论的有关知识。主要目的是引导读者对这些知识进行扼要地复习并加深理解；同时，也有助于后面论述的系统性。

在§ 5-1~§ 5-4中，只讨论不滚转的反坦克导弹系统的动力学分析及设计问题。对于滚转导弹的问题，将留待§ 5-5中研究。

在本章前四节（§ 5-1~§ 5-4）中，将在下面的假定之下来研究导弹的动态特性。

（1）认为反坦克导弹在飞行过程中，其速度、高度、弹体质量、转动惯量和空气动力特性等因素的变化都不剧烈，因而可以把导弹的运动方程组看做是常系数的，或者可以用冻结系数法来处理的。

（2）认为导弹在飞行过程中的扰动运动是不大的，因而，可以在基准弹道附近对导弹的运动进行线性化。并认为基准弹道是直线平飞弹道。

（3）认为导弹是不滚转的，并且弹上倾斜稳定系统是理想的；因此，可以把导弹的俯仰运动同偏航运动分开来进行研究。

（4）关于弹上舵机及舵控力的假定，必须多说几句：在传统的导弹飞行力学和设计原理中，总是把舵机看做是比例式的；并且，舵机动作所引起的舵控力变化，同控制指令的强度变化成比例。在这种假定下来分析导弹的受控运动是方便的。但是，在反坦克导弹的实际情况下，绝大多数的舵机不是比例式的，而是继电式（乒乓式）的，这样就使得传统的假定发生问题。

下面先来分别讨论两种类型的舵机所引起的舵控力的表述方法，然后再来对它们进行

比较和简化。

### 1. 比例式舵机

对于比例式舵机，它所引起的舵控力  $F_K$  应该同它的动作程度成比例，即

$$F_K = |F_{K, \max}| f \quad (5-1-1)$$

式中  $F_K$ ——舵控力；

$F_{K, \max}$ ——舵机动作到极端位置上时所产生的舵控力；

$f$ ——描述舵机动作程度的无量纲参量，显然  $-1 \leq f \leq 1$ ；或称  $f$  为无量纲的舵控力。

这里需要说明一点，在传统的飞行力学及导弹设计理论中，习惯于采用“舵偏角”来描述舵机的动作程度；但是，对于许多反坦克导弹所采用的扰流片等操纵器来说，舵偏角的概念是不适用的。所以，这里引入无量纲参数  $f$  来表述舵机的动作程度，可将  $f$  理解为舵机动作的行程对于其动作的最大可能行程的绝对值之比。进一步讲，舵机的动作程度  $f$ ，是由控制指令的强度所决定的。假若指令是缓变电压信号  $U(t)$ ，那么指令强度就应由指令信号  $U$  对于其最大幅值  $|U|$  之比来表达。一般地讲，可有

$$f = -K \quad (5-1-2)$$

式中  $K$ ——指令系数，代表指令的强度，并也有  $-1 \leq K \leq 1$ 。

注意 (5-1-2) 式右端的负号，它表明正的指令系数  $K$  将引起负的舵控力，这样规定的理由稍后再谈。

### 2. 继电式舵机

对于继电式舵机，指令信号  $U(t)$  是脉冲调宽的，相应产生的舵控力  $F_K$  也是脉冲调宽的，但略有滞后及斜边（图 5-1）。这时，仍可用前面的 (5-1-1) 式，通过无量纲参量  $f$  来描述舵控力  $F_K$ 。利用这一概念，把  $f$  看做是输入，即可建立弹体环节的数学模型。但是，在把这个弹体环节的数学模型同整个制导系统联系起来时，就难于处理了。所以，要进行简化。

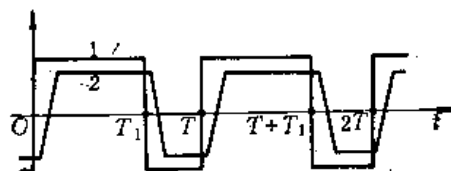


图5-1 指令信号及舵控力波形  
1—指令电压  $U$ ；2—舵控力  $F_K$ 。

### 3. 把继电式舵机看做是等效的比例式舵机

在对继电式舵机的数学模型进行简化时，必须有一定的前提条件。这个前提条件就是：脉冲调宽的指令信号的脉冲频率必须远远大于弹体摆动的固有频率。在此前提条件之下，弹体的运动响应将不可能跟随上  $F_K$  或  $f$  的急速变化；结果，弹体只能对  $F_K$  或  $f$  的平均值做出运动响应。在此情况下，可以把继电式舵机看做是一个等效的比例式舵机。

这时，可以通过如下定义的脉冲调宽指令信号的指令系数  $K$ ，来表达  $F_K$  或  $f$  的平均值，即

$$K = 1 - \frac{2T_1}{T} \quad (5-1-3)$$

式中  $T$ ——脉冲调宽指令信号的重复周期；

$T_1$ ——在一周期之内，指令信号电压  $U > 0$  的时间。

式 (5-1-3) 表明，脉冲调宽指令信号的指令系数  $K$  乃是信号电压的周期平均值对于最大



信号电压之比的负值。

由于继电式舵机的动作程度同指令信号电压的变化是基本一致的，所以，指令系数  $K$  能代表继电式舵机的平均动作程度  $f_{\text{平均}}$ ，于是，可以定义

$$f_{\text{平均}} \triangleq -K \quad (5-1-4)$$

式中的  $\triangleq$  符号，表示“按定义等于”。

于是，对于继电式舵机，可有

$$F_{K,\text{平均}} = |F_{K,\text{max}}| \cdot f_{\text{平均}} \triangleq |F_{K,\text{max}}| \cdot (-K) \quad (5-1-5)$$

引用指令系数  $K$  来代表舵控力的平均值，就能方便地将弹体环节放在整个制导系统之中进行分析了。

## § 5-1-2 反坦克导弹在控制作用下的运动方程

### 一、俯仰运动

#### (一) 运动方程

对于弹体不滚转的导弹，可以把它的俯仰运动和偏航运动分开来进行研究。首先研究它的俯仰运动（见图 3-3），可得如下的运动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \cos \Theta & (5-1-6) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \sin \Theta & (5-1-7) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos \alpha - F_{K,y} \sin \alpha - X - mg \sin \Theta & (5-1-8) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} mv \frac{d\Theta}{dt} &= F \sin \alpha + F_{K,y} \cos \alpha + Y - mg \cos \Theta & (5-1-9) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} J_x \frac{d^2\delta}{dt^2} &= M_x + M_{K,x} & (5-1-10) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \alpha + \Theta & (5-1-11) \end{aligned} \right\}$$

式中  $F$ ——喷气推力（沿弹轴方向）；

$F_{K,y}$ ——舵控力在  $o_1y_3$  轴上的投影；

$X$ ——空气阻力， $X = \frac{1}{2} \rho v^2 S c_{x1}$ ；

$Y$ ——空气动力举力， $Y = \frac{1}{2} \rho v^2 S c_{y1}$ ；

$M_x$ ——空气动力俯仰力矩，包括俯仰恢复力矩及阻尼力矩，

$$M_x = \frac{1}{2} \rho v^2 S L m_x^* \alpha + \frac{1}{2} \rho v S L^2 m_x^{*2} \omega_x$$

$M_{K,x}$ ——舵上控制力矩在  $o_1z_3$  轴上的投影。

关于舵控力  $F_{K,y}$ ，在导弹不滚转的前提之下，可参照 (5-1-1)~(5-1-5) 进行描述；在俯仰运动情况下，只需加上脚标  $\langle y \rangle$ ，即

$$F_{K,y} = |F_{K,\text{max}}| f_y \quad (5-1-12)$$

关于舵控力矩  $M_{K,x}$ ，在俯仰运动情况下，可如下描述

$$M_{K,z} = F_{K,y} L_K = |F_{K,\max}| f_y L_K \quad (5-1-13)$$

或者以俯仰指令系数  $K_y$  来描述此俯仰的舵控力矩, 即

$$M_{K,z} = |F_{K,\max}| L_K (-K_y) \quad (5-1-14)$$

对于比例式舵机, 式 (5-1-14) 的描述是精确的; 对于继电式舵机, 式 (5-1-14) 是将其视为一个等效的比例式舵机来描述的。

这里, 应注意隐含的规定: 若舵机位于重心的后方, 则有  $L_K < 0$ , 这时只有  $F_{K,y} < 0$  ( $f_y < 0$ ) 才能使  $M_{K,z} > 0$ 。然而, 正的俯仰舵控力矩  $M_{K,z} > 0$  的效应是使导弹爬升; 并且, 习惯上总把引起导弹爬升的指令称为“上升指令”或“正指令”, 即习惯上定义爬升指令的指令系数  $K_y > 0$ 。故对于常见的舵机位于重心后方的导弹构型来说, 正的俯仰指令系数 ( $K_y > 0$ ), 应该引起负的舵控力, 即相应地有  $f_y < 0$ , 这就是 (5-1-2) 式及 (5-1-4) 式的右端带有负号的原因。

前已假定, 反坦克导弹的受控飞行是在基准弹道附近进行的。因此, 它的  $v-t$  及  $x-t$  变化规律可按第三章的方法事先求出。这样, 上面方程组中的 (5-1-6) 及 (5-1-8) 二式可认为已经解决。此外, 在上述假定条件下, 显然  $\alpha$  及  $\theta$  都是不大的量, 因此可有  $\cos \alpha \approx \cos \Theta \approx 1$  及  $\sin \alpha \approx \alpha$ 、 $\sin \Theta \approx \Theta$ 。于是可将 (5-1-7) 及 (5-1-9)~(5-1-11) 诸式线性化, 并考虑到 (5-1-1) 及 (5-1-3) 式而得出

$$\begin{cases} \theta - \alpha - \Theta = 0 & (5-1-15) \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta}{dt} + a_2 \alpha = -a_3 f_y & (5-1-16) \\ a_4 \alpha - \frac{d\Theta}{dt} = -a_5 f_y + \frac{g}{v} & (5-1-17) \end{cases}$$

以及 
$$\frac{dy}{dt} = v\Theta \quad (5-1-18)$$

其中  $a_1 \sim a_6$ ——俯仰运动的动力系数;

$$a_1 = \frac{-m_z^2 \rho v S L^2}{2 J_x} \quad (\text{秒}^{-1});$$

$$a_2 = \frac{-m_z^2 \rho v^2 S L}{2 J_x} \quad (\text{秒}^{-2});$$

$$a_3 = \frac{-L_K |F_{K,\max}|}{J_x} \quad (\text{秒}^{-2});$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 S c_y^a + F}{m v} \quad (\text{秒}^{-1});$$

$$a_5 = |F_{K,\max}| / (m v) \quad (\text{秒}^{-1})。$$

在导弹具有静稳定性 ( $m_z^2 < 0$ ) 并且舵机位于导弹重心后方 ( $L_K < 0$ ) 的情况下, 动力系数  $a_1 \sim a_5$  皆为正值。

注意, 在方程组 (5-1-14) ~ (5-1-17) 中, 输出量是  $\theta$ 、 $\alpha$ 、 $\Theta$  及  $y$  ●, 输入量则为

● 同传统的飞行力学中的扰动运动方程略有不同, 这里的  $\theta$ 、 $\alpha$ 、 $\Theta$  及  $y$  不必理解为基准弹道附近的扰动增量, 却可理解为全量。

无量纲的舵控力（或舵机动作程度） $f_y$ 及重力加速度 $g$ 。

### （二）用等效的比例式舵机代替继电器式舵机

到此为止，并未涉及舵机及控制指令的形式问题。就是说，不论弹上舵机是比例式的还是继电器式的，都可用方程组（5-1-14）~（5-1-17）来描述导弹的受控运动。在采用继电器式舵机的情况下，式中的 $f_y$ 乃是调宽的脉冲；这时，输出量 $\delta$ 、 $\alpha$ 、 $\Theta$ 及 $y$ 的变化规律很复杂。为了便于分析，在脉冲频率远大于导弹摆动的固有频率的情况下，可用 $f_y$ 的周期平均值来近似地代替各周期之内的调宽脉冲，即利用（5-1-5）式，而得下面的方程组

$$\delta - \alpha - \Theta = 0 \quad (5-1-19)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + a_1 \frac{d\delta}{dt} + a_2\alpha = a_3K_y \quad (5-1-20)$$

$$a_4\alpha - \frac{d\Theta}{dt} = a_5K_y + \frac{g}{v} \quad (5-1-21)$$

$$\frac{dy}{dt} = v\Theta \quad (5-1-22)$$

这时，输入量是指令系数 $K_y$ ，输出量仍为 $\delta$ 、 $\alpha$ 、 $\Theta$ 及 $y$ ，但实际上也只是在周期平均的意义上近似地反映着这些运动参量变化的主要规律。从导弹系统动力学的角度来看，这样的简化是十分方便的。所以，从这里直到§5-4之前，都采用这种简化的数学模型。

### （三）重力的影响及平飞指令

假想一个 $K_y = 0$ 的特殊情况。这时，只有 $\frac{g}{v}$ 是输入量，即导弹只受重力的“控制”。显然不必具体求解方程组，即可看出导弹将沿着逐渐下沉的弹道运动。

为了维持导弹平飞，必须施加给导弹一定的平飞指令—— $K_{y, \text{平飞}}$ 。

在§3-3中，曾讨论过维持导弹平飞的条件，并导出了维持平飞所需的攻角及舵控力。在那时，曾采用过假设 $\Theta = \frac{d\Theta}{dt} = 0$ ， $\frac{d\delta}{dt} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = 0$ 。在同样的假设之下，可以类似地导出维持平飞所需的平飞指令 $K_{y, \text{平飞}}$ ，由（5-1-16）及（5-1-17）可得

$$a_2\alpha = a_3K_y \quad (5-1-23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_4\alpha &= a_5K_y + \frac{g}{v} \end{aligned} \right. \quad (5-1-24)$$

从中解出

$$K_{y, \text{平飞}} = \frac{g}{\left( \frac{a_3 a_4}{a_2} - a_5 \right) v} \quad (5-1-25)$$

或

$$K_{y, \text{平飞}} = \frac{mg}{|F_{K, \text{max}}| \left[ \frac{-L_K}{-m_z^a L} \left( c_y^a + \frac{2F}{\rho v^2 S} \right) - 1 \right]} \quad (5-1-26)$$

（可同式（3-3-6）对比，注意正的 $K_y$ ，相应于负的舵控力 $F_{K, y}$ ）

以及

$$\alpha_{\text{平飞}} = \frac{g}{\left(a_4 - \frac{a_2 a_5}{a_3}\right) v} \quad (5-1-27)$$

或如 (3-3-5) 式, 此外并有

$$\delta_{\text{平飞}} = \alpha_{\text{平飞}} \quad (5-1-28)$$

$$\Theta_{\text{平飞}} = 0 \quad (5-1-29)$$

注意, 以上 (5-1-25)~(5-1-29) 的结果是在相当简化的假设下导出的。若细致地考虑, 则应研究下列方程组

$$\delta_{\text{平飞}} - \alpha_{\text{平飞}} - \Theta_{\text{平飞}} = 0 \quad (5-1-30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \delta_{\text{平飞}}}{dt^2} + a_1 \frac{d \delta_{\text{平飞}}}{dt} + a_2 \alpha_{\text{平飞}} = a_3 K_{y, \text{平飞}} \end{array} \right. \quad (5-1-31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 \alpha_{\text{平飞}} - \frac{d \Theta_{\text{平飞}}}{dt} = a_5 K_{y, \text{平飞}} + \frac{g}{v} \end{array} \right. \quad (5-1-32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d y_{\text{平飞}}}{dt} = v \Theta_{\text{平飞}} \end{array} \right. \quad (5-1-33)$$

详细的研究将在后面进行, 这里只须指出 (5-1-25)~(5-1-29) 式只能表示方程组 (5-1-30)~(5-1-33) 在  $t \rightarrow \infty$  时的结果。在飞行的初始段上, 如果  $K_{y, \text{平飞}}$  是突然加上的话, 导弹弹道将发生某些振荡。所以, 平飞指令应该逐渐加上去。

实际的平飞指令往往是预先装入地面的控制装置中, 并按一定的程序施加给导弹。在正常情况下, 不需射手移动操纵手柄, 导弹也能基本上维持平飞。

#### (四) 导弹的扰动控制运动

导弹在飞行中总会受到各种干扰, 并且目标可能进行机动; 因此, 射手 (或红外测角仪) 要经常发出指令信号来改变导弹原来的运动状态, 这就是导弹的扰动控制运动。射手 (或红外测角仪) 所发出的指令, 将叠加在平飞指令之上, 即总的指令系数是

$$K_y = K_{y, \text{平飞}} + \Delta K_y \quad (5-1-34)$$

式中  $\Delta K_y$ ——射手 (或红外测角仪) 所发出的指令信号的指令系数。

由于方程组 (5-1-19)~(5-1-22) 是线性的, 故可应用叠加原理把重力影响  $\frac{g}{v}$ 、平飞指令  $K_{y, \text{平飞}}$  和扰动控制指令  $\Delta K_y$  分开来做为单独的输入, 再将它们引起的输出叠加起来。

以扰动控制指令  $\Delta K_y$  为输入量时, 由方程 (5-1-19)~(5-1-22) 可得输出量  $\Delta \delta$ 、 $\Delta \alpha$ 、 $\Delta \Theta$  及  $\Delta y$ , 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \delta - \Delta \alpha - \Delta \Theta = 0 \end{array} \right. \quad (5-1-35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + a_1 \frac{d \Delta \delta}{dt} + a_2 \frac{d \Delta \alpha}{dt} = a_3 \Delta K_y \end{array} \right. \quad (5-1-36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 \Delta \alpha - \frac{d \Delta \Theta}{dt} = a_5 \Delta K_y \end{array} \right. \quad (5-1-37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \Delta y}{dt} = v \Delta \Theta \end{array} \right. \quad (5-1-38)$$

方程 (5-1-35)~(5-1-38) 是导弹的扰动控制运动方程组。

按叠加原理, 导弹的总运动应是由导弹的平飞运动方程组 (5-1-30)~(5-1-33) 及扰动控制运动方程组 (5-1-35)~(5-1-38) 所得之解的总合, 即

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_{\mp\tau} + \Delta\vartheta & (5-1-39) \\ \alpha = \alpha_{\mp\tau} + \Delta\alpha & (5-1-40) \\ \Theta = \Theta_{\mp\tau} + \Delta\Theta = \Delta\Theta & (5-1-41) \\ \Delta y = y_{\mp\tau} + \Delta y = \Delta y & (5-1-42) \end{cases}$$

为了方便, 在研究导弹的扰动控制运动时, 常在书写  $\Delta K_y$ 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\Theta$  及  $\Delta y$  的过程中略去增量符号  $\Delta$ ; 而简写成  $K_y$ 、 $\vartheta$ 、 $\alpha$ 、 $\Theta$  及  $y$ 。但是, 在概念上千万注意不要把导弹的扰动控制运动同总运动混淆起来。

## 二、偏航运动

不滚转的导弹在偏航运动中所受的各种力及力矩同俯仰运动情况相似, 只是重力对偏航运动不再发生影响。在直线平飞弹道附近, 导弹的  $v-t$  变化规律仍可按基准弹道算出。于是可建立导弹的偏航运动方程组如下

$$\psi - \beta - \Psi = 0 \quad (5-1-43)$$

$$mv \frac{d\Psi}{dt} = F \sin \beta + F_{K_x} \cos \beta - Z \quad (5-1-44)$$

$$J_x \frac{d^2\psi}{dt^2} = M_y + M_{K_y} \quad (5-1-45)$$

$$\frac{dz}{dt} = -v\Psi \quad (5-1-46)$$

式中  $Z$ ——空气动力侧向力,  $Z = \frac{1}{2} \rho v^2 S c_z^2 \beta$ ,

$F_{K_x}$ ——舵控力在负的  $o_1 z_3$  轴上的投影<sup>●</sup>;

$M_y$ ——空气动力偏航力矩 (包括阻尼力矩)

$$M_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S L m_y^2 \beta + \frac{1}{2} \rho v S L^2 m_y^2 \omega_{y3}$$

$M_{K_y}$ ——舵控力矩在  $o_1 y_3$  轴上的投影。

为了使俯仰运动和偏航运动的方程组具有对称的形式, 在本书中对舵控力  $F_{K_x}$  的正方向做了特殊的规定。这样, 便于以后用复变数来对导弹的空间运动进行描述和研究。同前类似

$$F_{K_x} = |F_{K_{\max}}| f_x \quad (5-1-47)$$

关于舵控力矩  $M_{K_y}$ , 在偏航运动中为

$$M_{K_y} = F_{K_x} L_K = |F_{K_{\max}}| f_x L_K \quad (5-1-48)$$

或以偏航的指令系数  $K_x$  来描述

$$M_{K_y} = |F_{K_{\max}}| L_K (-K_x) \quad (5-1-49)$$

注意, 在舵机位于弹体重心后方的情况下,  $L_K < 0$ , 故偏航指令系数为正 ( $K_x > 0$ ) 时,

● 注意  $F_{K_x}$  的正负规定, 它同传统规定不同。

舵控力矩  $M_{K_z}$  为正, 导弹将向左偏航 (从后向前看去); 反之,  $K_z < 0$ , 将使导弹向右偏航。

类似于俯仰运动那样, 可将上面的方程组进行线性化和简化, 即得

$$\begin{cases} \psi - \beta - \Psi = 0 & (5-1-50) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi}{dt^2} + b_1 \frac{d\psi}{dt} + b_2\beta = -b_3 f_z \approx b_3 K_z & (5-1-51) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_4\beta - \frac{d\Psi}{dt} = -b_5 f_z \approx b_5 K_z & (5-1-52) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -v\Psi & (5-1-53) \end{cases}$$

其中

$$b_1 = \frac{-m_y^{\omega} S L^2 \rho v}{2 J_y},$$

$$b_2 = \frac{-m_y^{\beta} S L \rho v^2}{2 J_y},$$

$$b_3 = -\frac{L_K |F_{K, \max}|}{J_z},$$

$$b_4 = \frac{-\frac{1}{2} \rho v^2 S c_z^{\beta} + F}{mv}, \quad (\text{注意 } c_z^{\beta} < 0)$$

$$b_5 = \frac{|F_{K, \max}|}{mv}$$

在导弹具有静稳定性 ( $m_y^{\beta} < 0$ ) 并且舵机位于导弹重心后方 ( $L_K < 0$ ) 的情况下, 动力系数  $b_1 \sim b_5$  皆为正值。

由于假定重力对导弹的偏航运动不发生影响, 故方程组 (5-1-50)~(5-1-53) 既是扰动控制运动的方程组, 又是导弹的侧向总运动的方程组, 即  $\psi = \Delta\psi$ ,  $\beta = \Delta\beta$ ,  $\Psi = \Delta\Psi$  且  $z = \Delta z$ 。

注意, 偏航运动方程组 (5-1-50)~(5-1-53) 同俯仰扰动控制运动方程组 (5-1-35)~(5-1-38) 的形式完全相同, 因此分析其中之一即可。下面将只分析俯仰扰动控制运动, 但其结果完全可以推广到偏航运动中。

### § 5-1-3 传递函数的概念

#### 一、传递函数的导出

考察导弹的俯仰扰动运动方程组 (5-1-35)~(5-1-38) 可以看出, 若以俯仰指令系数  $K_y$  做为输入量, 先对前三个方程 (5-1-35)~(5-1-37) 联立求解, 即可求得扰动运动参量 (略去符号  $\Delta$ )  $\theta$ 、 $\Theta$  及  $\alpha$  随时间  $t$  而变化的过程。然后, 再以  $\Theta$  做为输入量, 就可以单独积分 (5-1-38) 式, 从而求出在扰动控制运动中导弹重心的高度随时间  $t$  而变化的规律  $y(t)$ 。这个过程可用如下的框图来表达 (见图 5-2)。

因为现在需要研究的是控制指令引起的导弹的受控运动, 而不是初始条件引起的自由

运动,故可在零初始条件下来求解方程组(5-1-35)~(5-1-38)。这时,拉氏变换是最方便的运算工具。

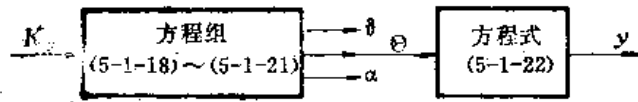


图5-2 俯仰的扰动控制运动的传递

在零初始条件下对(5-1-35)~(5-1-38)进行拉氏变换,可得

$$\begin{cases} \vartheta(p) - \alpha(p) - \Theta(p) = 0 & (5-1-54) \\ (p^2 + a_1 p) \cdot \vartheta(p) + a_2 \cdot \alpha(p) = a_3 K_y(p) & (5-1-55) \\ a_4 \cdot \alpha(p) - p \cdot \Theta(p) = a_5 \cdot K_y(p) & (5-1-56) \end{cases}$$

其中,  $\vartheta(p)$ 、 $\alpha(p)$  及  $\Theta(p)$  是  $\vartheta(t)$ 、 $\alpha(t)$  及  $\Theta(t)$  的拉氏变换。可将它们做为拉氏变换运算符  $p$  的代数函数从方程组(5-1-54)~(5-1-56)中解出,得到

$$\vartheta(p) = K_y(p) \frac{a_3 p + a_3 a_4 - a_2 a_5}{p [p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4]} \quad (5-1-57)$$

$$\alpha(p) = K_y(p) \frac{a_5 p + (a_3 + a_1 a_5)}{p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4} \quad (5-1-58)$$

$$\Theta(p) = K_y(p) \frac{-a_5 p^2 - a_1 a_5 p + a_3 a_4 - a_2 a_5}{p [p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4]} \quad (5-1-59)$$

对于特定的指令  $K_y$ , 将(5-1-57)~(5-1-59)式进行拉氏反变换,即可求出导弹对于此指令的响应运动。然而,在实际情况中,控制指令是变化多端的。对于无穷多样的可能的指令,都一一求出弹体的响应是不必要的,也是不可能的。从设计的角度来说,重要的不是多种多样的指令及其响应运动的具体表现,而是运动过程中的本质。运动过程的这种本质可以用传递函数来表达。

对于弹体的俯仰扰动控制运动,按式(5-1-57)~(5-1-59)可以定义三个传递函数如下:

$$W_K^\vartheta(p) = \frac{\vartheta(p)}{K_y(p)} = \frac{a_3 p + a_3 a_4 - a_2 a_5}{p [p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4]} \quad (5-1-60)$$

$$W_K^\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{K_y(p)} = \frac{a_5 p + a_3 + a_1 a_5}{p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4} \quad (5-1-61)$$

$$W_K^\Theta(p) = \frac{\Theta(p)}{K_y(p)} = \frac{+a_5 \left( \frac{-p^2 - a_1 p + a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_5} \right)}{p [p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4]} \quad (5-1-62)$$

现在,这些式子左端所表达的,实质上就是任何控制指令  $K_y$  所引起的弹体摆动运动的角度参量  $\vartheta$ 、 $\alpha$  及  $\Theta$  的响应。但这并不是以直接的形式表达,而是以转化了的形式(即其拉氏变换)来表达的;也不是以绝对的形式,而是以相对的形式来表达的。再看式子的右端,其中所包含的诸参量,完全是由弹体固有的结构特性及空气动力特性所决定的,没有任何偶然的和外界的因素。因此,它所表达的,实际上就是弹体对控制指令的响应运动的本质和内因。

利用传递函数,可将式(5-1-57)~(5-1-59)改写;例如,可将(5-1-59)改写成

$$\Theta(p) = W_K^\Theta(p) \cdot K_y(p) \quad (5-1-63)$$

这个式子说明:对于任何输入的控制指令  $K_y = K_y(t)$ , 经过拉氏变换“翻译”成  $K_y(p)$ ,

又通过传递函数  $W_K^{\Theta}(p)$  的“传递”，而得运动响应的拉氏变换形式  $\Theta(p)$ ；再经过反向的“翻译”，即可获得  $\Theta(t)$  的输出。这一运动过程，实质上就是“外因通过内因而起作用”。我们可以用方框图来形象地表达这个过程，如图 5-3 所示。



图5-3 俯仰控制运动的传递

这样一个具有输入和输出的“方框”，就代表导弹制导系统中间的一部分运动传递作用，常常称之为一个“环节”。若知道一个环节的传递函数，则知道了这个环节的动力学特性，即可判断其输入同输出的关系。

## 二、传递函数同微分方程的关系

前面是从运动方程推演出传递函数来的。反过来，如果已经知道某个环节的传递函数，那么，也能反向地将它的运动方程推出来。例如，已知输入指令  $K_y$  到输出攻角  $\alpha$  之间的传递函数  $W_K^{\alpha}$  为式 (5-1-62)，那么，相应的运动方程可如下推出：先改写 (5-1-62) 式为

$$[p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4] \alpha(p) = [a_5 p + a_3 + a_1 a_5] \cdot K_y(p)$$

再对上式进行拉氏反变换，事实上，使  $p = \frac{d}{dt}$ ， $p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$  即可，于是得到

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + (a_1 + a_4) \frac{d}{dt} + a_2 + a_1 a_4 \right] \alpha(t) = \left[ a_5 \frac{d}{dt} + a_3 + a_1 a_5 \right] K_y(t)$$

式中  $\frac{d}{dt}$  及  $\frac{d^2}{dt^2}$  是微分算子，或写成通常形式的微分方程，即得

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + (a_1 + a_4) \frac{d \alpha}{dt} + (a_2 + a_1 a_4) \alpha = a_5 \frac{d K_y}{dt} + (a_3 + a_1 a_5) K_y \quad (5-1-64)$$

事实上，直接从方程组 (5-1-35)~(5-1-38) 消去未知的扰动运动参量  $\delta$  及  $\Theta$ ，也可以得到上式。

因此，传递函数不过是运动微分方程的另一种形式。在普遍的情况下，若动力学系统的运动可用常系数线性微分方程描述如下

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f \quad (5-1-65)$$

注意，其特征方程是

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (5-1-66)$$

则相应的传递函数就是

$$W(p) = \frac{x(p)}{f(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (5-1-67)$$

就是说，传递函数的分母反映着系统的特征方程；而分子则反映着输入量  $f$  施加于系统的方式。

## 三、传递函数的极点和零点

常系数线性系统的传递函数的分子和分母都是  $p$  的多项式。并且，任何物理上可以实现的系统，其传递函数的分母中  $p$  的最高幂次总不小于分子中  $p$  的最高幂次，即  $n \geq m$ 。

可对传递函数的分母及分子的多项式进行因式分解，得到

$$W(p) = \frac{b_m (p - \gamma_1) \dots (p - \gamma_m)}{a_n (p - \lambda_1) \dots (p - \lambda_n)} \quad (5-1-68)$$



其中的  $\gamma_i$  及  $\lambda_i$  都是复数, 在复平面 (称为  $p$  平面) 中绘出如图 5-4。当  $p = \gamma_i$  时,  $W(p)|_{p=\gamma_i} = 0$ ; 故把  $p$  平面上与复数  $\gamma_i$  相应的点称为“零点”, 在  $p$  平面中以  $Z_i$  标明。当  $p = \lambda_i$  时,  $W(p)|_{p=\lambda_i} = \infty$ ; 故称与  $\lambda_i$  相应的点为“极点”, 在  $p$  平面中以  $P_i$  标明。这就是所谓“极、零点分布图”。

#### 四、系统的稳定性同其极点分布的关系

显然, 由于传递函数的分母就是相应的微分方程的特征方程, 故传递函数的极点就是微分方程的特征根。若输入量  $f(t) = 0$ , 则微分方程是齐次的, 这时得到的解反映着系统的自由运动, 即

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

因此, 系统的自由运动同微分方程的特征根或传递函数的极点有密切关系。可用  $\sigma_i$  及  $\omega_i$  来表示特征根  $\lambda_i$  的实部及虚部, 即

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad (5-1-69)$$

于是相应的自由运动成分就是

$$C_i e^{\lambda_i t} = C_i e^{\sigma_i t} \cdot e^{j\omega_i t} \quad (5-1-70)$$

其中  $e^{j\omega_i t} = \cos\omega_i t + j\sin\omega_i t$ , 它反映着简谐振荡运动, 而  $e^{\sigma_i t}$  则反映着此简谐振荡运动的振幅随时间而变化的趋势。假如特征根  $\lambda_i$  的实部  $\sigma_i > 0$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时  $e^{\sigma_i t} \rightarrow \infty$ ; 于是系统的自由运动是发散的; 就是说, 若系统受到任何扰动后, 都倾向于无限地偏离原来的状态; 这种情况说明系统是不稳定的。但若  $\sigma_i < 0$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{\sigma_i t} \rightarrow 0$ ; 于是, 若系统受到偶然扰动以后, 经过一定的时间, 将能恢复到原来的平衡状态; 这种情况说明系统是稳定的。所以, 特征根的实部  $\sigma_i$  为负或为正, 决定着系统是否具有稳定性。然而  $\sigma_i < 0$  (或  $\sigma_i > 0$ ) 就相当于传递函数的诸极点  $P_i$  位于虚轴的左边 (或右边)。因此, 若要求系统是稳定的, 那么, 在  $p$  平面上, 它的极点必须全部位于虚轴的左边。

但是, 如果有极点恰好位于虚轴之上, 系统是否还是稳定的呢? 这里又分两种情况:

第一种情况, 如果有两个极点同时位于虚轴之上, 那么这两极点必是对称的位于原点的上下两边, 就是说, 它们是共轭的, 即特征根的实部  $\sigma_{1,2} = 0$ , 虚部  $\omega_1 = -\omega_2 = |\omega|$ , 于是  $\lambda_{1,2} = \pm j|\omega|$ , 于是相应的自由运动是

$$C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} = A \cos\omega t + B \sin\omega t$$

这是一个等幅的振荡。通常认为这种情况是不稳定的。

第二种情况, 如果只有一个极点位于虚轴之上, 那么, 它只能恰好位于原点, 即  $\lambda_i = 0$ 。这时, 传递函数的分母中一定含有单纯  $p$  的因子, 如式 (5-1-62)。通常认为, 这种类型的极点并不影响系统的稳定性。就是说, 如果系统中其他的极点皆位于虚轴左边, 则认为系统仍是稳定的。但若系统中另有极点位于虚轴右边, 则系统仍是不稳定的。

#### § 5-1-4 弹体环节及运动学环节

在导弹设计工作中需要掌握导弹在操纵飞行中弹体质心的运动规律。因此, 自然应该

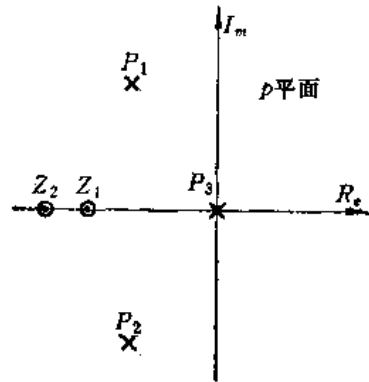


图5-4 极、零点分布举例

把注意力放在从指令输入到弹道倾角 $\Theta$ 输出的传递函数 $W_K^\Theta$ 的研究上。

从弹体设计的角度来看,首先要使导弹弹体具有一定的飞行机动性。然而,前已说过(§4-1-4),所谓机动性,就是导弹能够迅速地改变自己的飞行方向的能力。具体到俯仰平面上的机动性,就是在输入了一定的控制指令之后,导弹的弹道倾角 $\Theta$ 的变化速度 $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$ 有多大。因此,有必要在指令 $K$ 输入到弹道倾角变化率 $\dot{\Theta}$ 输出之间建立传递函数。可定义此传递函数为

$$W_K^{\dot{\Theta}}(p) = \frac{\dot{\Theta}(p)}{K(p)} \quad (5-1-71)$$

另一方面,由动力学关系

$$\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt} \quad (5-1-72)$$

在零初始条件下进行拉氏变换,得

$$\dot{\Theta}(p) = p \cdot \Theta(p) \quad (5-1-73)$$

于是可得从 $\dot{\Theta}$ 输入到 $\Theta$ 输出的传递函数

$$W_{\dot{\Theta}}^\Theta = \frac{\Theta(p)}{\dot{\Theta}(p)} = -\frac{1}{p} \quad (5-1-74)$$

这个传递函数 $W_{\dot{\Theta}}^\Theta$ 体现着自然的运动学关系,称之为“运动学环节”。实际上,在时间域中,它就是一个简单的积分作用,所以又称它为“积分环节”。

然而,根据定义可得下面的关系

$$W_K^\Theta(p) = \frac{\Theta(p)}{K(p)} = \frac{\dot{\Theta}(p)}{K(p)} \cdot \frac{\Theta(p)}{\dot{\Theta}(p)} = W_K^{\dot{\Theta}}(p) \cdot W_{\dot{\Theta}}^\Theta(p) \quad (5-1-75)$$

所以,按(5-1-32)及(5-1-74)式,可求得关于机动性之传递函数

$$W_K^{\dot{\Theta}}(p) = \frac{-a_5 p^2 - a_1 a_5 p + a_3 a_4 - a_2 a_6}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} \quad (5-1-76)$$

通常,把由 $W_K^{\dot{\Theta}}(p)$ 所代表的环节称为“弹体环节”,用方框图表示的(5-1-75)式关系,即为图5-5。

式(5-1-75)及图5-5,反映了一个更普遍的规律,即由两个以上的小环节可以串联而成一个大环节(或系统),大环节(或系统)的传递函数乃是其中各小环节的传递函数之乘积。

即

$$W(p) = \prod_i W_i(p) \quad (5-1-77)$$

式中  $W_i(p)$ ——各小环节的传递函数;

$W(p)$ ——串联后的系统的传递函数。

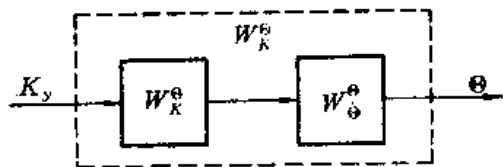


图5-5 弹体环节及运动学环节

## § 5-1-5 弹体环节的分析及简化

## 一、弹体环节的简化

在反坦克导弹的具体情况中,对于弹体环节的传递函数 $W_{\dot{\theta}}(p)$ ,常可按(5-1-76)式加以简化,即略去分子上同动力系数 $a_5$ 有关并含有 $p$ 因子的项,而得

$$W_{\dot{\theta}}(p) \approx \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} \quad (5-1-78)$$

主要的理由是:动力系数 $a_5$ 通常很小。 $a_5$ 的物理意义是在单位指令作用下,直接由于舵控力 $F_K$ 而引起的弹道倾角 $\Theta$ 的变化速度 $\dot{\theta}$ 。但是,舵控力同空气动力升力与推力相比一般是很小的,故 $a_5 \ll a_4$ 。在这种情况下,同 $a_5$ 有关的项将是可略去的。

第二个理由是,在式(5-1-76)的分子中包含的运算符 $p$ 及 $p^2$ ,意味着对输入量的微分作用。若是指令信号的变化不是很快的,那么,它们经过微分之后的输出就将很小。但若指令信号的变化很快,那么,信号经过微分之后虽也可能是很强的;可是,惯性很大的弹体环节却不可能响应这种变化很快的信号,结果,这种高频成分的信号将被滤掉而不起作用(参阅§5-1-9)。

由于以上的原因,按式(5-1-78)对传递函数 $W_{\dot{\theta}}$ 进行简化,通常是可行的。而这种简化,能够使主要的因素明显化,因此对初步设计工作是很方便的。

有时,在导弹的升力很大,因而动力系数 $a_4$ 很大的时候,常常还可以将式(5-1-78)进一步简化为

$$W_{\dot{\theta}} \approx \frac{a_3 a_4}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} \quad (5-1-79)$$

这一式子对于了解弹体环节的物理意义是有帮助的;但是对于设计计算来说,可能误差太大。因此,在设计计算的场合,仍采用(5-1-78)。

二、关于攻角 $\alpha$ 的传递函数 $W_{\alpha}^a$ 

现在,我们可以回过头来看一看对于攻角 $\alpha$ 的传递函数 $W_{\alpha}^a$ 式(5-1-61)。按照同样的理由,也可将它进行类似的简化,如下

$$W_{\alpha}^a(p) = \frac{a_5 p + a_3 + a_1 a_5}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} \approx \frac{a_3 + a_1 a_5}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} \quad (5-1-80)$$

或进一步简化为

$$W_{\alpha}^a(p) \approx \frac{a_3}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} \quad (5-1-81)$$

如果对式(5-1-79)及(5-1-81)进行比较,可以看出,在传递函数 $W_{\dot{\theta}}$ 及 $W_{\alpha}^a$ 之间有简单的近似关系:

$$W_{\dot{\theta}}(p) \approx a_4 \cdot W_{\alpha}^a(p) \quad (5-1-82)$$

或采用方框图表达(图5-6)。

关系式 (5-1-82) 有明显的物理意义, 就是说, 导弹之所以能够以  $\dot{\Theta}$  的速率改变自己的飞行方向  $\Theta$ , 首先是由于在指令的作用下, 弹体的攻角  $\alpha$  有了变化的原故。所以, 要改变导弹的运动方向, 首先要改变弹体的攻角  $\alpha$ 。

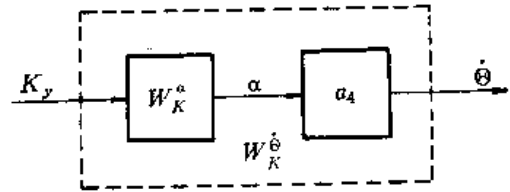


图5-6  $W_K^{\dot{\Theta}}$ 与 $W_K^{\alpha}$ 的关系

注意图5-6中的  $\alpha \rightarrow \boxed{a_4} \rightarrow \dot{\Theta}$ , 在它两端的输入和输出具有不同的量纲。因此,  $a_4$  本身应该具有一定的量纲, 即[1/秒]。为了使物理意义更明显, 有时定义

$$T_{\Theta} = \frac{1}{a_4} \quad (5-1-83)$$

$T_{\Theta}$  称为弹道倾角  $\Theta$  的“时间常数”, 它的量纲为 (秒)。这就是说, 如果攻角有一个突然变化 (例如  $\alpha = 5^\circ$ ), 那么就有  $\dot{\Theta} = \frac{\alpha}{T_{\Theta}}$ , 于是只有经过  $T_{\Theta}$  秒的时间后, 弹道倾角才能达到同  $\alpha$  一样大 (如  $\Theta = 5^\circ$ ) 的变化。

到此为止, 可以看出, 弹道倾角变化率  $\dot{\Theta}$  同弹体的攻角  $\alpha$  的变化规律是大体成正比的 (以  $a_4$  为比例系数)。所以弹体攻角对指令的响应, 也可被看做是弹体环节的响应。

### 三、弹体环节是振荡环节

弹体环节  $W_K^{\dot{\Theta}}$  或  $W_K^{\alpha}$  的分母是一样的, 都是一个  $p$  的二次三项式, 并且各项的系数皆为正值。在大多数情况下这样的环节乃是一个二阶的“振荡环节”。就是说, 它的运动方程式同二阶振荡系统的运动方程是一样的。

习惯上, 常采用另外一些表达振荡环节的标准形式来表达弹体环节的传递函数, 如

$$\left. \begin{aligned} W_K^{\dot{\Theta}} &= \frac{k_K^{\dot{\Theta}} \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} \\ \text{及} \quad W_K^{\alpha} &= \frac{k_K^{\alpha} \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-1-84)$$

式中  $k_K^{\dot{\Theta}}$  及  $k_K^{\alpha}$  —— 弹体环节的放大系数,

$$k_K^{\dot{\Theta}} = \frac{a_3 a_4 - a_5 a_2}{a_2 + a_1 a_4} \approx \frac{a_3 a_4}{a_2 + a_1 a_4}$$

$$k_K^{\alpha} = \frac{a_3 + a_1 a_5}{a_2 + a_1 a_4} \approx \frac{a_3}{a_2 + a_1 a_4}$$

$\omega_n$  —— 弹体环节的固有 (角) 频率  $\omega_n = \sqrt{a_2 + a_1 a_4}$  ;

$\zeta$  —— 弹体环节的相对阻尼系数

$$\zeta = \frac{a_1 + a_4}{2 \sqrt{a_2 + a_1 a_4}}$$

另一种常用的标准形式是

$$W_K^{\dot{\Theta}} = \frac{k_K^{\dot{\Theta}}}{T_a^2 p^2 + 2\zeta T_a p + 1}$$

及

$$W_k^a = \frac{k_k^a}{T_a^2 p^2 + 2\zeta T_a p + 1} \quad (5-1-85)$$

式中  $T_a$ ——弹体环节的时间常数  $T_a = \frac{1}{\omega_n}$ 。

在  $\omega_n$  为实数 (或  $a_2 + a_1 a_4 > 0$ ) 的条件下, 可按式求出弹体环节传递函数的极点:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (5-1-86)$$

在  $p$  平面上, 它们是一对共轭极点, 如图 5-7 所示。

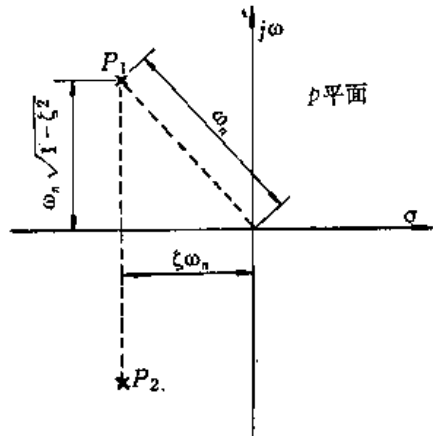


图5-7 弹体环节的极点

### § 5-1-6 弹体环节对几种简单指令的响应特性

下面将研究弹体环节在几种典型的指令输入情况下的响应。由于攻角  $\alpha$  的变化同弹道倾角变化率  $\dot{\theta}$  的变化是大体上成正比的, 所以, 只讨论攻角  $\alpha$  的响应就可以了。若想了解  $\dot{\theta}$  的变化, 只需把放大系数  $k_k^a$  改变为  $k_k^{\dot{\theta}}$  就可以了。

#### 一、弹体环节的自由运动、稳定性及振荡性

在指令输入为零的情况下, 弹体环节的运动就是自由运动。显然, 自由运动同传递函数的分子无关, 而只决定于传递函数的分母和运动的初始条件。

由弹体环节的传递函数式 (5-1-81)

$$W_k^a = \frac{\alpha(p)}{K(p)} = \frac{a_3}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4}$$

可知关于攻角的运动方程应是

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + (a_1 + a_4) \frac{d\alpha}{dt} + (a_2 + a_1 a_4) \alpha = a_3 \cdot K(t) \quad (5-1-87)$$

这是一个二阶线性微分方程。在  $K(t) = 0$  的情况下, 得到它的齐次方程

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + (a_1 + a_4) \frac{d\alpha}{dt} + (a_2 + a_1 a_4) \alpha = 0 \quad (5-1-88)$$

式 (5-1-88) 的解就是导弹的自由扰动运动, 即

$$\alpha = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5-1-89)$$

式中  $C_1$  及  $C_2$ ——积分常数, 由初始条件确定。若初始条件为: 当  $t = 0$  时,  $\alpha = \alpha_0$  且

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}_0 \text{ 则}$$

$$C_1 = \frac{-\lambda_2 \alpha_0 + \dot{\alpha}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1 \alpha_0 - \dot{\alpha}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

式 (5-1-88) 的特征方程乃是

$$\lambda^2 + (a_1 + a_4) \lambda + (a_2 + a_1 a_4) = 0 \quad (5-1-90)$$

于是特征根就是

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(a_1+a_4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right)^2 - (a_2+a_1a_4)} \quad (5-1-91)$$

在实际情况下，由于在导弹摆动时总是要受到阻尼力矩的，故总有  $a_1 > 0$ 。此外，由于总是有  $C_s^e > 0$ ，因此，只要推力  $F \geq 0$ ，就有  $a_4 > 0$ 。在这种实际条件下，按 (5-1-91) 式算出的特征根  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$  的性质只能出现以下三种情况：

第一种情况，如果  $a_2 + a_1a_4 > \left(\frac{a_1+a_4}{2}\right)^2$ ，或者说， $a_2 > \left(\frac{a_1-a_4}{2}\right)^2$ ，那么

$\sqrt{\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right)^2 - (a_2+a_1a_4)}$  肯定为虚数，于是  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$  为一对具有负实部的共轭复根。

第二种情况，如果  $-a_1a_4 < a_2 \leq \left(\frac{a_1-a_4}{2}\right)^2$ ，那么  $\sqrt{\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right)^2 - (a_2+a_1a_4)}$  肯定为小于  $\frac{a_1+a_4}{2}$  之实数，于是  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$  必为两个负值实根。

第三种情况，如果  $(a_2+a_1a_4) \leq 0$ ，于是在  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$  之中必定有一个非负值的实根，例如， $\lambda_1 \geq 0$ ；而  $\lambda_2 \leq -(a_1+a_4)$ 。

在第一种情况下，可把特征根表为

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (5-1-92)$$

于是，齐次方程 (5-1-88) 的解就是

$$\alpha = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ C_1 e^{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t} + C_2 e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t} \right] \quad (5-1-93)$$

根据本情况的条件，必有  $\omega_n = \sqrt{a_2 + a_1a_4} > \frac{a_1+a_4}{2}$  及  $\zeta = \frac{a_1+a_4}{2\sqrt{a_2+a_1a_4}} < 1$  于是在引入初

始条件之后，即可将 (5-1-93) 演化为

$$\alpha = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ \alpha_0 \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t - \phi) + \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t) \right\} \quad (5-1-94)$$

其中  $\phi = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ 。

式 (5-1-94) 表明，在这种情况下的弹体攻角的自由运动是一个衰减的振荡过程。在任何初始扰动的作用下，经过适当的时间之后，攻角  $\alpha$  可衰减至充分小的数值，所以运动是稳定的。

在第二种情况下，可将特征根表为 (5-1-92) 式，只是按本情况之条件，应有

$$0 < \omega_n < \frac{(a_1+a_4)}{2}$$

及

$$\xi = \frac{a_1 + a_4}{2\sqrt{a_2 + a_1 a_4}} > 1$$

于是, 实际上, 由 (5-1-92) 式应有

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= \omega_n \left[ -\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1} \right] \end{aligned}$$

这时, 齐次方程 (5-1-88) 之解为两个衰减项之和。这表明, 弹体攻角  $\alpha$  之变化失去振荡性; 但是, 运动还是稳定的。

在第三种情况下, 齐次方程 (5-1-88) 的解中将包含一个不衰减的项  $C_1 e^{\lambda_1 t}$ 。在初始扰动的作用下, 弹体不能恢复到原来的平衡状态, 所以, 弹体的自由运动是不稳定的。

由此可知, 为使弹体环节具有稳定性, 必须使

$$\omega_n^2 = (a_2 + a_1 a_4) > 0 \quad (5-1-95)$$

有时, 把这一条件称为动稳定性条件。

前已说过, 在实际情况中常有  $a_1 > 0$ , 并且  $a_4 > 0$ , 因此  $a_1 a_4 > 0$ 。于是为了保证弹体环节的稳定性, 还可将上述的动稳定条件式 (5-1-95) 压缩为

$$a_2 > 0 \quad (5-1-96)$$

凡是  $a_2 > 0$  的弹体, 其空气动力恢复力矩的方向总是力图减小弹体攻角的, 因此总是具有恢复到原来平衡状态的趋势。通常把满足这一条件的弹体, 称为具有“静稳定性”。在上面指出的实际条件之下, 具有“静稳定性”的弹体, 必定也具有“动稳定性”。

但是, 以上所述只是对于没有绕自身对称轴滚转运动的弹体而言的。在有滚转的情况下, 稳定条件要更复杂一些, 见 § 5-5。

在绝大多数战术导弹弹体的实际构型中, 弹体环节不仅具有稳定性, 而且总还具有一定的振荡性。即符合第一种情况的条件:

$$a_2 > \left( \frac{a_1 - a_4}{2} \right)^2 \quad (5-1-97)$$

以后将会看到, 为了使导弹弹体在操纵运动中的动态特性更好, 不仅要求它具有稳定性, 而且要求它具有适当的振荡性。

## 二、弹体环节的脉冲过渡函数

弹体环节如果受到脉冲指令的作用, 那么它的响应同自由运动是相似的。

脉冲的指令就是幅度比较大但作用时间很短暂的指令, 例如, 脉冲幅度为  $K$ , 作用时间为  $\Delta t$ , 于是脉冲的总强度就是  $(K \cdot \Delta t)$ 。

把这种脉冲作用抽象化就是单位脉冲函数  $\delta(t)$ , 它的定义是:

$$\begin{cases} \text{当 } t < 0 \text{ 时,} & \delta(t) = 0; \\ \text{当 } 0 \leq t \leq \varepsilon \text{ 时,} & \delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ (且 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0); \\ \text{当 } t > \varepsilon \text{ 时,} & \delta(t) = 0. \end{cases} \quad (5-1-98)$$

这个单位脉冲函数  $\delta(t)$  的总强度就是它的积分, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

因此, 总强度为  $(K \cdot \Delta t)$  的脉冲作用, 可以抽象化为  $(K \cdot \Delta t)$  倍的单位脉冲函数的作用。

任何一个环节受到单位脉冲函数  $\delta(t)$  的作用之后, 它所做出的响应通称为这个环节的脉冲过渡函数, 可以  $k_1(t)$  表示。

单位脉冲函数  $\delta(t)$  的拉氏变换是

$$\delta(p) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1$$

故任何环节对于单位脉冲函数  $\delta(t)$  的响应的拉氏变换, 就是该环节的传递函数本身。所以, 对任何环节的传递函数进行拉氏反变换, 就可得到这个环节的脉冲过渡函数。

于是, 弹体环节的脉冲过渡函数就是

$$k_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[W_K^a(p)] \quad (5-1-99)$$

用标准形式 (5-1-84) 来表示  $W_K^a$ , 得

$$k_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_K^a \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} \right] = k_K^a \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (5-1-100)$$

这是一个衰减的正弦曲线 (图5-8)。

对式 (5-1-100) 及 (5-1-94) 进行比较, 可以看出, 弹体环节的脉冲过渡函数, 同它在受到初始条件为  $\alpha_0 = 0$ , 并且  $\dot{\alpha}_0 = k_K^a \omega_n^2$  的扰动时的自由运动过程是完全一样的。

这种情况当然不是巧合, 它具有明显的物理意义。将弹体环节的运动方程 (5-1-87) 改写为标准形式, 即为

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2\zeta \omega_n \frac{d\alpha}{dt} + \omega_n^2 \alpha = k_K^a \omega_n^2 K(t) \quad (5-1-101)$$

如果, 在  $t = 0$  时, 弹体环节刚受到一个单位强度的脉冲指令, 即  $K \cdot \Delta t = 1$ 。在  $\Delta t$  很小的情况下, 可认为  $K = \delta(t)$ , 即

$$\begin{cases} \text{当 } t < 0 \text{ 时,} & K(t) = 0; \\ \text{当 } 0 \leq t \leq \varepsilon \text{ 时,} & K(t) = \frac{1}{\varepsilon} \quad (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}); \\ \text{当 } t > \varepsilon \text{ 时,} & K(t) = 0. \end{cases}$$

由于脉冲作用时间很短, 所以当它的作用结束时, 弹体事实上来不及获得角位移 (故  $\alpha_0 = 0$ ); 然而, 却来得及获得适当的角速度 (故  $\dot{\alpha}_0 \neq 0$ )。这样, 它就获得了一个自由运动的初始条件。角速度  $\dot{\alpha}_0$  可如下计算: 单位的指令脉冲 (冲量) 所引起的舵控力矩冲量按 (5-1-14) 式应是

$$\int_0^{\infty} M_{K, y} dt = \int_0^{\infty} |F_{K, \max}| L_K [-\delta(t)] dt = |F_{K, \max}| L_K (-1)$$

这个舵控力矩冲量按定义或表为

$$|F_{K, \max}| L_K (-1) = a_3 J_z = k_K^a \omega_n^2 J_z$$

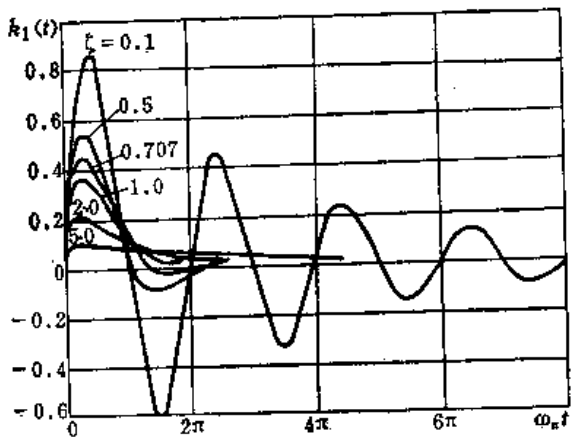


图5-8 弹体环节的脉冲过渡函数



按冲量定理, 这个力矩冲量将立刻转化为弹体的角动量

$$J_z \dot{\alpha}_0 = k_K^a \omega_n^2 J_z$$

故角速度  $\dot{\alpha}_0 = \omega_n^2 k_K^a$ 。

所以, 在单位强度的控制指令冲量的作用下, 在控制冲量结束时, 弹体的运动状态应是:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \\ \dot{\alpha}_0 &= \omega_n^2 k_K^a \end{aligned} \right\} \quad (5-1-102)$$

这就是往后的自由运动的初始条件。

因此, 弹体环节对于单位强度的脉冲指令输入的响应, 等效于一个具有初始条件(5-1-102)的自由运动。

### 三、弹体环节的单位过渡函数

· 如下的函数称为单位阶跃函数  $1(t)$

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } t < 0 \text{ 时, } & \quad 1(t) = 0 \\ \text{当 } t \geq 0 \text{ 时, } & \quad 1(t) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5-1-103)$$

如果导弹弹体环节从时间  $t = 0$  开始, 受到一个强度为  $K$  的阶跃指令作用, 则输入为  $K \cdot 1(t)$ , 相应的拉氏变换是

$$\int_0^{\infty} K \cdot 1(t) \cdot e^{-pt} dt = \frac{K}{p}$$

于是由弹体环节传递函数  $W_K^a(5-1-84)$  可求得其响应的拉氏变换  $\alpha(p)$  为

$$\alpha(p) = \frac{K}{p} W_K^a(p) = \frac{K k_K^a \omega_n^2}{p [p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2]} \quad (5-1-104)$$

其原函数为 (可查拉氏变换表)

$$\alpha(t) = K \cdot k_K^a \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi) \right\} \quad (5-1-105)$$

其中  $\phi = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$ 。

式(5-1-105)右端之大括弧称为单位过渡函数  $h(t)$ ,

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi) \quad (5-1-106)$$

单位过渡函数  $h(t)$  就是弹体环节对于单位阶跃函数之响应。它的曲线见图5-9。

由式(5-1-105)可知, 弹体环节对于阶跃指令的输入之响应  $\alpha(t)$  包含两个成分:

第一个成分是稳定的, 它称为稳态值

$$\alpha_{\text{稳}} = k_K^a \cdot K \cdot 1(t) \quad (5-1-107)$$

实际上就是把输入的  $K \cdot 1(t)$  放大了  $k_K^a$  倍。

第二个成分则是振荡的和衰减的, 称为暂态值

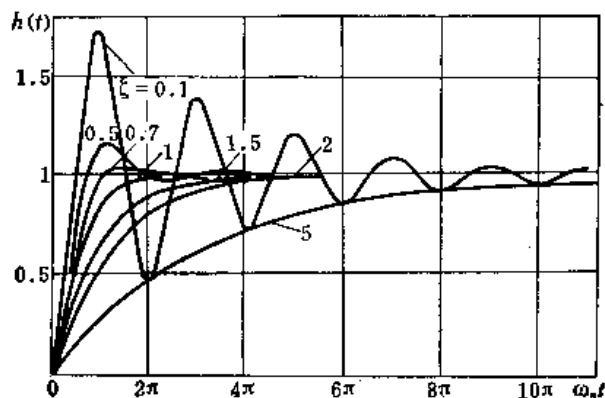


图5-9 弹体环节的单位过渡函数

$$\alpha_{\text{暂}} = -K k_k^{\alpha} \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi) \quad (5-1-108)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\alpha_{\text{暂}} \rightarrow 0$ 。实际上, 暂态值  $\alpha_{\text{暂}}$  相当于围绕着稳态值  $\alpha_{\text{稳}}$  的一个有阻尼自由振荡。振荡的初始条件是: 当  $t = 0$  时,  $\alpha_{\text{暂}} = -K k_k^{\alpha}$ , 并且  $\frac{d\alpha_{\text{暂}}}{dt} = 0$ 。

因此, 弹体环节对于阶跃指令输入响应  $\alpha(t) = \alpha_{\text{稳}} + \alpha_{\text{暂}}$  的变化总趋势是逼近于稳态值  $\alpha_{\text{稳}} = k_k^{\alpha} K \cdot 1(t)$ , 但在逼近的过程中则围绕稳态值做衰减的振荡。在振荡尚未充分衰减以前的运动过程, 称为“过渡过程”, 它是一种暂态过程。

由此可知, 在弹体环节对于阶跃指令输入的总响应之中, 最重要的是响应的稳态值。而决定稳态值大小的, 除了输入强度  $K$  之外, 从环节本身来说, 就是它的传递系数或放大系数  $k_k^{\alpha}$ 。放大系数  $k_k^{\alpha}$  反映着环节在稳恒状态下的特性, 或“静态特性”。

弹体环节对于阶跃指令输入的响应的过渡过程, 也是值得重视的问题。过渡过程的存在使得环节对阶跃输入响应有了滞后和畸变。设计工作的任务应是力求减小这种滞后和畸变, 为此就应该恰当地选择设计参数。

参照图 5-9, 考察单位过渡函数  $h(t)$ , 可以看出, 如果  $\omega_n$  比较大, 也就是意味着振荡过程进行得比较快; 那么, 对于同样的时间  $t$  的历程来说, 环节响应运动将更逼近于其稳态值。从这个角度说, 增大环节的固有振荡频率  $\omega_n$  对于消减响应中的滞后和畸变是有利的。然而, 在实践中, 由于许多因素的限制, 弹体环节的固有振荡频率  $\omega_n$  是很难任意增大的。

除  $\omega_n$  之外, 还可能对相对阻尼系数  $\zeta$  进行选优。由图 5-9 可知, 当  $\zeta$  很小时, 如  $\zeta = 0.1$ , 环节对阶跃输入响应很快 (上升很快), 但是超调量也很大, 振荡剧烈并且过渡过程很长。而随着  $\zeta$  的增加, 响应变慢, 超调量减小, 振荡减弱而且过渡过程缩短。但是对于太大的  $\zeta$  值例如  $\zeta > 1$ , 响应将太慢, 过渡过程将失去振荡性而显著延长。通常, 判断过渡过程的长短, 以响应运动能够进入稳态值附近  $\pm 5\%$  的范围并且以后不再逸出的时刻为准, 这一时间称为调节时间  $T_{\text{调}}$ 。按此标准,  $\zeta \approx 0.7$  将使调节时间  $T_{\text{调}}$  最短。但是, 实践上, 对于弹体环节, 很难做到具有这样大的  $\zeta$  值。实际的弹体环节通常都具有相当小的  $\zeta$  值; 并且设计师们在调整弹体环节的  $\zeta$  值方面, 办法是很少的。因此实际的导弹弹体,

在受到阶跃指令输入后，其响应运动都具有显著的振荡性的过渡过程。

关于相对阻尼系数  $\zeta$  对于过渡过程的调节时间  $T_{\text{调}}$  的影响，可见图 5-10 中所示的曲线。在  $\zeta < 0.7$  的通常情况下，对曲线的左部进行拟合，可以得到一个有用的近似公式

$$T_{\text{调}} \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{3}{\zeta} T_n \quad (5-1-109)$$

关于过渡过程中的超调量  $\sigma$ ，定义为

$$\sigma\% = \left( \frac{a_{\text{max}}}{a_{\text{稳}}} - 1 \right) 100\% \quad (5-1-110)$$

它同相对阻尼系数  $\zeta$  的关系，可按式计算

$$\sigma\% = \exp \left[ -\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right] \times 100\%$$

或见图 5-11 中曲线。

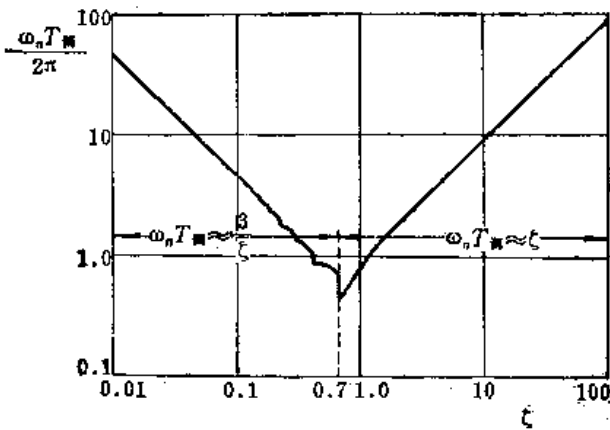


图5-10 弹体环节的调节时间  $T_{\text{调}}$

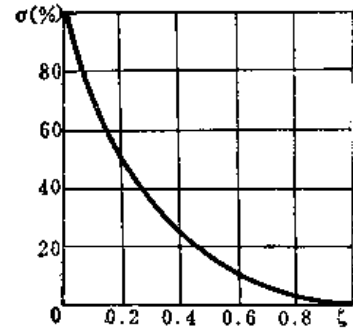


图5-11 弹体环节的超调量  $\sigma\%$

#### 四、弹体对于重力及平飞指令的响应

##### (一) 重力的作用

由弹体俯仰运动方程组 (5-1-19)~(5-1-22)，假想指令为零，于是只有重力加速度  $g$  是输入量，对方程组进行拉氏变换，并解出弹道倾角  $\Theta$ ，为区别起见，以  $\Theta_z$  表之

$$\Theta_z(p) = -g(p) \left\{ \frac{p^2 + a_1 p + a_2}{p [p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4]} \right\}$$

或

$$\Theta_z(p) = -g(p) \left[ \frac{p^2 + a_1 p + a_2}{p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4} \right]$$

其中的  $g(p)$  是重力加速度的拉氏变换。注意，在导弹离开定向器瞬时，重力加速度  $g$  乃是阶跃地加在弹体上的，故

$$g(p) = \frac{g_0}{p}$$

这里的  $g_0$  乃是地面附近的重力加速度值。所以

$$\Theta_z(p) = -\frac{g_0}{p} \left[ \frac{p^2 + a_1 p + a_2}{p^2 + (a_1 + a_4) p + a_2 + a_1 a_4} \right]$$

可以看出, 由于重力加速度在导弹离开定向器瞬时的阶跃作用, 类似于上述阶跃指令那样, 弹体在飞行中将发生波动, 即有一个过渡过程。在此过渡过程结束后, 在重力作用下的弹道倾角将具有一个稳恒的变化率

$$[\dot{\theta}_g]_{\infty} = \frac{-g_0 a_2}{a_2 + a_1 a_4} \approx -g_0$$

## (二) 平飞指令的作用

平飞指令是在启控点处开始加给导弹的。平飞指令对于弹体俯仰运动的影响, 也可以利用传递函数  $W_K^{\dot{\theta}}$ 、 $W_K^{\dot{\theta}}$ 、 $W_K^{\theta}$  等来进行分析。

如果, 平飞指令也是以阶跃的方式施加给导弹的, 那么弹体对平飞指令的响应也将具有过渡过程、超调量……等等, 只是在过渡过程结束之后, 才能达到

$$\left[ \dot{\theta}_{K_{\text{平飞}}} \right]_{\infty} = K_{\text{平飞}} k_K \dot{\theta}$$

于是, 导弹在稳态过程中实现平飞的条件应是

$$\left[ \dot{\theta}_{K_{\text{平飞}}} \right]_{\infty} + [\dot{\theta}_g]_{\infty} = 0$$

或应有

$$K_{\text{平飞}} = \frac{g_0 a_2}{k_K \dot{\theta} \omega_n^2} \approx \frac{g_0}{k_K \dot{\theta}}$$

## § 5-1-7 导弹的法向过载同弹体环节动态特性的关系

在 § 4-1-4 中曾指出, 有三种指标可用来衡量导弹的机动性: 法向过载 (或法向加速度)、最小转弯半径及飞行速度矢量的旋转角速度。这三种指标是可以互相代换的。通常, 在设计工作中用得最多的是法向过载。

在俯仰运动中, 导弹的法向过载是  $n_y$ 。这是总的法向过载, 其中包括了平飞时的俯仰法向过载  $n_{y, \text{平飞}}$  和在平飞弹道附近进行扰动控制时的过载  $\Delta n_y$ , 即

$$n_y = n_{y, \text{平飞}} + \Delta n_y \quad (5-1-111)$$

平飞过载  $n_{y, \text{平飞}}$  可按 (4-1-38) 式计算。在导弹等速直线平飞的情况下, 其加速度  $\ddot{a} = 0$ ,

$$\vec{n} = \frac{-\vec{g}}{g_0}$$

将此矢量  $\vec{n}$  向  $o_1 y_0$  轴投影, 即得

$$n_{y, \text{平飞}} = 1 \quad (5-1-112)$$

$n_{y, \text{平飞}}$  由平飞指令所产生的控制运动来提供。

扰动控制运动中的法向过载  $\Delta n_y$  是由扰动控制指令  $\Delta K_y$  所引起的。下面来着重研究  $\Delta n_y$  同  $\Delta K_y$  之间的关系。在研究中为了书写方便, 仍略去增量符号  $\Delta$ 。

显然, 导弹在俯仰的扰动控制运动中的法向加速度是  $v\dot{\theta}$ , 故相应的扰动控制法向过载是

$$n_y = \frac{v\dot{\theta}}{g} \quad (5-1-113)$$

这个法向过载是在导弹受到一定的控制指令之后产生的, 故可定义一个关于扰动控制的法

向过载  $n_y$  的传递函数  $W_{K^y}^{n_y}$  如下

$$W_{K^y}^{n_y} = \frac{n_y(p)}{K_y(p)} \tag{5-1-114}$$

利用 (5-1-113) 式及 (5-1-71) 式, 可得

$$W_{K^y}^{n_y} = \left( \frac{v}{g} \right) \frac{\dot{\Theta}(p)}{K_y(p)} = \frac{v}{g} W_K^{\dot{\Theta}}(p) \tag{5-1-115}$$

或由式 (5-1-78) 及 (5-1-84) 可得

$$W_{K^y}^{n_y} = \frac{\omega_n^2 k_{K^y}^{n_y}}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \tag{5-1-116}$$

其中  $k_{K^y}^{n_y}$  —— 法向过载  $n_y$  对于单位指令系数的放大系数,

$$k_{K^y}^{n_y} = \frac{v}{g} \left( \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_2 + a_1 a_4} \right)$$

由于传递函数 (5-1-116) 同弹体环节的传递函数  $W_K^{\alpha}$  只差一个放大系数, 因此可以判断, 在输入一个指令后, 弹体的法向过载  $n_y$  的变化情况, 同攻角  $\alpha$  及弹道倾角变化率  $\dot{\Theta}$  的变化情况将是相似的。

如果, 输入的是一个最大可能的阶跃指令  $K(t) = K_{\max} \cdot 1(t)$ , 那么, 在过渡过程结束以后, 导弹将达到一个最大的稳态攻角  $\alpha_{\text{稳, max}}$  和最大的稳态弹道倾角变化率  $\dot{\Theta}_{\text{稳, max}}$ , 同时也达到了最大的稳态法向过载  $n_{y, \text{可用}}$ , 实际上这也就是在俯仰运动中导弹的可用法向过载, 即

$$n_{y, \text{可用}} = -\frac{v}{g} \dot{\Theta}_{\text{稳, max}} = k_{K^y}^{n_y} \cdot K_{\max} = -\frac{v}{g} \left( \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_2 + a_1 a_4} \right) \cdot K_{\max} \tag{5-1-117}$$

由此可知, 导弹的可用法向过载, 决定于其速度及其他的结构特征。这一问题以后还将再来分析 (参阅第七章)。

在输入为最大的阶跃指令时, 在过渡过程的第一个振荡中将出现攻角  $\alpha$  的峰值, 这时, 相应地也将出现法向过载  $n_y$  的峰值。这个峰值  $n_y$  将决定着弹体在飞行中所受到的最大载荷。因此, 在计算弹体强度时应予以考虑。有些资料 [6] 认为, 这个  $n_y$  的峰值应按式计算:

$$n_{y, \text{max}} = n_{y, \text{可用}} (1 + \sigma\%) \tag{5-1-118}$$

但是事实上, 最危险的情况可能还要更严重, 这时, 指令突然由负的极大值阶跃地变到正的极大值, 在这种情况下, 过渡过程中的超调量将增大一倍 (见图 5-12)。若发生这

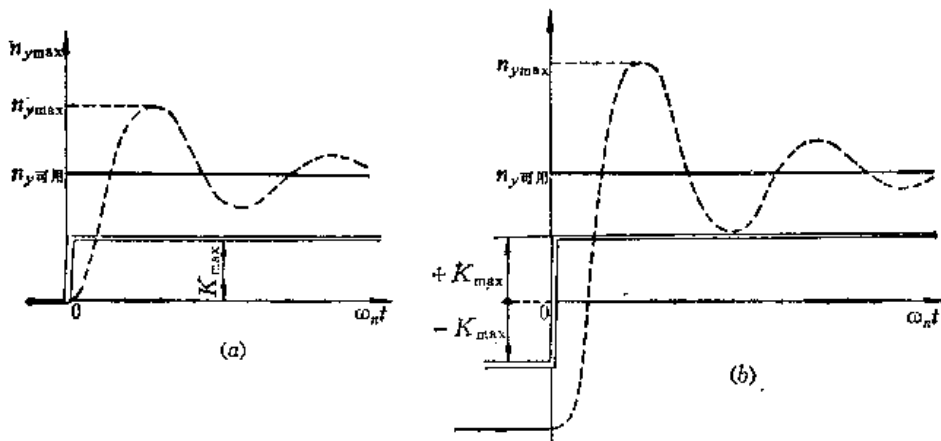


图5-12 最严重的法向过载  
(a) 按式(5-1-118)计算; (b) 按式(5-1-119)计算。

种情况, 则最大法向过载应按下式计算

$$n_{y, \max} = n_{y, \text{可用}}(1 + 2\sigma\%) \quad (5-1-119)$$

从理论上说, 对于第一代反坦克导弹, 如果在导入段上, 射手为了纠正启控点偏差采用了大机动的操纵方法, 那么在“理想拐点”处, 是有可能出现这种严重情况的(参考 § 4-3)。在实践中, 如果这种情况导致导弹的峰值攻角和峰值过载过大, 超出了导弹的气动力特性和强度特性的允许范围, 那么, 就必须在导弹的勤务指南中明确地规定, 不允许射手猛烈地把控制手柄从一个极端搬向另一个极端。

### § 5-1-8 在扰动控制运动中导弹重心位置的变化

导弹重心位置在俯仰扰动控制运动中的变化  $y$  (即  $\Delta y$ ), 可由方程 (5-1-38) 积分而得。在零初始条件下对 (5-1-38) 式进行拉氏变换, 可得

$$p \cdot y(p) = v \cdot \Theta(p) \quad (5-1-120)$$

于是, 可定义一个关于导弹位置的传递函数

$$W_{\Theta}^y(p) = \frac{y(p)}{\Theta(p)} = \frac{v}{p} \quad (5-1-121)$$

这又是一个积分环节, 积分作用也是通过运动学关系实现的, 也是“运动学环节”。

于是, 由指令  $K$  的输入到弹道高度  $y$  的输出, 中间要经过一个弹体环节和两个运动学环节的串联, 如图 5-13 所示。

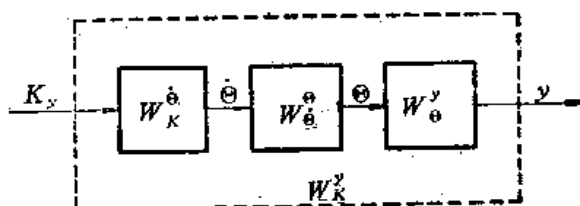


图5-13 传递函数  $W_K^y$  的框图

所以, 总的传递函数应是

$$W_K^y = W_K^{\theta} \cdot W_{\theta}^{\phi} \cdot W_{\phi}^y = \frac{v}{p^2} \left[ \frac{-a_5 p^2 - a_1 a_5 p + a_3 a_4 - a_2 a_5}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} \right] \quad (5-1-122)$$

或简化为

$$W_K^y \approx \frac{k_K^y \omega_n^2}{p^2 (p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2)} \quad (5-1-123)$$

式中  $k_K^y = g k_K^y$ 。

于是, 在收到一个指令  $K(t)$  后, 导弹重心高度变化  $y$  的响应之拉氏变换为

$$y(p) = W_K^y(p) \cdot K(p) \quad (5-1-124)$$

若输入为阶跃指令  $K(t) = 1(t)$ , 则  $K(p) = \frac{1}{p}$ , 于是相应地有

$$y(p) = \frac{k_K^y \omega_n^2}{p^3 (p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2)}$$

利用拉氏变换表(附录四)可直接求出其原函数为

$$y(t) = k_K^y \left\{ \frac{(\omega_n t)^2}{2} - 2\zeta \omega_n t - (1 - 4\zeta^2) + \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi) \right\} \quad (5-1-125)$$

其中

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} (1 - 4\zeta^2)}{\zeta (3 - 4\zeta^2)}$$

可以看出式 (5-1-125) 中最后一项是随时间衰减的, 代表暂态分量; 前三项则代表稳态分量, 即

$$y_{\text{稳}}(t) = k_y^y \left\{ \frac{(\omega_n t)^2}{2} - 2\zeta \omega_n t - (1 - 4\zeta^2) \right\} \quad (5-1-126)$$

$$y_{\text{暂}}(t) = k_y^y \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi) \quad (5-1-127)$$

于是, 在受到阶跃的控制指令的作用之后, 导弹重心的高度变化  $y(t)$  乃是围绕其稳态分量  $y_{\text{稳}}(t)$  的一个衰减振荡。其变化规律可参见图 5-14。在图 5-14 中, 以虚线表示其稳态分量  $y_{\text{稳}}$ , 它们都是以  $\zeta$  为参量绘出的。图中还以点划线表示  $\frac{1}{2}(\omega_n t)^2$ , 它代表着“理想的”导弹重心高度变化规律。

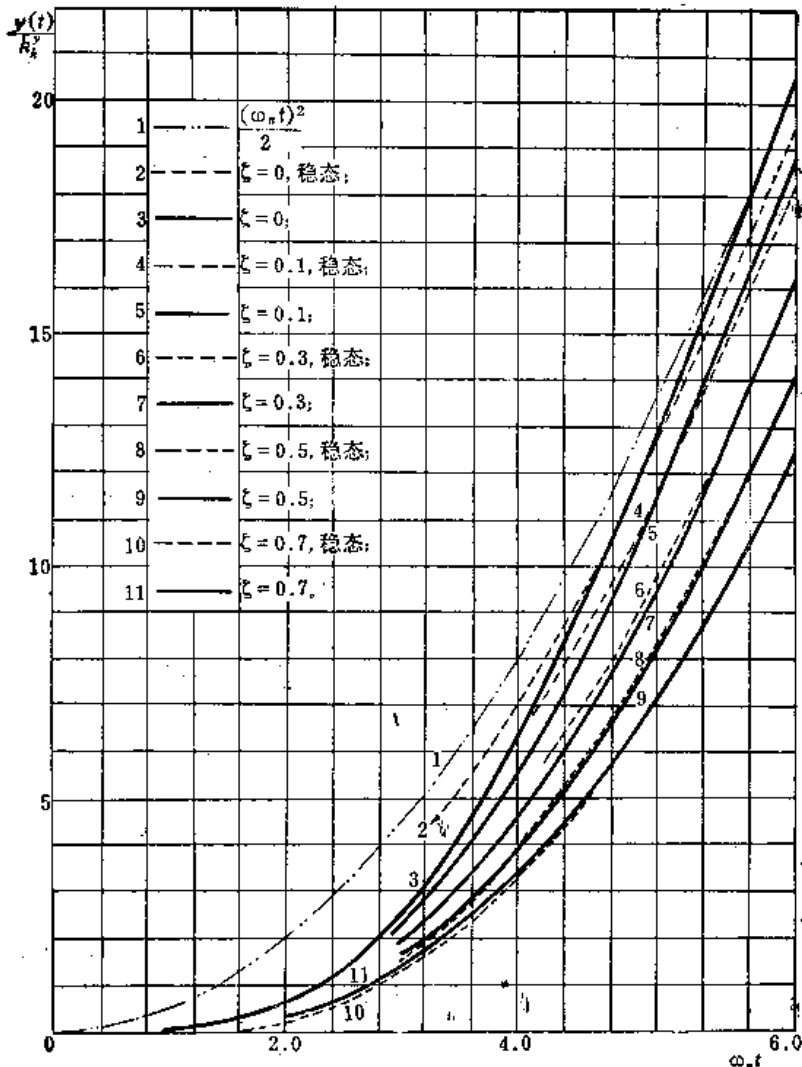


图5-14 导弹在阶跃指令作用下的重心高度变化  $y(t)$

这里所谓“理想的”导弹, 是指这样一种导弹, 其弹体的转动惯量  $J_x = 0$ , 并且相对阻尼系数  $\zeta = 0$ 。对于这个理想的导弹, 当它受到阶跃指令的输入时, 导弹的攻角  $\alpha$  及弹道倾角变化率  $\dot{\theta}$  将阶跃地 (无滞后、并且无过渡过程) 跃变至其稳态值; 同时导弹将阶跃地产生一个法向过载  $n_y$ 。因此, 从发出指令时起, 此理想导弹的重心高度变化将是

$$y(t)_{理想} = k_k^2 y g \frac{(\omega_n t)^2}{2} = k_k^2 \frac{(\omega_n t)^2}{2} \quad (5-1-128)$$

这样一个“理想的”导弹重心高度变化规律，就是等加速运动中位移的变化规律。所以，这样一种类型的导弹的操纵方式称为“加速度式操纵”。

但是，实际的导弹弹体总是具有一定的转动惯量，在阶跃指令的作用下，攻角 $\alpha$ 总需一个过渡过程才能达到稳态值。因此，在实际的重心高度变化规律 $y(t)$ 中，开始总是具有一定的波动性。此外，实际的弹体，总是具有一定的空气动力阻尼特性，因此，在其重心高度变化规律中，还要反映出一定的滞后性；在固有频率 $\omega_n$ 一定的情况下，若弹体的相对阻尼系数 $\zeta$ 愈大，则其重心高度的变化历程 $y(t)$ ，较之“理想”情况的滞后程度也就愈大。

例如，从图5-14中可以看出：若假定弹体的固有频率 $\omega_n=10$ 弧度/秒，且弹体的相对阻尼系数 $\zeta=0.7$ ，则当阶跃指令发出了0.6秒之时（即 $\omega_n t=6$ ），导弹重心的高度变化 $y$ ，只相当于“理想的”导弹弹体在 $t=0.46$ 秒（ $\omega_n t=4.6$ ）时的高度变化，也就是说，实际的导弹较之“理想”情况滞后了0.14秒。

但若假定弹体的 $\zeta=0.1$ ，则在 $t=0.6$ 秒之时，其滞后只有0.03秒。

从这里可以看出，如果从射手的观点来看，那就应该认为，若弹体的相对阻尼系数 $\zeta$ 比较小，它的操纵性将会好一些。虽然，当 $\zeta$ 比较小时，实际导弹重心变化历程 $y(t)$ ，表现出围绕其稳态分量的较大振荡性，但从射手的位置上看来，这种情况似乎并不会带来任何特殊的困难。

用这种观点来评判第一代反坦克导弹的操纵性同它的相对阻尼系数 $\zeta$ 的关系，和一般的《自动调节原理》中评判二阶振荡环节的过渡过程品质的观点相对照，所获得的结论是不同的。在§5-1-6中曾讲过，一般认为，对于二阶振荡环节，当其相对阻尼系数达到 $\zeta=0.7$ 时，过渡过程才具有最好的品质。

实际的反坦克导弹的弹体，其相对阻尼系数往往大大偏低，这种情况可能正是需要用上述的观点来解释。这种观点是对于三点法导引而且以加速度式操纵的反坦克导弹的操纵性进行具体分析后得出的。对于采用其它操纵方式或导引方式以及其他用途的导弹，需另做分析。

### §5-1-9 弹体环节的频率特性

#### 一、弹体环节对于谐波控制信号的响应

若弹体环节所受到的指令 $K(t)$ 是具有一定频率 $\omega$ 的谐波函数，例如

$$K(t) = \cos \omega t \quad (5-1-129)$$

则显然，弹体环节的响应情况将同此频率 $\omega$ 有关。所谓弹体环节的频率特性就是输出的稳态响应同输入信号的频率之间的关系。

对(5-1-129)式进行拉氏变换，可得

$$K(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (5-1-130)$$

于是攻角 $\alpha$ 的拉氏变换可由传递函数 $W_K^{\alpha}(p)$ 求出



$$\alpha(p) = W_k^a(p) \cdot K(p) = \frac{k_K^a \omega_n^2 p}{(p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2)(p^2 + \omega^2)} \quad (5-1-131)$$

或改写成便于查拉氏变换表的形式

$$\alpha(p) = \frac{k_K^a \omega_n^2 p}{[(p + \zeta \omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)](p^2 + \omega^2)} \quad (5-1-132)$$

利用拉氏变换表可求出上式的原函数为

$$\alpha(t) = \frac{k_K^a \omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2}} \left\{ \cos(\omega t + \phi) + \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi_1) \right\} \quad (5-1-133)$$

其中

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} - \tan^{-1} \frac{-2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 + 2\zeta^2 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} - \frac{\pi}{2}$$

式(5-1-133)就是弹体环节对于按余弦规律(5-1-129)式变化的指令输入的响应。可见这个响应中包含了两个振荡成分：一个具有稳定的振幅，称为“稳态分量”，或“稳态响应”；另一个振幅随时间而衰减，称为“暂态分量”，或“暂态响应”(见图5-15)。

暂态分量类似于阶跃输入时的过渡过程，它的振荡频率也是环节的固有频率，并且随着时间的延续，它将趋于消失。因此只在指令刚刚输入后的一小段时间内有意义。

稳态分量不仅具有稳定的振幅，而且其振荡频率同输入的振荡频率一致，只是相位将滞后于输入信号( $\phi$ 角)。可以把总的响应看做是在稳态响应之上叠加了一个暂态分量，在环节具有适当的阻尼情况下，不要太长时间，总的响应就逼近于它的稳态响应了。

因此，在研究环节对于周期振荡的输入的响应时，通常只注意研究其稳态响应。在弹体环节的情况下，就是研究

$$\alpha_{\text{稳态}} = \frac{k_K^a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (5-1-134)$$

对于稳态响应式(5-1-134)特别要注意两点，一个是振幅同输入信号频率 $\omega$ 的关系；另一个是相位同 $\omega$ 的关系。前者称为“振幅频率特性”(或“幅频特性”)，后者称为“相位频率特性”(或“相频特性”)。通常所说的“频率特性”即包括了幅频特性和相频特性这两方面内容。

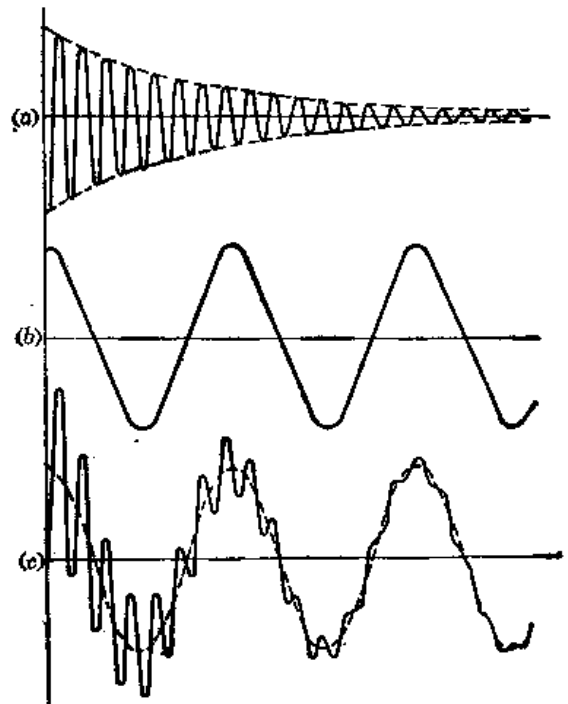


图5-15 弹体环节对于余弦指令的响应  
(a) 暂态响应；(b) 稳态响应；(c) 总响应。

## 二、弹体环节的幅频特性和相频特性

### (一) 幅频特性 $A(\omega)$

弹体环节的幅频特性  $A(\omega)$  就是 (5-1-134) 式中  $\alpha_{\text{弹体}}(t)$  的振幅, 即

$$A(\omega) = \frac{|k_k^a|}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (5-1-135)$$

$A(\omega)$  是输入信号的频率  $\omega$  的函数。然而, 从弹体本身的结构特征来看,  $A(\omega)$  则主要决定于环节的放大系数  $k_k^a$  及相对阻尼系数  $\zeta$ , 尤其是固有频率  $\omega_n$  有密切的关系。

若以无量纲参数  $\frac{\omega}{\omega_n}$  为横坐标, 以  $\frac{A(\omega)}{|k_k^a|}$  为纵坐标, 则可按式 (5-1-135) 做图线 (见图 5-16(a))。其中, 唯一的参量就是相对阻尼系数  $\zeta$ 。

由图 5-16(a) 可知, 在输入信号的频率  $\omega$  很低的情况下, 幅频特性  $A(\omega)$  很接近于放大系数  $k_k^a$ 。在极端情况下, 若  $\omega = 0$ , 即输入信号是稳恒常量, 那么,  $A(0) = k_k^a$ 。

另一方面, 在输入频率很高, 即  $\omega \gg \omega_n$  时, 幅频特性  $A(\omega)$  将急剧下降, 响应的振幅很小,  $A(\omega) \ll 1$ 。所以说, 如果指令 (及舵控力) 的振荡频率很高, 以致  $\omega \gg \omega_n$ , 那么弹体对于这种输入的反应将是很微弱的, 以致经常可以略而不计。

但是, 在输入频率为某一个特定值时, 幅频特性  $A(\omega)$  可能出现极大值。尤其是在相对阻尼  $\zeta$  很小的情况下,  $A(\omega)$  的极大值将远大于  $k_k^a$ , 这就是共振。共振时的频率, 称为共振频率  $\omega_R$ 。利用一般的寻求极大值条件的办法, 可以从 (5-1-135) 式推出共振频率  $\omega_R$  如下

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (5-1-136)$$

并且, 可得共振条件下的幅频特性  $A(\omega_R)$  为

$$A(\omega_R) = \frac{A(0)}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5-1-137)$$

当  $\zeta < 0.707$  时,  $A(\omega_R) > A(0)$ ; 但当  $\zeta > 0.707$  时,  $A(\omega_R) < A(0)$ , 不出现共振峰。

### (二) 相频特性 $\phi(\omega)$

弹体环节的相频特性  $\phi(\omega)$ , 就是输出 (5-1-134) 式对于输入 (5-1-129) 式的相位差  $\phi$  随着  $\omega$  而变化的关系, 即

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (5-1-138)$$

注意,  $\phi(\omega)$  为负值, 说明弹体环节的输出落后于输入。

可将  $\phi(\omega)$  绘成图线, 如图 5-16(b) 所示。

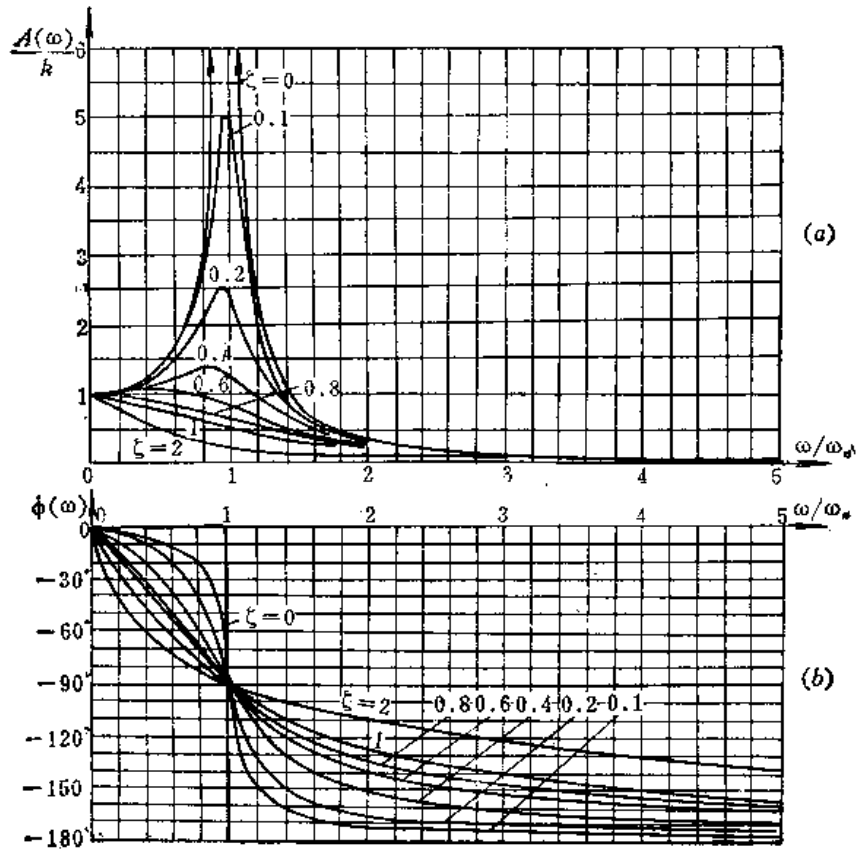


图5-16 弹体环节的频率特性  
(a) 幅频特性; (b) 相频特性。

### 三、频率特性和传递函数的关系

以上利用环节的传递函数先求得它对于谐波输入的总响应，然后再略去其中的暂态分量，只考察其稳态分量而得到幅频特性和相频特性的办法，可以比较好地说明频率特性的概念；但是比较麻烦。

另有一种办法也可以确定任何环节的频率特性，而且更直接了当。这就是利用环节的传递函数  $W(p)$ ，令其中的运算子  $p = j\omega$ ，即

$$W(p)|_{p=j\omega} = W(j\omega)$$

$W(j\omega)$  是一个以  $\omega$  为自变量的复变函数，或可表为

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| \cdot e^{j\arg W(j\omega)}$$

式中  $|W(j\omega)|$ ——复变数  $W(j\omega)$  的模；

$\arg W(j\omega)$ ——复变数  $W(j\omega)$  的辐角。

事实上， $W(j\omega)$  的模  $|W(j\omega)|$  就是该环节的幅频特性  $A(\omega)$ ；辐角  $\arg W(j\omega)$  就是相频特性  $\phi(\omega)$ 。即

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Im}W(j\omega)]^2 + [\operatorname{Re}W(j\omega)]^2} = \sqrt{W(j\omega) \cdot \overline{W(j\omega)}}$$

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \arg W(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)} \\ &= \tan^{-1} \frac{1}{j} \left[ \frac{W(j\omega) - \overline{W(j\omega)}}{W(j\omega) + \overline{W(j\omega)}} \right]\end{aligned}\quad (5-1-140)$$

式中  $\overline{W(j\omega)}$ —— $W(j\omega)$  的共轭函数;

$\operatorname{Im} W(j\omega)$ —— $W(j\omega)$  的虚部;

$\operatorname{Re} W(j\omega)$ —— $W(j\omega)$  的实部。

所以,  $W(j\omega)$  就是环节的频率特性<sup>(1)、(8)(8)</sup>。

利用这个方法再来求一遍弹体环节的频率特性, 由 (5-1-84) 可有

$$\begin{aligned}W_k^a(j\omega) &= \left[ \frac{k_k^a \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} \right]_{p=j\omega} = \frac{k_k^a}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} \\ &= k_k^a \frac{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}\end{aligned}\quad (5-1-141)$$

将上式代入 (5-1-139) 式及 (5-1-140) 式, 即可得到如 (5-1-135) 式及 (5-1-136) 式的弹体环节幅频特性和相频特性。

注意, 由 (5-1-141) 式可知, 弹体环节的频率特性  $W_k^a(j\omega)$  的实部及虚部都是随着输入频率  $\omega$  而变化的。因此, 可以在一个复平面 (称为  $w$  平面) 上, 绘出它随着  $\omega$  的变化而描出的轨迹, 如图 5-17。这轨迹称为幅相频率特性曲线, 或奈魁斯特图。其实, 利用式 (5-1-135) 及 (5-1-136) 的  $A(\omega)$  及  $\phi(\omega)$  也可绘出这个曲线, 因为从原点到曲线上任一点的向径就是  $A(\omega)$ , 辐角就是  $\phi(\omega)$ 。

弹体环节是一个二阶振荡环节, 其奈氏图有如下特点:

第一, 当  $\omega = 0$  时,  $W_k^a(j\omega) = k_k^a$ ; 故奈氏图的起点位于实轴上, 其横坐标相当于放大系数  $k_k^a$ 。

第二, 随着  $\omega$  的增大, 稳定输出的相位愈来愈滞后于输入的相位, 故  $|\phi(\omega)|$  愈来愈大, 又由于  $\phi(\omega) < 0$ , 所以  $W(j\omega)$  的曲线将顺时针旋转; 矢径  $A(\omega)$  先是增大, 在共振频率  $\omega_R$  处达极大, 然后就愈来愈小。

第三, 当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $W_k^a(j\omega) \rightarrow 0$ 。从数学上来说, 这是由于环节的分母阶数总是高于分子的阶数。从物理上来说, 这是由于任何物理上可以实现的振荡环节, 都不可能对于频率为无穷大的振荡输入做出响应。所以, 振荡环节的奈氏图的终点趋近于原点。

第四, 当  $\omega$  从  $-\infty$  变到  $0$  时, 所绘出的奈氏图, 同  $\omega = 0 \sim \infty$  时的图线是关于实轴对称的。这一点对于传统的自动调节系统中的任何环节都是适用的 (但在弹体滚转的情况下, 则将有所不同, 见 § 5-5)。

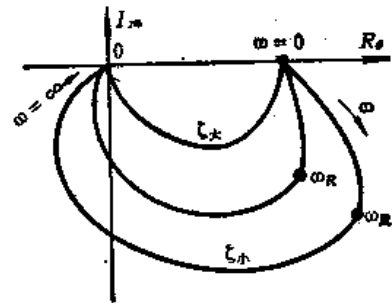


图5-17 弹体环节的奈魁斯特图

#### 四、对数频率特性

把频率特性用对数关系来表示,称为对数频率特性。对数频率特性在对含有多个串联环节的系统进行分析时特别有用。因为,含有许多串联环节的系统的传递函数乃是其中各环节的传递函数的乘积,那么,这个系统的频率特性也就是各环节的频率特性的乘积,即

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \left[ \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \right] \exp \left[ j \sum_{i=1}^n \phi_i(\omega) \right] \quad (5-1-142)$$

其中 $W(j\omega)$ ——含有 $n$ 个串联环节的系统的传递函数。

两边取对数,得

$$\lg W(j\omega) = \sum_{i=1}^n \lg A_i(\omega) + 0.434j \sum_{i=1}^n \phi_i(\omega) \quad (5-1-143)$$

可见,利用各环节的对数频率特性,只需进行加法运算,即可知道系统的频率特性。

特别是,对于频率特性的对数值 $\lg A(\omega)$ ,习惯上常常换一种比例尺来表示如下

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \quad [\text{db}] \quad (5-1-144)$$

习惯上把 $L(\omega)$ 称为“对数幅率特性”,并规定它的单位为“分贝”(db)。

对于弹体环节来说,它的对数幅率特性就是

$$L(\omega) = 20 \lg |W_k^s(j\omega)| = 20 \lg k_k^s - 20 \lg \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (5-1-145)$$

式中右端第一项的计算很简单,并且若取 $k_k^s = 1$ ,则第一项为零。于是,主要变化是第二项,它的图线如图5-18所示。

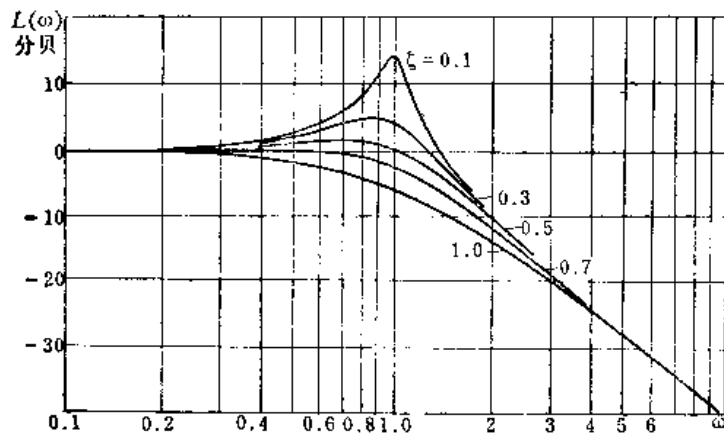


图5-18 弹体环节的对数幅率特性

#### 五、截止频率和通频带

“截止频率”和“通频带”的概念,也是常常要用到的。在使用这些概念时,人们已把环节或系统看成一个低通滤波器了。理想的低通滤波器具有如图5-19所示的理想频率特性:若输入信号的频率 $\omega$ 在 $0 \sim \omega_c$ 之间,这个信号就可以在滤波器的输出端被精确地复现出来;但若信号频率 $\omega$ 大于 $\omega_c$ ,它就完全不能通过滤波器。这个 $\omega_c$ 就称为“截止频率”;在 $0 \sim \omega_c$ 之间的频率范围就是“通频带”。

实际的环节或系统，当然不可能具有如此理想的滤波特性，只能近似地看做是理想滤波器。通常以  $\omega = 0$  时的对数幅频特性  $L(0) = 20\lg A(0)$  为准，人为地规定，在截止频率  $\omega_c$  处的对数幅频特性  $L(\omega_c)$  应较  $L(0)$  低 3 分贝，即

$$20\lg A(0) - 20\lg A(\omega_c) = 3 \quad (5-1-146)$$

或即

$$\frac{A(0)}{A(\omega_c)} \approx 1.41 \quad (5-1-147)$$

按此条件来确定截止频率  $\omega_c$  及通频带的宽度。但有的规定，以  $A(0)$  之下 6 分贝的条件确定  $\omega_c$ 。若按这个条件，则有  $A(0)/A(\omega_c) \approx 2.00$ 。见图 5-20。

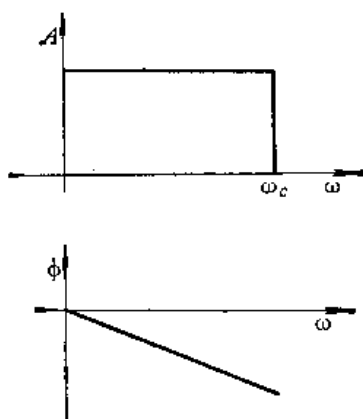


图5-19 理想滤波器的频率特性

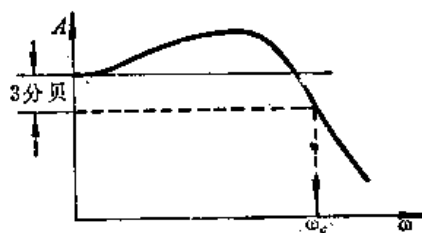


图5-20 截止频率  $\omega_c$  的确定

## 六、运动学环节的频率特性

反坦克导弹的弹体环节对于指令的响应还需要通过两个运动学环节  $W_{\theta}^{\circ}(p)$  和  $W_{\omega}^{\circ}(p)$  的传递，才能转化为导弹位置的移动。这是两个纯积分环节，它们的频率特性对于导弹系统的稳定性将会产生重要的影响（见 § 5-2）。

由式 (5-1-74) 及 (5-1-121) 已知

$$W_{\theta}^{\circ}(p) = -\frac{1}{p}$$

$$W_{\omega}^{\circ}(p) = -\frac{v}{p}$$

单独一个积分环节的频率特性就是

$$W_{\theta}^{\circ}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega} \quad (5-1-148)$$

两个运动学的积分环节串联后的频率特性就是

$$W_{\theta}^{\circ}(j\omega) \cdot W_{\omega}^{\circ}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{v}{j\omega} = -\frac{v}{\omega^2} \quad (5-1-149)$$

相应的幅频和相频特性就是

$$A_{\theta}^{\circ}(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad (5-1-150)$$

$$\phi_{\Theta}^{\ominus}(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad (5-1-151)$$

及

$$A_{\Theta}^{\ominus}(\omega) \cdot A_{\Theta}^{\gamma}(\omega) = \frac{v}{\omega^2} \quad (5-1-152)$$

$$\phi_{\Theta}^{\ominus}(\omega) + \phi_{\Theta}^{\gamma}(\omega) = -\pi \quad (5-1-153)$$

相应的对数幅频特性则是

$$L_{\Theta}^{\ominus}(\omega) = -20 \lg \omega \quad (5-1-154)$$

$$L_{\Theta}^{\ominus}(\omega) + L_{\Theta}^{\gamma}(\omega) = 20 \lg v - 2 \times 20 \lg \omega \quad (5-1-155)$$

它们的曲线见图 5-21~图 5-24。

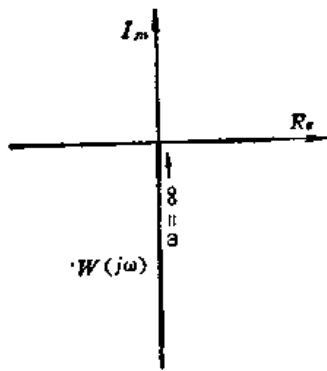


图5-21 积分环节  $W_{\Theta}^{\ominus}$  的幅相频率特性

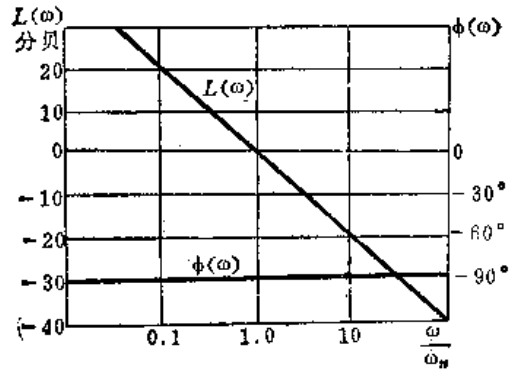


图5-22 积分环节  $W_{\Theta}^{\ominus}$  的对数频率特性

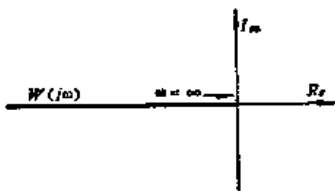


图5-23 串联的两个积分环节  $W_{\Theta}^{\ominus} \cdot W_{\Theta}^{\gamma}$  的幅相频率特性

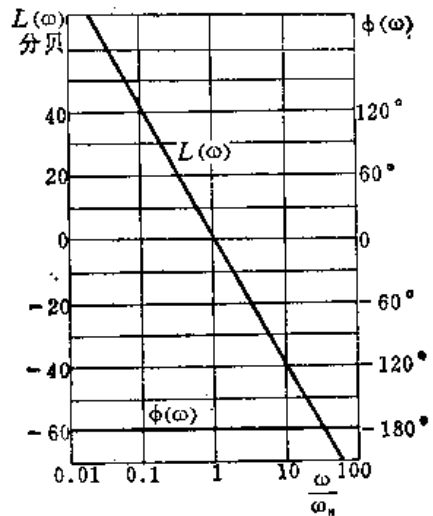


图5-24 串联的两个积分环节  $W_{\Theta}^{\ominus} \cdot W_{\Theta}^{\gamma}$  的对数频率特性

## § 5-1-10 弹体环节的参数选择问题

### 一、影响弹体环节动态特性的参数及其选择原则

综上所述, 导弹的弹体环节的三个传递函数  $W_k^a$ 、 $W_k^{\dot{\alpha}}$  及  $W_k^y$  具有相同的分母, 它们之间的区别主要在于分子略有不同。所以, 这三个传递函数具有共性。为了便于理解, 前面着重地分析了攻角的传递函数  $W_k^a$ 。然而在实际工作中, 如果问题的重点是弹体本身的设计, 那么最好是着眼于同法向过载有关的传递函数  $W_k^y$ ; 如果问题的重点是制导系统的设计, 那么就应该着眼于  $W_k^{\dot{\alpha}}$ 。

在传递函数  $W_k^{\dot{\alpha}}$  或  $W_k^y$  之中, 各自都包含有三个参数: 放大系数  $k_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}$  (或  $k_{\dot{\alpha}}^y$ )、固有频率  $\omega_n$  (或时间常数  $T_n$ ) 和相对阻尼系数  $\zeta$ 。这三个常数又是由五个动力系数  $a_1 \sim a_5$  组合成的。在逐个地对这三个参数的选择问题进行讨论之前, 应该首先明确选择它们的原则。

选择这三个参数的原则, 归根结底是要保证弹体环节具有满意的动态特性, 具体地说来就是:

第一, 在受到控制指令的输入时, 应能迅速准确地以足够大的输出来响应指令。这就是所谓的“操纵性”。

第二, 在没有控制指令或者控制指令没有变化的时候, 应该能够稳定地保持原来的运动状态; 特别是在受到各种扰动作用的条件下。这就是所谓的“稳定性”。操纵性和稳定性之间的关系是又矛盾又统一, 恰当地协调这个关系是选择有关参数的问题的核心。

第三, 本节的前提假定之一是“小扰动”, 因此, 必须保证这一前提不致被破坏, 特别是不允许攻角  $\alpha$  超过规定的临界值。

第四, 本节的另一个前提假定是“冻结系数”, 但在实际的飞行过程中, 飞行条件及各动力系数之值是有所变化的。因此, 必须保证在飞行的全过程中, 弹体环节的动态特性都是满意的。

第五, 整个飞行过程是由许多阶段组成的, 针对操纵飞行阶段的性能而选定的参数和相应的弹体结构条件, 必须也能满足其他弹道段 (特别是启控前弹道) 的性能要求。

### 二、构成弹体环节的诸参数的选择

在参数  $k_{\dot{\alpha}}^y$ 、 $\omega_n$  及  $\zeta$  之中, 最重要的是放大系数  $k_{\dot{\alpha}}^y$  或  $k_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}$ , 因为它决定着导弹弹体的稳态响应, 即“操纵性”。然而, 若是就牵涉因素的复杂性来说, 最复杂的是固有频率  $\omega_n$ , 不仅许多外部矛盾要涉及  $\omega_n$ , 而且在放大系数  $k_{\dot{\alpha}}^y$  及相对阻尼系数  $\zeta$  之中也包含着  $\omega_n$  的因素。因此, 恰当地选定固有频率  $\omega_n$  是恰当地设计弹体环节的问题焦点。所以, 下面首先来讨论固有频率  $\omega_n$ , 接着再讨论放大系数  $k_{\dot{\alpha}}^y$ , 最后讨论相对阻尼系数  $\zeta$ 。

#### (一) 固有频率 $\omega_n$ 的选择

固有频率  $\omega_n$  涉及的因素很多, 很难提出一个明确的准则来简单地确定  $\omega_n$  的数值。原则地说来, 固有频率  $\omega_n$  不能太小, 也不能太大, 应该有一个适当的大小。

第一, 固有频率  $\omega_n$  如果太小 (或者说时间常数  $T_n = \frac{1}{\omega_n}$  太大), 首先的缺点就是会使弹体环节对于输入指令的响应迟钝。由前面分析弹体环节对于阶跃输入的指令的响应已



知, 输出量的变化规律是以无量纲参量  $\omega_n t$  为自变量的, 如果  $\omega_n$  很小, 就意味着振荡过程变慢。例如, 过渡过程结束的时间就将增长(由式 (5-1-109),  $T_m \approx \frac{3}{\zeta \omega_n}$ )。这是不希望的。

第二, 固有频率  $\omega_n$  如果太低, 造成的另一个缺陷是导弹的弹体环节将不能响应控制信号中有用的成分。问题是这样, 由于三点法导引本身的特点, 又加上目标及导弹的运动可能具有加速度或减速度, 射手(或自动形成指令的装置)所发出的有用指令不可能是稳恒的, 而将是随着时间变化的。对于任何一个随时间变化的指令  $K(t)$ , 总可以用付立叶级数将它分解为若干频率成分。显然, 对于那些频率很高的成分, 弹体环节是不能做出响应的。幸而, 频率太高的信号成分本身也是无关紧要的; 一般说来, 弹体环节只要能够响应主要的信号成分就可以了。但是, 如果弹体环节的固有频率太低, 以至通频带太窄, 连主要的有用信号成分也不能充分地响应, 那么导弹的操纵性显然就太差了。在这种情况下, 导弹将不能及时地跟随控制指令按应有的弹道运动, 而出现所谓动态误差。这一问题对于对抗高速运动的空中目标的导弹将是严重的问题。而对于反坦克导弹来说, 由于目标的速度及加速度都较小, 有用的控制信号的频谱宽度是很有限的(通常小于1弧度/秒); 同时, 反坦克导弹的弹体较小, 惯性较小, 因而截止频率较高, 弹体环节的通频带能够容易地覆盖有用的控制信号的频谱。情况虽说如此, 对这一问题应该是应该认识到的。在一般的战术导弹设计工作中, 应该使弹体环节(有时包括自动驾驶仪)的截止频率大于导引系统的截止频率3~4倍<sup>[4]</sup>。这一原则, 在反坦克导弹的设计工作中, 当然也是适用的。

第三, 固有频率如果太小, 其严重后果可能使得导弹弹体的静稳定度降低。导弹弹体必须具有一定的静稳定性才能抵抗各种偶然的扰动, 否则任何偶然的扰动都可能使导弹的攻角无止地扩大。这样的导弹弹体既不能无控飞行, 也很难有控飞行, 除非加上自动稳定系统。

在研究导弹受控飞行时, 习惯于采用弹体摆动固有频率  $\omega_n$  的概念。但是, 在研究无控飞行时, 则习惯于采用“摆动波长  $\lambda$ ”的概念(参阅 § 4-2)。不过它们之间是有密切联系的; 固有频率  $\omega_n$  小, 就意味着摆动波长  $\lambda$  长。假如, 摆动波长超过了一定的限度, 就会使得弹体在启控点处的散布增大, 从而给弹道设计造成困难。在设计中必须把导弹在启控前弹道中的“摆动波长  $\lambda$ ”同受控飞行中的“固有频率  $\omega_n$ ”协调起来。

第四, 但是另一方面, 弹体环节的固有频率  $\omega_n$  也不能太大。如果  $\omega_n$  太大, 就将使得放大系数  $k_{\text{放}}$  降低太多(在动力系数  $a_3$  已定的情况下), 从而给设计工作造成另一方面的困难。

第五, 在采用脉冲调宽式舵机的情况下, 导弹弹体环节的固有频率  $\omega_n$  应该远远低于舵机的基本振动频率, 以免弹体随着舵机的动作而快速地抖动。

第六, 还有一个重要而复杂的问题; 就是在导弹的制导信号中, 通常总会混入一些随机的噪声, 这些噪声一般是频率较高的。如果, 弹体环节的固有频率  $\omega_n$  太高, 或者说, 通频带太宽, 这些高频噪声就不能受到有效的压制, 而将被弹体环节所响应, 于是弹体环节就可能按错误而杂乱的噪声信号运动, 从而出现较大的“起伏误差”(参阅 § 5-3)。

第七, 以上都是在弹体不滚转的前提下进行的讨论。在弹体滚转的情况下, 固有频率  $\omega_n$  的选择还涉及另一些问题, 将在 § 5-5 中讨论。

固有频率  $\omega_n$  主要是由动力系数  $a_2$  决定的,  $\omega_n \approx \sqrt{a_2}$ 。故确定了固有频率  $\omega_n$  就大体上确定了动力系数  $a_2$ 。

## (二) 放大系数 $k_K^{\eta y}$ (及动力系数 $a_3$ 及 $a_4$ ) 的选择

放大系数  $k_K^{\eta y}$  本身虽然重要, 却是比较容易决定的。因为, 根据战术技术要求以及导引弹道的分析, 已能首先确定导弹的需用过载, 从而又可以根据可用过载大于需用过载的原则, 对最大指令所能产生的稳态过载提出确切的要求。按照这个要求, 放大系数  $k_K^{\eta y}$  的下限值是比较容易确定的。

于是, 问题就成为, 根据已确定的放大系数  $k_K^{\eta y}$  的下限值, 应该如何选定诸动力系数  $a_1 \sim a_5$ 。从  $k_K^{\eta y}$  的表达式 (5-1-116) 来看, 为了保证导弹的操纵性, 主要应该增大动力系数  $a_3$  及  $a_4$ , 并适当减小动力系数  $a_2$ 。

考察放大系数  $k_K^{\eta y}$  的定义式

$$k_K^{\eta y} = -\frac{v}{g} \left( \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_2 + a_1 a_4} \right)$$

为了使放大系数  $k_K^{\eta y}$  大于所确定的下限值, 必须恰当地选择动力系数  $a_1 \sim a_5$ 。其中  $a_3 a_4$  占据了分子中的主要部分, 所以应该保证  $a_3$  和  $a_4$  足够大。另外,  $a_2$  占了分母中的主要部分, 所以还应该使  $a_2$  不要太大。但是, 这些做法涉及一系列技术问题, 必须全面考虑。

第一, 增大动力系数  $a_3$  的企图, 经常受到很多实际条件的限制。为了使  $a_3$  稍微增大一点, 常常要付出很大的努力。考察  $a_3 = -L_K |F_{K, \max}| / J_z$ 。首先, 其中的转动惯量  $J_z$  是很难由设计师任意调整的。其次, 舵控力臂  $L_K$  虽在一定范围内可以由设计师安排, 但是由于导弹弹身长度有限, 也很难大幅度增大。最后, 舵控力的最大值  $|F_{K, \max}|$  往往成为研制工作中的难点。此外, 为了获得舵控力  $F_K$ , 必须付出代价: 在利用燃气流获得舵控力的情况下, 随之而来的是造成推力损失; 在利用空气舵时, 随之而来的是增大空气阻力; 因此, 设计师总是希望以最小的舵上控制力取得预定的控制效果。

此外, 还有一个限制因素必须被考虑到, 就是, 在增大动力系数  $a_3$  的同时, 同攻角有关的放大系数  $k_K^{\eta}$  也增大了, 于是, 导弹在受到最大指令  $K_{\max}$  时所产生的最大稳态攻角也要相应地增大。假如, 最大攻角  $\alpha_{\max}$  超过了预定的临界值, 就将出现导弹失速坠地的后果。因此, 在设计工作中对于放大系数  $k_K^{\eta}$  要进行限制; 相应地, 对动力系数  $a_3$  的上限也必须有所限制。

第二, 增大动力系数  $a_4$  的问题。考察动力系数  $a_4 = \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^{\alpha} + F}{mv}$ 。其中导弹

质量  $m$  及速度  $v$ , 在方案已定的情况下, 调整余地是很小的, 因此, 设计师主要只能调整升力系数  $C_y^{\alpha}$  及发动机推力  $F$  两项。

升力系数  $C_y^{\alpha}$  主要地决定于弹翼面积及弹翼形状, 尤其是弹翼面积。然而, 太大地增加弹翼面积将导致空气阻力增大和弹重增大, 并且使导弹的外形不紧凑, 给运输、携带、使用增加困难。弹翼设计的问题将在第七章专门研讨。

推力  $F$  的增加, 对于动力系数  $a_4$  以至可用法向过载  $n_y$  都有显著的作用, 并且常常也是比较容易实现的技术措施。所以, 常常可以发现一些导弹, 在刚启控后的弹道上, 也就是相当于导入段的阶段上, 具有比较大的推力; 分析它们的设计思想, 主要就是为了提高这个阶段中导弹的可用法向过载  $n_y$ , 或者说, 提高放大系数  $k_k^y$ 。然而, 推力的增大使得导弹的速度在这一段上增加得比较快, 使得导弹的飞行条件剧烈变化, 并使“冻结系数”的前提遭到破坏, 增大了设计工作的复杂性。然而, 这终于是次要的问题; 所以, 较为先进的导弹, 在需要提高放大系数  $k_k^y$  的时候, 不少是采用提高推力的办法。当然, 对于由此而造成的技术上的其他问题, 必须进行细致的分析和解决 (在导弹进行慢速滚转时, 提高推力对于导弹的动稳定性也有好处, 这个问题, 将在 § 5-5 中讨论)。总之, 增大动力系数  $a_4$ , 较之增大  $a_3$ , 常常是更为可行的办法, 特别是由于  $a_4$  的增大同关于攻角的放大系数  $k_k^y$  无关, 因而不会导致出现攻角  $\alpha$  超过临界值的危险。

减小动力系数  $a_2$ , 能够导致放大系数  $k_k^y$  的增加。然而, 这种做法将要带来不利的方面, 主要是直接造成固有频率  $\omega_n$  的降低。此外, 由于  $a_2$  也是攻角的放大系数  $k_k^y$  的分母中的主要部分, 所以减小  $a_2$  还将导致  $k_k^y$  的增大, 在大指令情况中, 这就带来了攻角  $\alpha$  超过临界值的危险性。

总之, 为了保证导弹的操纵性, 采用增大动力系数  $a_4$  的办法较之增大  $a_3$  是更为灵活可行的; 而降低动力系数  $a_2$  则需要慎重考虑。

### (三) 相对阻尼系数 $\zeta$

关于相对阻尼系数  $\zeta$  对于弹体动态特性的影响, 前面已经分析过了。总起来说, 相对阻尼系数  $\zeta$  太大, 以致大于 0.7 以上是没有好处的。在  $\zeta = 0.7$  左右, 弹体环节的过渡过程最短, 并且超调量很小, 是比较理想的。然而, 实际上是极难做到的, 并且对于第一代反坦克导弹来说, 较小的  $\zeta$  值, 可以使得弹体环节对于阶跃输入的指令做出更快的响应。可是, 若  $\zeta$  值太小, 则将形成较大的超调量, 并使实际的攻角及法向过载在过渡过程中具有较大的峰值。无论如何, 相对阻尼系数  $\zeta$  对于弹体动态特性的影响, 总是不会像固有频率  $\omega_n$  那么显著, 是较为次要的因素。事实上, 由于很难通过结构上的设计措施来对  $\zeta$  值做出人为的调整 (主要是很难人为地改变动力系数  $a_1$ ), 因此, 往往不对  $\zeta$  值提出专门的要求。

## § 5-2 三点法导引的反坦克导弹系统的稳定性

### § 5-2-1 引言

在本节中, 仍以俯仰运动为例, 来研究反坦克导弹系统的稳定性, 其结论可以推广到偏航运动中。

在按三点法原则进行导引的反坦克导弹中, 根据射手在系统中的不同作用, 有第一代和第二代之分。

在第一代反坦克导弹的系统中, 射手起着双重的作用。第一, 他要观测导弹相对于瞄准线的偏差 (大小和方向); 第二, 他要根据所观测到的偏差来决定应该向导弹发出怎样的控制指令, 并相应地操纵控制手柄来发出这个指令。这样, 射手的作用可抽象化为一个

“环节”。这个环节的输入，是被他观测到的导弹飞行误差角  $\epsilon_y$ ，这个环节的输出，是他移动控制手柄的角度  $\lambda$ ，如图 5-25 所示。其中，在俯仰运动中，导弹的误差角  $\epsilon_y$  就是射手至导弹重心（或曳光管）的跟踪视线同射手至目标的瞄准线之间的夹角在  $xoy$  平面中的投影（如图 5-26），即

$$\epsilon_y = \epsilon_T - \epsilon_M = \epsilon_T - \frac{y}{x} \tag{5-2-1}$$

其中  $\epsilon_M$ ——跟踪导弹的视线对于水平基准线的夹角；  
 $\epsilon_T$ ——瞄准线对于水平基准线的夹角。

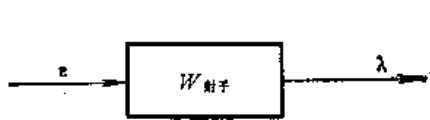


图5-25 第一代反坦克导弹系统的射手环节

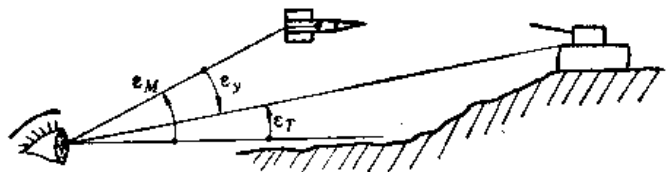


图5-26 误差角  $\epsilon$  的形成

于是，可将第一代反坦克导弹系统构成一个闭合回路，如图 5-27 所示。这样，在把射手做为一个环节包括在导弹系统之中的情况下，导弹系统就是一个闭合的自动调节系统，可以用传统的自动调节理论来分析这个系统。

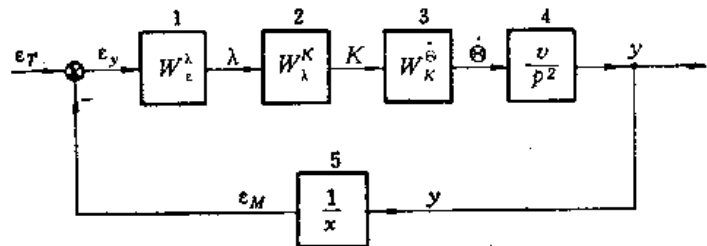


图5-27 第一代反坦克导弹系统的闭合回路  
 1—射手，2—控制盒，3—弹体；4—运动学环节；5—反馈的运动学环节。

在第二代反坦克导弹系统中，射手环节已不再包含于闭合回路中，而原来的射手环节的作用已被红外自动测角仪所代替。射手的作用只是在发射导弹以后，使目标保持在红外测角仪的光轴上。于是，制导回路可用图 5-28 的方框图来表示（图中的  $\epsilon_T$  表示红外测角仪的光轴对于水平基准线的夹角）。由此可知，从自动调节理论的角度看来，第一代反坦克导弹同第二代反坦克导弹之间是大同小异的。

在本节中，首先分析射手环节，然后着重分析第一代反坦克导弹系统的稳定性。

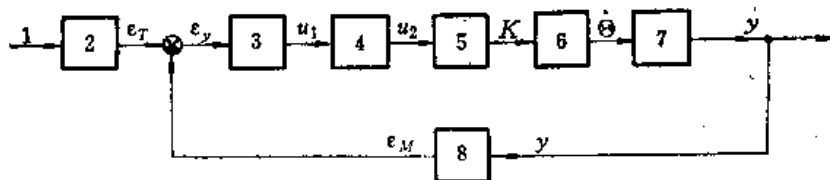


图5-28 第二代反坦克导弹系统的框图  
 1—目标运动，2—射手，3—红外测角仪，4—形成控制指令的装置，5—遥控线，  
 6—弹体，7—运动学环节，8—反馈的运动学环节。

### § 5-2-2 射手环节的数学模型

射手在实际操纵导弹时的动作是为了尽可能迅速地消灭导弹重心相对于瞄准线的偏

差，并尽可能稳定地把导弹保持在瞄准线上。因此，射手的动作在客观上决定于导弹重心对于瞄准线的偏差。

然而另一方面，每个射手的动作在很大程度上又同他本人的主观因素有关，并且，同一个射手在不同的机会中对于同样的导弹偏差所发出的操纵动作也不是完全一致的。所以，要用一个简单的数学模型来描述一切射手在一切操纵过程中的各种动作的规律，几乎是不可能的。

可是，为了有可能进行理论的分析，必须建立一定的数学模型，并且要求它不太复杂。

已经有许多人对于飞机驾驶员和枪炮射手的操作规律进行过研究。这些研究工作在建立反坦克导弹射手的数学模型时也是可以借鉴的。

在研究射手环节的数学模型时，必须先决定射手进行操纵时所依从的规则。显然，最简单的规则，就是射手力图使控制手柄的偏转角  $\lambda$  跟随着导弹的飞行偏差角  $\varepsilon$  的变化而成正比的变化，这时，射手实际上是力图使自己在输入  $\varepsilon$  及输出  $\lambda$  之间起一个理想放大器的作用。然而，事实上，由于射手的反应速度是有限的，并且射手的肌肉是有惯性的，他决不可能彻底地实现这个操作规则，尽管这个规则是最简单的。

实际上，通常把射手环节抽象为一个有滞后的惯性环节，其传递函数为

$$W_i^*(p) = \frac{k_i^* e^{-\tau_i p}}{(T_i p + 1)} \quad (5-2-2)$$

式中  $\tau_i$ ——射手反应滞后的时间，根据某些实验， $\tau_i \approx 0.25$ 秒；

$T_i$ ——由于射手的肌肉惯性而造成的时间常数，根据某些实验， $T_i = 0.1 \sim 0.3$ 秒。

现对式(5-2-2)加以说明。

假若，跟踪视线对于瞄准线出现了一个纵向的误差角  $\varepsilon_y$ ，并设此误差角是阶跃地发生的(如图5-29 a)。就是说，对于射手环节输入了一个视觉信号

$$\varepsilon_y(t) = |\varepsilon_y| \cdot 1(t) \quad (5-2-3)$$

但是，这个视觉信号先要从射手的眼睛传递到中枢神经系统，在中枢神经系统中进行适当的处理后，再传送到射手的手上，才是指挥手臂动作的信号。因此，射手对于此输入的视觉信号的反应是有滞后的，其滞后时间为  $\tau_i$  [秒](如图5-29, b)。要描述这个指挥射手的手臂动作的信号，可用下式

$$\varepsilon_y^*(t) = \varepsilon_y(t - \tau_i) \quad (5-2-4)$$

其中  $\varepsilon_y^*(t)$ ——指挥射手手臂动作的信号。在零初始条件下对上式两边取拉氏变换，得

$$\varepsilon_y^*(p) = \varepsilon_y(p) \cdot e^{-\tau_i p} \quad (5-2-5)$$

这就是说，射手的神经系统可以看做是一个滞后环节，其传递函数为

$$W_i^{*} = e^{-\tau_i p} \quad (5-2-6)$$

视觉信号  $\varepsilon_y(t)$  转化为支配射手动作的神经信号  $\varepsilon_y^*(t)$  之后，即刺激射手的肌肉做出一定的反应，

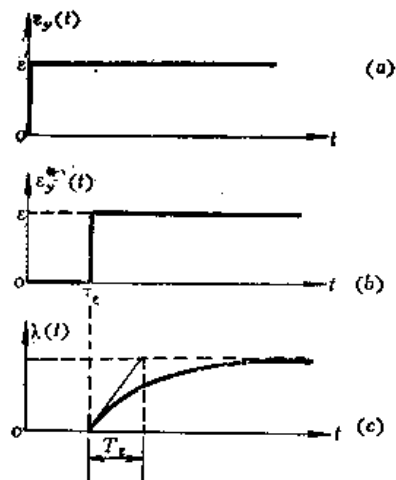


图5-29 射手环节对阶跃视觉信号的响应  
(a) 视觉信号；(b) 射手反应滞后；  
(c) 射手动作的惯性效应。

来把控制手柄搬动一定的角度。但是，由于肌肉具有惯性，控制手柄的偏角  $\lambda_y$  的运动变化将按下面的微分方程来进行（参图 5-29, c）

$$T_i \frac{d\lambda_y}{dt} + \lambda_y = k_i^{\lambda} \varepsilon_y^*(t) \quad (5-2-7)$$

这是一个典型的线性一阶方程。在零初始条件下，对上式两边取拉氏变换，得

$$(T_i p + 1) \lambda_y(p) = k_i^{\lambda} \varepsilon_y^*(p) \quad (5-2-8)$$

于是，射手的肌肉系统的传递函数就是

$$W_{i^*}^{\lambda}(p) = \frac{k_i^{\lambda}}{T_i p + 1} \quad (5-2-9)$$

这是一个典型的一阶惯性环节。

于是，整个射手环节的传递函数是式 (5-2-6) 及 (5-2-9) 的乘积，即

$$W_i^{\lambda}(p) = W_i^{i^*}(p) \cdot W_{i^*}^{\lambda}(p) = \frac{k_i^{\lambda} \cdot e^{-\tau_i p}}{T_i p + 1} \quad (5-2-10)$$

根据射手环节的传递函数 (5-2-10) 式，可以求得此环节的频率特性  $W_i^{\lambda}(j\omega)$ ，并且也可以分为两部分如下

$$W_i^{\lambda}(j\omega) = W_i^{i^*}(j\omega) \cdot W_{i^*}^{\lambda}(j\omega) \quad (5-2-11)$$

式中  $W_i^{i^*}(j\omega)$ ——滞后环节（射手的神经系统）的频率特性；

$W_{i^*}^{\lambda}(j\omega)$ ——惯性环节（射手的肌肉系统）的频率特性。

并且

$$W_i^{i^*}(j\omega) = e^{-j\omega\tau_i} \quad (5-2-12)$$

$$W_{i^*}^{\lambda}(j\omega) = \frac{k_i^{\lambda}}{j\omega T_i + 1} \quad (5-2-13)$$

纯滞后环节  $W_i^{i^*}(j\omega)$  的幅频、相频及对数幅频特性分别为

$$A_i^{i^*}(\omega) = 1 \quad (5-2-14)$$

$$\phi_i^{i^*}(\omega) = -\tau_i \omega \quad (5-2-15)$$

$$L_i^{i^*}(\omega) = 0 \quad (5-2-16)$$

于是，可以绘出它的频率特性曲线及对数频率特性曲线（图 5-30 及图 5-31）。

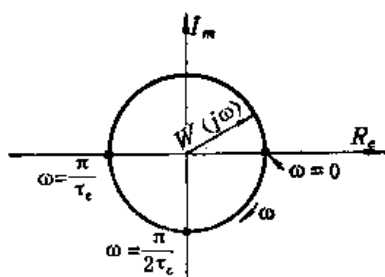


图5-30 滞后环节的频率特性曲线

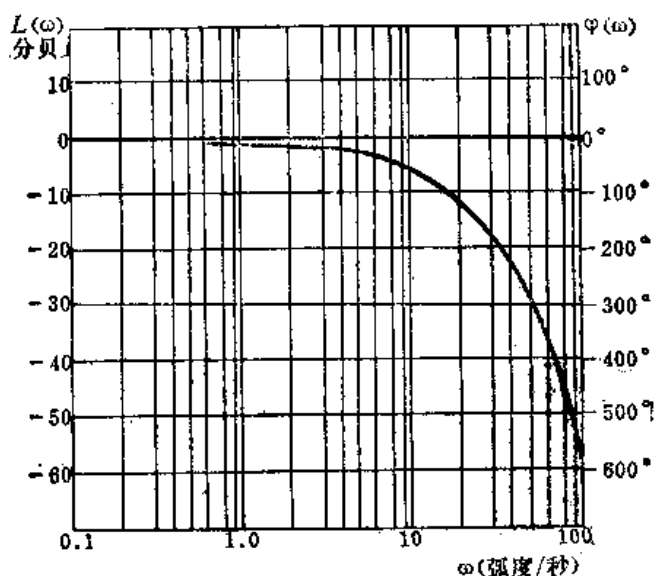


图5-31 滞后环节的对数频率特性曲线

一阶惯性环节  $W_{\lambda}^*(j\omega)$  的幅频、相频及对数频率特性分别为

$$A_{\lambda}^*(\omega) = \frac{k_{\lambda}^*}{\sqrt{(\omega T_{\lambda})^2 + 1}} \quad (5-2-17)$$

$$\phi_{\lambda}^*(\omega) = -\tan^{-1}\omega T_{\lambda} \quad (5-2-18)$$

$$L_{\lambda}^*(\omega) = -20 \lg(\omega T_{\lambda}) \quad (5-2-19)$$

它的频率特性及对数频率特性曲线如图 5-32 及 5-33 所示。

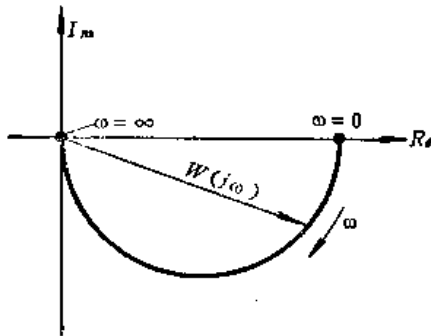


图5-32 一阶惯性环节的频率特性曲线

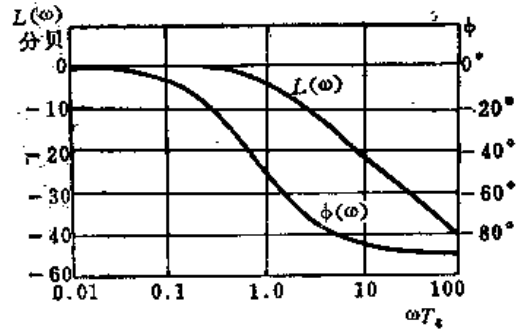


图5-33 一阶惯性环节的对数频率特性曲线

以上关于射手环节的数学描述是一种最简单的数学模型，还可以设计出更复杂的模型。其实，上述的数学模型，乃是假定射手极力使自己的动作像一个理想的放大器那样，只是由于不可避免的滞后和惯性效应才造成了一点畸变。在这种最简单的数学模型的基础上，理论分析工作比较容易进行。

然而，事实上，为了提高射击效果，选用其他的操作规则也是可能的。例如，经过训练的熟练射手，可以随着导弹的飞行距离的改变而改变射手环节的放大系数  $k_{\lambda}^*$ ，还可以在自己的动作中加入提前量，或者加入同导弹的飞行偏差角  $\varepsilon$  的变化速率有关的成分等，以求获得更好的操纵效果。然而一般说来，设计师应该力求减小射手的负担，使他只需按照最简单的操作规则工作，而把比较复杂的功能（如微分作用、变系数作用……）交给制导系统中的其他部分去完成。

此外，还应指出，射手对于视觉信号的输入很难做出完全连续的和平滑的响应。事实上，在他的控制动作中，经常会有一些离散的和颤动的成分，而且射手环节的通频带是比较低的。某些实验指出，人能够在几秒钟内对于两次刺激做出反应。这就是说，他的通频带很难超过 2 赫。并且，一般说来，信号的频率较低，人对信号的响应才可能较精确<sup>[7]</sup>。

### § 5-2-3 反坦克导弹系统的开环和闭环传递函数

从射手的立场来考察射手对导弹进行操纵的效果，就是说，从射手获得导弹偏差角  $\varepsilon_y$  的视觉信号开始，到导弹获得位置变化  $y$  并进一步转化为导弹跟踪角的变化  $\varepsilon_M$  为止的运动过程（见图 5-28）。这个运动过程的传递函数称为导弹系统的开环传递函数  $W(p)$

$$W(p) = \frac{\varepsilon_M(p)}{\varepsilon_y(p)} = W_{\lambda}^* W_{\lambda}^K W_R^{\dot{\phi}} W_{\phi}^y W_{\varepsilon}^{\varepsilon_M} \quad (5-2-20)$$

在上式中，还有两个环节的传递函数未曾被讨论过，就是  $W_{\lambda}^K$  和  $W_{\varepsilon}^{\varepsilon_M}$ 。

$W_{y^M}$  是从导弹位置变化  $y$  到导弹跟踪角变化  $\varepsilon_M$  的传递函数，它也是一个运动学环节，由于

$$\varepsilon_M = -\frac{y}{x} \quad (5-2-21)$$

故有

$$W_{y^M}^{\varepsilon_M} = -\frac{1}{x} \quad (5-2-22)$$

在这里，根据“冻结系数”的假定，可以认为在短时间内， $x$  的变化不大（相对于总的射程而言），并近似取为常数。

$W_{\lambda}^K$  是控制盒的传递函数。一般说来，它可能具有如下的形式

$$W_{\lambda}^K(p) = \frac{k_{\lambda}^K \prod_{i=1}^{\mu} (\tau_i p + 1)}{p \prod_{i=1}^{\rho} (T_i p + 1)} \quad (5-2-23)$$

其中， $\rho$  及  $\mu$  为不小于 1 的整数； $(\tau_i p + 1)$  代表微分作用； $\frac{1}{T_i p + 1}$  代表控制盒电路中的惯性作用， $k_{\lambda}^K$  为控制盒的放大系数。

于是，整个导弹系统的开环传递函数就是

$$W(p) = \frac{\exp(-\tau_a p) k \prod_{i=1}^{\mu} (\tau_i p + 1)}{(T_a p + 1) \left[ \prod_{i=1}^{\rho} (T_i p + 1) \right] (T_a^2 p^2 + 2\zeta T_a p + 1) p^2} \quad (5-2-24)$$

式中  $k$  ——反坦克导弹系统的开环放大系数，并有

$$k = k_{\lambda}^K k_{\lambda}^K k_{\lambda}^K \frac{1}{x}。$$

然而，输出量跟踪角的变化  $\varepsilon_M$  也将反映在射手的光学瞄准装置中，并通过关系 (5-2-1)

$$\varepsilon_y = \varepsilon_T - \varepsilon_M$$

而再次转化为输入量。这就是“反馈”。正是由于反馈作用，才使制导过程能够连续进行。通过反馈，系统构成为一个闭合回路，或“闭环”。闭环系统的输出仍然是导弹的跟踪角  $\varepsilon_M$ ，而它的输入则是对于目标的瞄准角变化  $\varepsilon_T$ 。

从目标的瞄准角变化  $\varepsilon_T$  到导弹的跟踪角变化  $\varepsilon_M$  之间的传递函数，称为导弹系统的闭环传递函数，以  $Y(p)$  表之，定义为

$$Y(p) = \frac{\varepsilon_M(p)}{\varepsilon_T(p)} \quad (5-2-25)$$

现在的问题是，要从开环传递函数  $W(p)$  来求闭环传递函数  $Y(p)$ 。

先将 (5-2-1) 式改写成



$$\varepsilon_T = \varepsilon_y + \varepsilon_M \quad (5-2-26)$$

代入到 (5-2-25) 式的分母中, 并考虑到 (5-2-20) 式, 即可得

$$Y(p) = \frac{\varepsilon_M(p)}{\varepsilon_y(p) + \varepsilon_M(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \quad (5-2-27)$$

闭环传递函数  $Y(p)$  决定着整个导弹制导系统的性能。然而, 闭环传递函数  $Y(p)$  通常是比较复杂的。幸而在闭环传递函数  $Y(p)$  同开环传递函数  $W(p)$  之间存在着相当简单的关系 (5-2-27), 所以, 可通过对于开环传递函数  $W(p)$  的研究来判明制导系统闭环的性能。在自动调节理论中, 相当大一部分内容, 是讨论怎样从开环传递函数来判断闭环系统性能的问题。反过来, 从设计的角度讲, 问题也常常在于, 应该设计怎样的开环系统来满足预定的闭环系统性能。

#### § 5-2-4 含有射手环节的反坦克导弹系统的稳定性

##### 一、反坦克导弹系统闭环稳定性

前面, 在 § 5-1-6 中曾讨论过弹体环节的稳定性问题。现在要进一步讨论包括射手环节在内的反坦克导弹系统的稳定性问题。

系统稳定性的意思是说, 如果系统受到某种扰动的作用而偏离了原来的平衡位置, 那么, 在扰动去掉以后, 经过适当的时间, 系统应该能够以足够的精确度恢复到初始的平衡状态。

按三点法导引原则建立起来的包括射手环节在内的反坦克导弹系统, 可以看做是一个自动调节系统, 这个系统的任务是实现三点法导引, 即尽量减小跟踪角  $\varepsilon_M$  同瞄准角  $\varepsilon_T$  之间的差值。如果这个系统是稳定的, 那么, 在导弹已经进入瞄准线后, 如果由于某种扰动作用使它又偏离了瞄准线, 这个包括射手环节的系统就应该能够使导弹以足够的精确度再回到瞄准线上。显然, 这是一个基本的要求。

为了判断线性系统是否具有稳定性, 有多种工程上可行的方法。其中比较常用的一种方法就是考察系统的传递函数。如果传递函数的极点没有一个位于虚轴的右边, 那么系统就是稳定的。

然而对于闭环系统来说, 它的传递函数  $Y(p)$  远比开环传递函数  $W(p)$  复杂。因此, 在自动调节理论中发展了许多方法, 可以通过对于开环传递函数  $W(p)$  的研究来判断闭环系统的稳定性。

在本节中将利用奈魁斯特 (H. Nyquist) 法和伯德 (H. W. Bode) 法来分析反坦克导弹闭环系统的稳定性。反坦克导弹系统之中的射手环节是一个有滞后的环节, 对于含有滞后环节的系统, 采用奈氏法和伯德法来进行分析较为方便。

##### 二、奈魁斯特稳定性准则

奈魁斯特准则是利用系统的开环特性来判断其闭环是否稳定的强有力的方法之一。在运用这一方法的时候, 需要首先知道系统的开环频率特性  $W(j\omega)$ , 并做出相应的奈魁斯特图。

现在, 假定已知系统的开环频率特性  $W(j\omega)$ , 并且已经做出它的奈魁斯特图。于是, 可以根据下面的准则来判断系统的闭环是否稳定。

奈魁斯特准则:

如果系统在开环状态下是稳定的, 并且它的开环频率特性  $W(j\omega)$  的奈氏图在  $w$  平面上不包围  $(-1, j0)$  点; 那么, 这个系统在闭环状态下就是稳定的<sup>●</sup>。

下面从几何意义上对奈魁斯特稳定性准则给以简要的证明。

在系统开环稳定的前提之下, 开环传递函数  $W(p)$  的极点必然全部位于  $p$  平面的虚轴之左。

若  $W(p)$  可表为有理分式

$$W(p) = \frac{M_K(p)}{D_K(p)} \quad (5-2-28)$$

式中  $D_K(p)$  ——  $W(p)$  的分母多项式, 其阶次为  $n$ ;

$M_K(p)$  ——  $W(p)$  的分子多项式, 其阶次不大于  $n$ 。

总可将  $D_K(p)$  分解因式, 如下

$$D_K(p) = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \cdots (p - \lambda_n) \quad (5-2-29)$$

式中  $\lambda_i$  ——  $W_K(p)$  的极点, 亦即  $D_K(p)$  的零点。

考察  $D_K(p)$  的任一因式  $(p - \lambda_i)$ 。若令  $p = j\omega$ , 即

$$(p - \lambda_i)|_{p=j\omega} = j\omega - \lambda_i$$

这是一个复变量, 可用  $p$  平面中的一个矢量表之。此矢量的始点在  $\lambda_i$ , 终点在  $j\omega$  (图 5-34)。或者可用复变量的表示法来描述这个矢量

$$j\omega - \lambda_i = |j\omega - \lambda_i| \exp[j \arg(j\omega - \lambda_i)] \quad (5-2-30)$$

式中  $\arg(j\omega - \lambda_i)$  —— 向量  $(j\omega - \lambda_i)$  的辐角。

若令  $\omega$  从  $-\infty$  连续地变化到  $+\infty$ , 则辐角  $\arg(j\omega - \lambda_i)$  也将连续地变化。在系统开环稳定的条件下,  $\lambda_i$  皆位于虚轴之左, 故

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arg(j\omega - \lambda_i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(j\omega - \lambda_i) = \frac{\pi}{2}$$

于是

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(j\omega - \lambda_i) - \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arg(j\omega - \lambda_i) = \pi \quad (5-2-31)$$

这表明, 在  $\omega$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  的连续变化过程中, 矢量  $(j\omega - \lambda_i)$  将逆时针转过  $180^\circ$ 。

类似地, 若令  $D_K(p)$  中的复变数  $p = j\omega$ , 根据(5-2-29)式则有

$$D_K(j\omega) = \left| \prod_{i=1}^n (j\omega - \lambda_i) \right| \exp \left[ j \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - \lambda_i) \right] \quad (5-2-32)$$

在  $\omega$  从  $-\infty$  连续地变化到  $\infty$  的过程中, 复变函数  $D_K(j\omega)$  的辐角也将连续地变化, 变化

● 若系统在开环状态下为不稳定的, 也可以研究其闭环是否稳定的问题, 但这时的奈氏准则略为复杂。在反坦克导弹系统中, 其开环总是应该稳定, 故这里只研究这种较为简单的情况。

的角度应该是

$$\arg D_K(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} - \arg D_K(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow -\infty} = \sum_{i=1}^n \left[ \arg(j\omega - \lambda_i) \Big|_{\omega \rightarrow +\infty} - \arg(j\omega - \lambda_i) \Big|_{\omega \rightarrow -\infty} \right] = n\pi \quad (5-2-33)$$

这也就是在  $\omega$  平面上, 矢量  $D_K(j\omega)$  逆时针所转过的角度。

现在再来分析系统的闭环稳定性。由 (5-2-27) 式已知系统的闭环传递函数为

$$Y(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}$$

按稳定性的一般准则, 系统闭环稳定的充要条件就是闭环传递函数  $Y(p)$  的全部极点都位于  $p$  平面上虚轴的左边。

若令

$$F(p) = 1 + W(p) \quad (5-2-34)$$

则  $Y(p)$  的极点也就是  $F(p)$  的零点。于是系统闭环稳定的条件就成为  $F(p)$  的全部零点都位于虚轴的左边。

引用 (5-2-28) 式, 可将 (5-2-34) 式改写为

$$F(p) = 1 + \frac{M_K(p)}{D_K(p)} = \frac{D_K(p) + M_K(p)}{D_K(p)} \quad (5-2-35)$$

即系统闭环的特征方程就是

$$D_K(p) + M_K(p) = 0 \quad (5-2-36)$$

由于  $D_K(p)$  是  $n$  阶的, 并且  $M_K(p)$  是不大于  $n$  阶的, 故特征方程 (5-2-36) 也是  $n$  阶的, 它也有  $n$  个特征根, 即系统闭环也有  $n$  个极点。假若系统闭环是稳定的, 这  $n$  个特征根应位于虚轴之左。在此情况下, 若令  $p = j\omega$ , 且使  $\omega$  从  $-\infty$  变到  $\infty$ , 则类似于 (5-2-33) 式的推导过程, 可得

$$\arg [D_K(j\omega) + M_K(j\omega)] \Big|_{\omega \rightarrow \infty} - \arg [D_K(j\omega) + M_K(j\omega)] \Big|_{\omega \rightarrow -\infty} = n\pi \quad (5-2-37)$$

另一方面, 由 (5-2-35) 式可知

$$\arg F(j\omega) = \arg [D_K(j\omega) + M_K(j\omega)] - \arg [D_K(j\omega)] \quad (5-2-38)$$

故在  $\omega$  从 0 变化到  $\infty$  的过程中,  $F(j\omega)$  的辐角变化应是

$$\arg F(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} - \arg F(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = n\pi - n\pi = 0 \quad (5-2-39)$$

这就是说, (参见图 5-35) 在  $\omega$  从 0 变到  $\infty$  的过程中,  $F(j\omega)$  在  $\omega$  平面上描出的轨线不应包围原点。

然而, 考虑到  $F(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ , 故, 上述条件就是:  $W(j\omega)$  在  $\omega$  平面上的轨线不应包围  $(-1, j0)$  点。

$j0)$  点。

一般的系统在  $\omega = 0 \sim \infty$  和  $\omega = 0 \sim -\infty$  范围内, 它的奈魁斯特图是对实轴对称的, 故上述条件又常简化

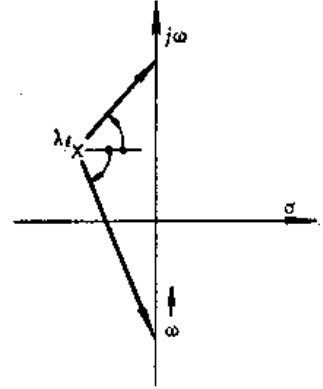


图5-34 矢量  $(j\omega - \lambda_i)$  的辐角变化

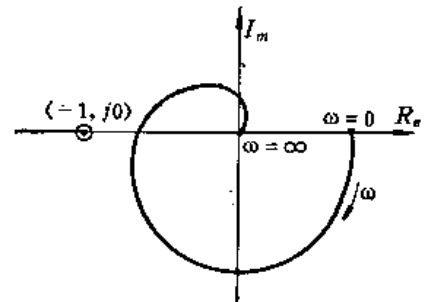


图5-35 典型的奈氏图

为  $W(j\omega)$  的轨线不应包围  $(-1, j0)$  点。  
 $0 \leq \omega \leq \infty$

### 三、含有积分环节的系统的稳定性及相位补偿

在系统的开环回路中含有积分环节或串联积分环节时，判断其奈氏图是否包围  $(-1, j0)$  点略为复杂。这时，当  $\omega = 0$  时，奈氏图的矢径为无穷大，于是，在  $\omega$  从  $-\infty$  变到  $+\infty$  的过程中，奈氏图分成了两段。

为了在这种情况下利用奈氏法，可假想复变量  $p = j\omega$  在  $p$  平面上沿着虚轴变化的过程中，在原点附近拐了一个小圈子（图 5-36），小圈子的半径  $r \rightarrow 0$ 。于是，在  $\omega$  平面上的奈氏图，在  $\omega = 0$  附近的一段就如同图 5-36 中的虚线所示。这样一来，在  $\omega$  为正和为负的区间上，相应的奈氏图就可以连起来了。于是，仍然可以利用奈氏准则来判断系统闭环的稳定性。

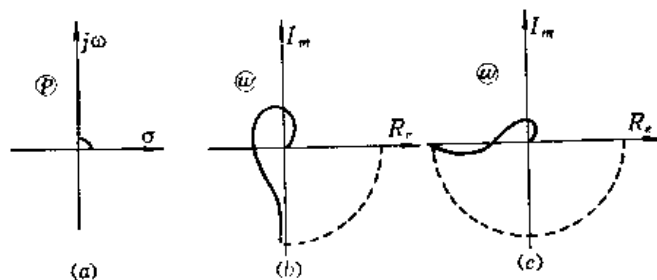


图 5-36 含有积分环节的系统的  $p$  复变量变化路线及相应的奈氏图  
 (a)  $p$  复变量的变化路线；(b) 含一个积分环节的系统的奈氏图；(c) 含二个积分环节的系统的奈氏图。

在反坦克导弹系统中含有两个运动学环节， $W_{\Theta}^{\circ}(p)$  和  $W_{\omega}^{\circ}(p)$  都是纯积分环节。它们的存在对于系统闭环的稳定性是很不利的。

一般说来，包含两个以上纯积分环节的开环系统，若没有适当的微分环节串联于其中，则其相应的闭环系统总是不会稳定的。例如，在最简单的情况下，若系统开环只由两个积分环节组成，即其开环传递函数为

$$W(p) = \frac{1}{p^2}$$

于是，闭环传递函数为

$$Y(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{(p-j)(p+j)}$$

就是说，闭环系统具有一对恰好位于虚轴上的共轭极点。前已说过（§ 5-1-3），在这种情况下，认为系统是不稳定的。如果用奈氏准则来分析的话，那么，观察其开环的频率特性曲线（见图 5-23）即可知道  $W(j\omega)$  恰好通过  $(-1, j0)$  点。因此，这是一种临界的稳定情况。任何扰动所引起的偏差，将以等幅振荡的形式持续下去。在这种情况下，如果在开环系统中还串联有其他的惯性环节、振荡环节或者滞后环节的话，系统开环的相频特性将比  $-180^\circ$  还要落后得更多， $W(j\omega)$  曲线必将包围  $(-1, j0)$  点，即形成不稳定的闭环系统。因此，为了使含有双重积分环节的系统具有稳定性，就必须在回路中串联有能使相位超前的环节。在反坦克导弹系统中，这样的环节可以利用控制盒的补偿网路来实现。利用放大器和无源阻容网络可以构成具有形式如下的传递函数的环节

$$W_{\lambda}^{\lambda} = \frac{K_{\lambda}^{\lambda} \prod_{i=1}^{\mu} (\tau_i p + 1)}{\rho \prod_{i=1}^{\nu} (T_i p + 1)} \quad (5-2-40)$$

为了使环节具有必要的相位超前的特性，传递函数分子中的时间常数  $\tau_f$  应远远大于分母中的时间常数  $T_f$ 。

可以把传递函数形如 (5-2-40) 式的环节看作是由一些惯性环节和微分环节串联而成。这些微分环节的传递函数为

$$W_d(p) = \tau p + 1 \quad (5-2-41)$$

它的频率特性函数为

$$W(j\omega) = j\omega\tau + 1 = \sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \exp(\tan^{-1}\tau\omega) \quad (5-2-42)$$

由此可得

$$A(\omega) = \sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \quad (5-2-43)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\tau\omega \quad (5-2-44)$$

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \quad (5-2-45)$$

它的幅相频率特性曲线和对数频率特性曲线如图 5-37 及 5-38 所示。

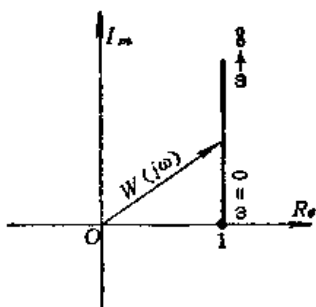


图5-37 微分环节的幅相频率特性曲线

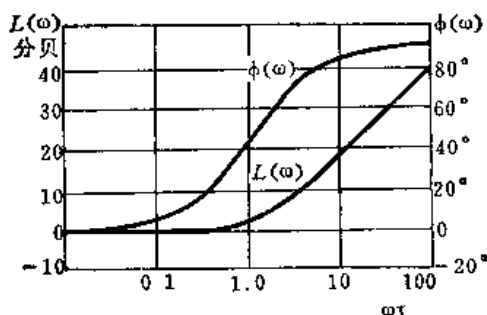


图5-38 微分环节的对数频率特性曲线

可以看出，微分环节的相位频率特性是使输出的相位超前于输入，并且时间常数愈大超前愈显著。因此，加入微分环节后可以使整个系统开环的相位滞后情况得到补偿。

但是纯粹的微分环节很难得到，实际上能得到的只是其传递函数如 (5-2-40) 式的环节。只要其中  $\tau_f \gg T_f$ ，这样的环节就能起到使输出的相位提前的作用。

#### 四、含滞后环节的系统的稳定性

仍可用奈氏准则来判断含有滞后环节的系统的闭环稳定性。注意，在前面证明奈氏准则时，曾假定系统的开环传递函数可表为有理分式 (5-2-28)。滞后环节的传递函数不能展开为有理分式，却只能展开为下式

$$e^{-\tau_s p} = \frac{1 - \frac{\tau_s p}{2} + \frac{(\tau_s p)^2}{8} - \frac{(\tau_s p)^3}{48} + \dots}{1 + \frac{\tau_s p}{2} + \frac{(\tau_s p)^2}{8} + \frac{(\tau_s p)^3}{48} + \dots} \quad (5-2-46)$$

所以，在有限的频率范围内，理论上能以任意的精确度用一个有理分式来逼近  $e^{-\tau_s p}$ 。这样，在实践上有意义的频率范围内，仍可用奈氏准则来分析含滞后环节的系统的闭环稳定性。

在反坦克导弹系统中的射手环节含有滞后环节，滞后环节的存在对于系统闭环的稳定

性具有很不利的影响。

为了明显地看出滞后环节对于系统稳定性的影响, 可把含有滞后环节的开环系统看做是一个无滞后的系统同个纯粹滞后环节组成的串联系统, 即

$$W(p) = e^{-\tau_e p} \cdot W^*(p) \quad (5-2-47)$$

式中  $\tau_e$ ——滞后环节的滞后时间;

$W^*(p)$ ——不含滞后环节的系统部分的开环传递函数。

相应地, 开环系统的频率特性可表为

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau_e} \cdot W^*(j\omega) \quad (5-2-48)$$

假定, 不含滞后环节的部分  $W^*(p)$  是开环稳定的, 并且在构成闭环以后仍是稳定的。就是说, 按奈氏准则,  $W^*(j\omega)$  的奈氏图不包围  $(-1, j0)$  点 (图 5-39)。图中, 以原点为圆心, 绘出了一个半径为 1 的圆。此单位圆同  $W^*(j\omega)$  曲线相交于  $A$  点, 在  $W^*(j\omega)$  曲线上同  $A$  点相应的频率为  $\omega_A$  (称为剪切频率)。若矢径  $\overline{OA}$  对于负实轴的夹角为  $\gamma$ ,  $\gamma$  就是无滞后时的相位裕量。

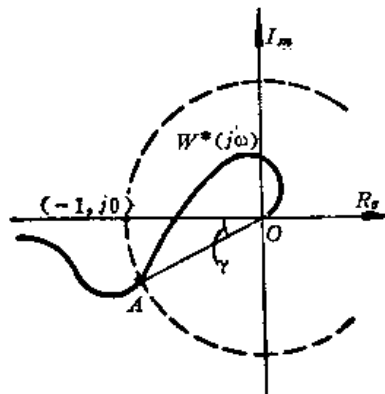


图5-39 滞后环节对稳定性的影响

若将滞后环节串入此系统中, 则由 (5-2-48) 式可知, 系统开环的幅频特性不变, 但相频特性将更加滞后而成为

$$\phi(j\omega) = \arg W^*(j\omega) - \omega\tau_e \quad (5-2-49)$$

如果

$$\omega_A \tau_e < \gamma$$

则  $e^{-j\omega\tau_e} \cdot W^*(j\omega)$  曲线将比  $W^*(j\omega)$  曲线更加靠近  $(-1, j0)$  点, 稳定裕量进一步缩小。

如果

$$\omega_A \tau_e > \gamma,$$

则  $e^{-j\omega\tau_e} \cdot W^*(j\omega)$  曲线将包围  $(-1, j0)$  点, 而使系统闭环不稳定。

若有一个临界的滞后时间  $\tau_{eA}$ , 恰好使得

$$\omega_A \tau_{eA} = \gamma \quad (5-2-50)$$

则  $e^{-j\omega\tau_{eA}} \cdot W^*(j\omega)$  曲线通过  $(-1, j0)$  点, 这时, 系统闭环具有临界的稳定性。

应注意, 临界滞后时间  $\tau_{eA}$  是同剪切频率  $\omega_A$  有关的, 而剪切频率  $\omega_A$  又是同系统开环中的放大系数  $k$  有关的。一般说来, 增大放大系数  $k$ , 将使剪切频率  $\omega_A$  增大 (通常也使相位裕量  $\gamma$  减小)。于是, 临界的滞后时间  $\tau_{eA}$  将要随着系统开环放大系数  $k$  的增大而减小。

为了保证含有射手环节的反坦克导弹系统闭环的稳定性, 必须要求射手环节的滞后时间  $\tau_e$  远远小于系统的临界滞后时间。

### 五、用伯德法分析系统的稳定性

伯德法是在奈魁斯特方法的原理基础上提出的。奈魁斯特方法在几何上非常直观, 但是奈魁斯特图的绘制比较麻烦。伯德法巧妙地利用了系统开环的对数频率特性, 使得计算

及绘图工作量为减轻。

把系统开环的频率特性  $W(j\omega)$  用其对数频率特性表示

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| \\ \phi(\omega) = \arg W(j\omega) \end{cases}$$

并把  $L(\omega)$  及  $\phi(\omega)$  的曲线以  $\omega$  的对数为横坐标绘制出来，就是伯德图。

奈氏图上的一条  $W(j\omega)$  曲线，在伯德图上要用两条曲线—— $L(\omega)$  及  $\phi(\omega)$  来表示。但是，奈氏图上的频率  $\omega$  是以参量的形式标注出来的；而在伯德图上却是以横坐标的形式直接表现出来的（图 5-40）。

奈氏图上的单位圆，在伯德图上就是  $L(\omega) = 0$  的一条水平直线；奈氏图上的负实轴，在伯德图上就是  $\phi(\omega) = -180^\circ$  的一条水平线。

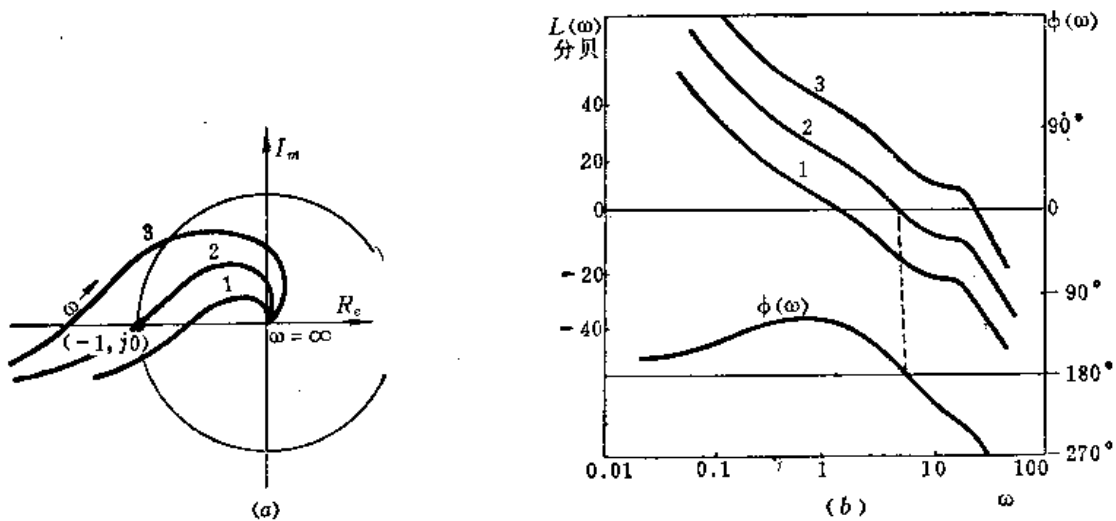


图5-40 奈氏图同伯德图的对照

(a) 奈氏图，(b) 伯德图；1—闭环稳定的系统；2—闭环临界稳定的系统；3—闭环不稳定的系统。

若是在奈氏图上， $W(j\omega)$  曲线恰好通过  $(-1, j0)$  点。那么，在伯德图上，当  $\phi(\omega)$  曲线穿过  $-180^\circ$  线时， $L(\omega)$  曲线恰好也通过 0 分贝线。这就是图 5-40 中曲线 2 所示的情况。

若是在奈氏图上， $W(j\omega)$  曲线没有包围  $(-1, j0)$  点，就是说， $W(j\omega)$  曲线在  $(-1, j0)$  点的右方自下而上地穿过负实轴；那么，在伯德图上，当  $\phi(\omega)$  曲线自上而下穿过  $-180^\circ$  线时，在相应的频率上，必有  $L(\omega) < 0$  分贝。或者说，在  $L(\omega) > 0$  分贝的频率区间内， $\phi(\omega)$  曲线没有自上而下穿过  $-180^\circ$  线。这就表明系统闭环是稳定的（图 5-40 曲线 1）。

若在奈氏图上， $W(j\omega)$  曲线包围了  $(-1, j0)$  点，就是说， $W(j\omega)$  在  $(-1, j0)$  点的左方，自下而上地穿过了负实轴；那么，在伯德图上，当  $\phi(\omega)$  曲线自上而下穿过  $-180^\circ$  线时，相应地必有  $L(\omega) > 0$  分贝。这就是图 5-40 中曲线 3 的情况，这时系统闭环不稳定。

也有比较复杂的情况，例如在奈氏图上， $W(j\omega)$  曲线从下而上地穿过了负实轴，但是随后又从上而下地穿回来。这时，在伯德图上， $\phi(\omega)$  曲线也将“正穿”  $-180^\circ$  线之

后再“负穿”回来（所谓“正穿”，是指从 $\phi > -180^\circ$ 方面向下穿过 $-180^\circ$ 线；所谓“负穿”，是指从 $\phi < -180^\circ$ 方面向上穿过 $-180^\circ$ 线）。

因此，可将奈氏准则用伯德图的语言重新表述如下：“在系统开环为稳定的情况下，系统闭环也稳定的充要条件是：在使 $L(\omega) > 0$ 的频率区间内， $\phi(\omega)$ 曲线在 $(-180^\circ)$ 线上正穿和负穿次数之差为零”<sup>●</sup>。

### 六、稳定裕量

处于临界稳定状态的系统将产生持续的振荡；此外，由于系统参数总会发生微小的变化，系统很可能转化为不稳定的。因此，应使系统具有适当的稳定裕量。显然，若在奈氏图中， $W(j\omega)$ 曲线不仅没有包围 $(-1, j0)$ 点，而且保持相当距离，那么稳定裕量大；反之若距 $(-1, j0)$ 点很近，稳定裕量就小。所以，稳定裕量可以用 $W(j\omega)$ 曲线至 $(-1, j0)$ 点的距离来表示。

在图5-41中， $W(j\omega)$ 曲线同单位圆的交点为 $A$ 。于是 $\overline{OA}$ 对于负实轴的夹角 $\gamma$ 就是相位裕量，

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_A) \quad (5-2-51)$$

通常应使

$$\gamma = 30^\circ \sim 50^\circ \quad (5-2-52)$$

以保证足够的相位裕量。

$W(j\omega)$ 曲线同负实轴的交点为 $B$ ， $B$ 点至 $(-1, j0)$ 点的距离即规定了“增益裕量” (gain margin)，以 $K_g$ 表之

$$K_g = \frac{1}{\overline{OB}} \quad (5-2-53)$$

或以分贝数表增益裕量

$$20\lg K_g = -20\lg|\overline{OB}| \text{ (db)} \quad (5-2-54)$$

通常希望增益裕量为4~12分贝（即相当于 $\overline{OB} = 0.63 \sim 0.25$ 之间）。

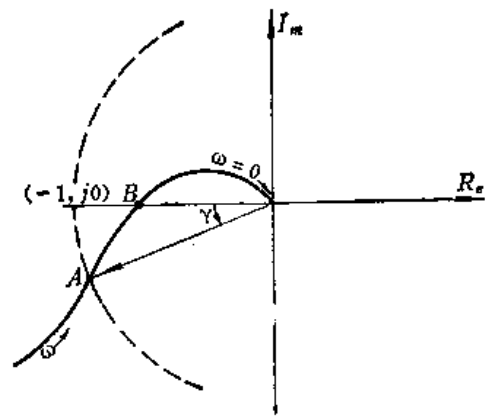


图5-41 稳定裕量

### 七、反坦克导弹系统稳定性分析示例

为了更好地理解上述理论在反坦克导弹系统的稳定性分析和设计问题上的应用，下面分析一些具体的例子。

如果有一个现成的反坦克导弹及其地面控制盒等，在这之中还须加入射手环节才构成一个完整的反坦克导弹系统。现在的问题是，为了保证这个反坦克导弹系统的稳定性，对于射手环节的放大系数 $k_t$ 及反应滞后时间 $\tau$ ，等应该提出怎样的要求？这是一个广义的设计问题。

● 在系统开环不稳定的情况下，对上述准则补充如下：若系统在开环状态下有 $p_1$ 个极点位于虚轴之右，则闭环为稳定的充要条件是，在使 $L(\omega) > 0$ 的频率区间内， $\phi(\omega)$ 曲线在 $(-180^\circ)$ 线上正穿和负穿之差为 $\frac{p_1}{2}$ 。



**例题 5-1** 有一个反坦克导弹，其有关的各动力系数是： $a_1=1.0\text{秒}^{-1}$ ， $a_2=98.8\text{秒}^{-2}$ ， $a_3=15.0\text{秒}^{-2}$ ， $a_4=1.2\text{秒}^{-1}$ ， $a_5=0.0165\text{秒}^{-1}$ ，导弹的飞行速度是  $v=100\text{米/秒}$ 。控制盒的传递函数是

$$W_{\lambda}^K(p) = 0.16 \times \frac{2.00p + 1}{0.25p + 1} \quad (5-2-55)$$

试分析导弹在行程为  $x=1000\text{米}$  处的导弹系统的稳定性，并合理地限定射手环节的放大系数  $k_{\xi}^{\dot{\theta}}$  及反应滞后时间  $\tau_{\xi}$  等。

**解** 第一，计算弹体环节的固有频率及放大系数等。

$$\omega_n = \sqrt{a_2 + a_1 a_4} = \sqrt{98.8 + 1.0 \times 1.2} = 10.0 \text{ 弧度/秒}$$

$$k_k^{\dot{\theta}} = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_2 + a_1 a_4} = \frac{5.0 \times 1.2 - 98.8 \times 0.0165}{98.8 + 1.0 \times 1.2} = 0.1637 \text{ 弧度/秒}$$

$$\xi = \frac{a_1 + a_4}{2\sqrt{a_2 + a_1 a_4}} = \frac{1.0 + 1.2}{2 \times 10} = 0.11$$

$$T_{\alpha} = \frac{1}{\omega_n} = 0.1 \text{ 秒}$$

第二，关于射手环节的假定：

对于射手环节的反应滞后时间  $\tau_{\xi}$  及肌肉惯性时间常数  $T_{\xi}$ ，暂时设定为  $\tau_{\xi}=0.2\text{秒}$  及  $T_{\xi}=0.2\text{秒}$ ，即假定射手环节的传递函数为

$$W_{\xi}^{\lambda}(p) = \frac{k_{\xi}^{\lambda} e^{-\tau_{\xi} p}}{(T_{\xi} p + 1)} = \frac{k_{\xi}^{\lambda} e^{-0.2p}}{(0.2p + 1)} \quad (5-2-56)$$

其中的放大系数  $k_{\xi}^{\lambda}$  待定。

第三，开环传递函数及频率特性：

按 (5-2-20) 或 (5-2-24) 式，可得反坦克导弹系统的开环传递函数  $W(p)$  为

$$W(p) = \frac{k_{\xi}^{\lambda} e^{-\tau_{\xi} p}}{(T_{\xi} p + 1)} \cdot \frac{k_{\lambda}^K (\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)} \cdot \frac{k_k^{\dot{\theta}} v \frac{1}{x}}{(T_{\alpha}^2 p^2 + 2\xi T_{\alpha} p + 1) p^2}$$

$$= k_{\xi}^{\lambda} \cdot e^{-0.2p} \frac{0.16 \times (2.00p + 1) \times 0.1637 \times 100 \times \frac{1}{1000}}{(0.2p + 1)(0.25p + 1)(0.01p^2 + 0.022p + 1)p^2}$$

求系统开环频率特性  $W(j\omega)$ ，并将滞后环节  $e^{-0.2p}$  分开，写成

$$W(j\omega) = e^{-0.2j\omega} \cdot W^*(j\omega) \quad (5-2-57)$$

其中的  $W^*(j\omega)$  是不包含滞后环节的部份的频率特性

$$W^*(j\omega) = k_{\xi}^{\lambda} \frac{2.62 \times 10^{-3} (2.00j\omega + 1)}{(j\omega)^2 (0.20j\omega + 1) (0.25j\omega + 1) (0.01(j\omega)^2 + 0.022j\omega + 1)} \quad (5-2-58)$$

反坦克导弹系统开环的对数幅频特性是

$$\begin{aligned}
L(\omega) &= 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg k_2^A + 20\lg(2.62 \times 10^{-3}) - 2 \times 20\lg \omega \\
&\quad + 20\lg \sqrt{\left(\frac{\omega}{0.5}\right)^2 + 1} - 20\lg \sqrt{\left(\frac{\omega}{4}\right)^2 + 1} - 20\lg \sqrt{\left(\frac{\omega}{5}\right)^2 + 1} \\
&\quad - 20\lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right]^2 + \left(2 \times 0.11 \frac{\omega}{10}\right)^2} \quad (5-2-59)
\end{aligned}$$

不包含滞后环节的部份的对数幅频特性  $L^*(\omega)$  完全相同, 即

$$L^*(\omega) = L(\omega)$$

系统开环的相频特性是

$$\phi(\omega) = (-0.2\omega) \cdot \phi^*(\omega) \quad (5-2-60)$$

式中  $\phi^*(\omega)$  —— 不包含滞后环节的部份的相频特性, 并有

$$\begin{aligned}
\phi^*(\omega) &= -2 \times 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right) \\
&\quad - \tan^{-1}\left[\frac{2 \times 0.11\left(\frac{\omega}{10}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}\right] \quad (5-2-61)
\end{aligned}$$

第四, 绘制相频特性  $\phi^*(\omega)$  及  $\phi(\omega)$  的伯德图:

先绘出开环相频特性曲线的伯德图, 如图 5-42 所示。由图可知, 在把射手环节考虑进来后, 相频特性曲线要向下移动。特别是在高频部分, 滞后环节的存在使系统的相位显著延迟。在低频部分, 滞后环节的存在使相频特性更加向下靠近  $-180^\circ$  线, 这就相当于在奈氏图上的  $W(j\omega)$  曲线更加逼近负实轴, 从而将使稳定裕量减小。

第五, 选定增益裕量:

由图 5-42 可知, 相频特性曲线  $\phi(\omega)$  在  $\omega_B = 2.1$  弧度/秒处正穿  $-180^\circ$  线 (即 B 点)。为了保证系统闭环稳定, 应使系统具有一定的稳定裕量, 具体地说, 就是  $L(\omega)$  曲线在  $\omega_B = 2.1$  之处应为  $-4 \sim -12$ db。取其中间值, 即应有

$$L(\omega_B) = -8\text{db} \quad (5-2-62)$$

按此条件可在图 5-42 上决定  $B'$  点。

第六, 确定射手环节的放大系数:

必须恰当地选择射手环节的放大系数  $k_2^A$ , 才能使  $L(\omega)$  曲线恰好通过  $B'$  点。为此, 可按 (5-2-59) 式, 将稳定裕量条件式 (5-2-62) 代入其中, 解出放大系数  $k_2^A$ , 而得

$$\begin{aligned}
20 \lg k_2^A &= -8 - 20 \lg(2.62 \times 10^{-3}) + 2 \times 20 \lg 2.1 \\
&\quad - 20 \lg \sqrt{\left(\frac{2.1}{0.5}\right)^2 + 1} + 20 \lg \sqrt{\left(\frac{2.1}{4}\right)^2 + 1} + 20 \lg \sqrt{\left(\frac{2.1}{5}\right)^2 + 1} \\
&\quad + 20 \lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2.1}{10}\right)^2\right]^2 + \left(2 \times 0.11 \frac{2.1}{10}\right)^2} = 45.2\text{db}
\end{aligned}$$

或  $k_2^A = (10)^{45.2/20} = 182.0$

这就是足以保证系统闭环稳定的射手环节的放大系数。若进一步加大此值, 则将减小系统

的稳定裕量，以至使系统闭环失去稳定性。

在  $k_1 \leq 182$  的条件下，若导弹在 1000 米处偏差瞄准线一米，则误差角为  $\varepsilon = 0.001$  弧度；这时，按条件，射手应使手柄移动的角度是

$$\lambda \leq 182 \varepsilon = 0.182 \text{ 弧度} \approx 10.4^\circ$$

若更剧烈地搬动手柄将有使系统的稳定性减弱以至失去稳定性的危险。

第七，确定对数幅频特性  $L(\omega)$  及其伯德图：

将  $k_1 = 182$  之数据代入到 (5-2-59) 式中，即得到相应的  $L(\omega)$  表达式。并将相应的曲线绘入图 5-42 中。

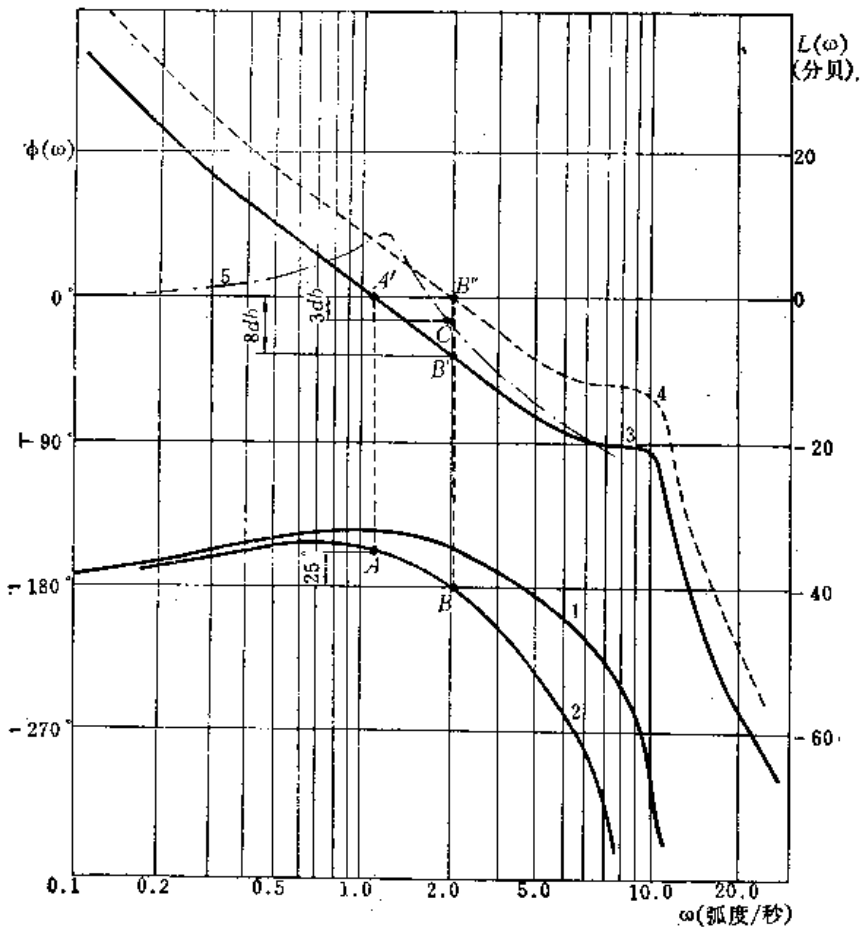


图5-42 例题5-1的伯德图

1—不包含滞后环节的相频特性  $\phi^*(\omega)$  曲线；2—包含滞后环节的相频特性  $\phi(\omega)$  曲线；3—增益裕量 8 分贝的对数幅频特性  $L(\omega)$  曲线；4—临界稳定状态的  $L(\omega)$  曲线；5—闭环系统的对数幅频特性曲线。

为了比较，在图中还绘入了相当于临界稳定性的  $L(\omega)$  曲线(虚线所示)。两条  $L(\omega)$  曲线互相平行，距离为 8 分贝。

有了  $L(\omega)$  及  $\phi(\omega)$  曲线，经过简单的换算即可绘出  $W(j\omega)$  的奈魁斯特图(图 5-43)。

## 第八, 检查相位裕量:

$L(\omega)$  曲线在  $A'$  点处穿过零分贝线, 此处的频率  $\omega_A = 1.1$  弧度/秒, 称为剪切频率。在剪切频率处的相位角  $\phi(\omega_A)$  即决定了相位裕量。由图 5-42 可见, 在不计入射手反应滞后的情况下, 系统的相位裕量是  $\gamma^* = 37^\circ$ 。但在计入滞后环节的情况下, 相位裕量只有  $25^\circ$ 。由伯德图还可看出, 若适当减小放大系数, 还可增大增益裕量及稍微增大相位裕量。

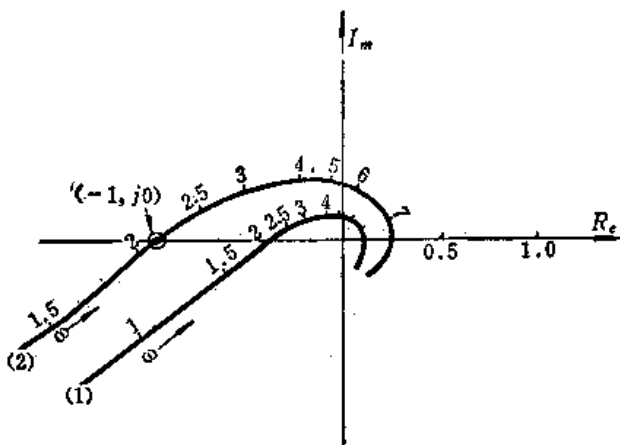


图5-43 例题5-1的奈氏图

1—增益裕量 8 分贝的频率特性  $W(j\omega)$  曲线, 2—临界稳定状态的  $W(j\omega)$  曲线。

在射手的操作动作中加入人为的微分超前作用, 也可以增大系统的稳定裕量。

这时, 射手环节的传递函数的分子中应该包含类似于式 (5-2-41) 的因子。

## 第九, 计算临界滞后时间:

射手环节的滞后时间, 前面假定是  $\tau_s = 0.2$  秒。滞后时间的加大将导致稳定裕量减小。按 (5-2-50) 式, 存在着临界滞后时间  $\tau_{sA}$

$$\tau_{sA} = \frac{\gamma^*}{\omega_A} = \frac{37^\circ}{1.1 \text{ 弧度/秒}} = 0.58 \text{ 秒}$$

假若  $\tau_s \geq 0.58$  秒, 系统闭环也将丧失稳定性 (例题 5-1 完)。

## § 5-2-5 等效的固有振荡频率及相对阻尼系数

## 一、把反坦克导弹系统看做是一个等效的二阶振荡环节

在第四章的 § 4-3-4 和 § 4-3-5 中, 曾把反坦克导弹看做是一个可控质点, 并认为它在瞄准线附近的运动规律乃是由方程 (4-3-24) 或 (4-3-40) 所描述, 即在偏航方向上是

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\omega_s \frac{dz}{dt} + \omega_s^2 z = 0 \quad (5-2-63)$$

类似地, 在俯仰方向上应是

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_s \frac{dy}{dt} + \omega_s^2 y = 0; \quad (5-2-64)$$

或者, 考虑到

$$\epsilon_M = \frac{y}{x}$$

在一段不太长的行程上, 可认为  $x$  近似为常数。则有

$$\frac{d^2\epsilon_M}{dt^2} + 2\zeta\omega_s \frac{d\epsilon_M}{dt} + \omega_s^2 \epsilon_M = 0 \quad (5-2-65)$$

这就意味着, 包括射手环节或红外测角仪环节在内的反坦克导弹闭环系统已被看做是一个等效的二阶振荡环节, 而导弹在稳定不动的瞄准线附近的运动过程则被看做是这个等效的二阶振荡环节的自由运动过程 (以启控点偏差为初始扰动)。方程 (5-2-65) 中的等效固

有频率  $\omega$  及相对阻尼  $\zeta$  即应决定于这个等效的二阶振荡环节的极点。

由 (5-2-27) 及 (5-2-28) 式可知, 反坦克导弹系统闭环传递函数  $Y(p)$  应是

$$Y(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{M_K(p)}{D_K(p) + M_K(p)}$$

又由 (5-2-24) 式知, 反坦克导弹系统的开环传递函数  $W(p)$  的分母  $D_K(p)$  乃是六阶以上的多项式, 并且闭环的极点数同  $Y(p)$  的分母的阶数相同。虽然, 这些闭环极点并未求出, 但根据系统闭环稳定的条件, 即可知道全部闭环极点都应位于虚轴之左。

通常情况下, 在  $Y(p)$  的全部极点之中, 只有一对极点最靠近虚轴, 其他极点都远离虚轴。这对最靠近虚轴的极点, 称为“主导极点”。主导极点将决定系统闭环响应的主要性状。其他非主导极点, 愈是远离虚轴的, 对于系统响应的影响就愈弱。若是只保留这一对“主导极点”, 而略去其他远离虚轴的非主导极点的作用, 那么以  $Y(p)$  为传递函数的闭环系统就简化为一个二阶的振荡环节了。这种情况就使得我们经常可以用一个等效的二阶振荡环节来代替一个复杂的闭环系统。

## 二、利用系统闭环幅频特性来求等效的固有频率及相对阻尼

利用 § 5-2-4 中所做出的系统开环对数频率特性  $L(\omega)$  和  $\phi(\omega)$  的伯德图, 可以计算系统闭环的频率特性。这种计算可以利用“尼柯尔斯 (N. B. Nichols) 图线”<sup>(1), (8)</sup> 进行。或者也可用下述的公式进行计算。

由 (5-2-27) 式, 令  $p = j\omega$ , 可得系统闭环的频率特性  $Y(j\omega)$  为

$$Y(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \quad (5-2-66)$$

参照图 5-44, 它是  $W(j\omega)$  的奈氏图, 其中

$$\overline{OQ} = W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$\overline{PQ} = 1 + W(j\omega) = |1 + W(j\omega)| \cdot e^{j\arg(1+W(j\omega))}$$

由前已知

$$|W(j\omega)| = A(\omega)$$

$$\arg W(j\omega) = \phi(\omega)$$

现在又有

$$|1 + W(j\omega)| = \sqrt{1 + [A(\omega)]^2 + 2[A(\omega)]\cos[\phi(\omega)]} \quad (5-2-67)$$

$$\arg[1 + W(j\omega)] = \tan^{-1} \frac{A(\omega)\sin[\phi(\omega)]}{1 + A(\omega)\cos[\phi(\omega)]} \quad (5-2-68)$$

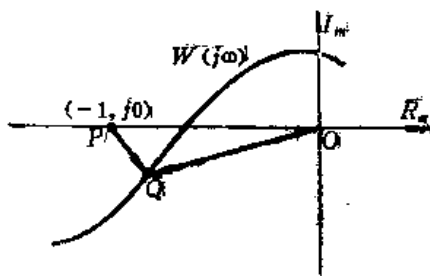


图5-44  $1 + W(j\omega)$  的矢量表示

于是可有闭环幅频特性

$$|Y(j\omega)| = \frac{|W(j\omega)|}{|1+W(j\omega)|} = \frac{A(\omega)}{\sqrt{1+[A(\omega)]^2+2A(\omega)\cos[\phi(\omega)]}} \quad (5-2-69)$$

或写成闭环的对数幅频特性

$$20\lg|Y(j\omega)| = 20\lg A(\omega) - 10\lg\{1+[A(\omega)]^2+2[A(\omega)]\cos[\phi(\omega)]\} \quad (5-2-70)$$

并有闭环相频特性

$$\begin{aligned} \arg Y(j\omega) &= \arg W(j\omega) - \arg[1+W(j\omega)] \\ &= \phi(\omega) - \tan^{-1} \frac{A(\omega) \cdot \sin[\phi(\omega)]}{1+A(\omega) \cdot \cos[\phi(\omega)]} \end{aligned} \quad (5-2-71)$$

利用(5-2-69)~(5-2-71)式即可算出系统闭环的频率特性或对数频率特性,并可在伯德图上绘出闭环幅频特性 $20\lg|Y(j\omega)|$ 的曲线。

例如,利用例题5-1的结果,可以进一步绘出这个反坦克导弹系统的闭环对数幅频特性 $20\lg|Y(j\omega)|$ 的曲线如图5-42中的曲线5(以点划线表示)。由该曲线可看出,闭环幅频特性的共振频率是 $\omega_R=1.2$ 弧度/秒,共振点处的振荡幅值是8.9分贝,或 $|Y(j\omega_R)|=10^{8.9/20}=2.786$ 。然而,当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $20\lg|Y(j\omega)|=0$ ,或者说, $|Y(j\omega)|=1$ (这显然是对的,因为在 $\varepsilon_T$ 稳恒不变的情况下,应该有 $\varepsilon_M=\varepsilon_T$ )。于是,共振振幅 $|Y(j\omega_R)|$ 乃是 $\omega=0$ 时的振幅的2.786倍。利用这一数据即可推求等效的二阶振荡环节的相对阻尼 $\zeta$ 。

由(5-1-137)式可知,二阶振荡环节的共振振幅 $A(\omega_R)$ 同 $\omega=0$ 时的振幅 $A(0)$ 之比为

$$M_R = \frac{A(\omega_R)}{A(0)} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5-2-72) \bullet$$

$M_R$ 称为“共振的相对振幅”,它同相对阻尼 $\zeta$ 的关系可见图5-45。

或者,在已知 $M_R$ 的情况下,可由方程(5-2-72)中将相对阻尼 $\zeta$ 解出,即

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{M_R}\right)^2}}{2}} \quad (5-2-73)$$

例如,若认为反坦克导弹闭环系统是一个等效的二阶振荡环节,那么,在 $M_R=2.786$ 的条件下,按(5-2-73)式(或按图5-45之曲线),可求出这个环节的相对阻尼 $\zeta$ 是

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2.786}\right)^2}}{2}} = 0.182$$

再借用(5-1-136)式,即可由共振频率 $\omega_R$ 和相对阻尼 $\zeta$ 求出等效的固有频率 $\omega_n$ ,即

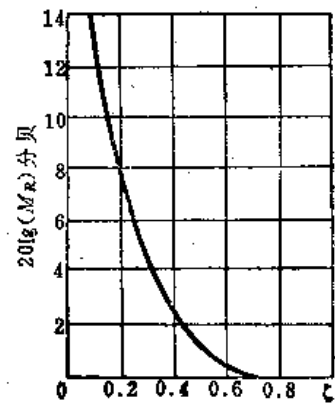


图5-45 共振的相对振幅 $M_R$

● 当 $\zeta > 0.707$ 时,式(5-2-72)无意义。

$$\omega_e = \frac{\omega_R}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (5-2-74)$$

仍采用例题 5-1 的数据, 同该反坦克导弹闭环系统等效的二阶振荡环节的固有频率是

$$\omega_e = \frac{1.2}{\sqrt{1 - 2 \times (0.182)^2}} = 1.24 \text{ 弧度/秒}$$

### 三、其他方法

确定等效的固有振荡频率及相对阻尼的问题, 不是一个严格的理论问题, 而是一个工程近似方法。在参考文献〔2〕、〔3〕及〔8〕中, 都曾引出一些近似确定等效的固有频率及相对阻尼的方法。

为了比较, 这里引述以下两点:

首先, 在文献〔3〕中, 引用了一个确定相对阻尼  $\xi$  的半经验公式

$$\xi = \frac{1}{60} \cdot \frac{\gamma}{m} \quad (5-2-75)$$

式中  $\gamma$ ——相位裕量, 以《度》表示;

$m$ ——伯德图中  $L(\omega)$  曲线在剪切频率附近的斜率, 以 [分贝/(弧度/秒)] 计之。

现在, 利用这个公式重新估算例题 5-1 中的反坦克导弹系统闭环的等效相对阻尼。由例题 5-1 已知相位裕量  $\gamma = 25^\circ$ , 并由图 5-42 中量出  $m = 30 \text{ 分贝}/10 \text{ (弧度/秒)}$ 。于是, 由 (5-2-75) 式可得

$$\xi = \frac{1}{60} \cdot \frac{25}{30/10} = 0.139$$

这个数据同前面求出的  $\xi = 0.182$  相差不算太大。

其次, 在文献〔8〕中, 引用了一个确定等效固有频率的方法, 即在奈氏图中, 开环频率特性  $W(j\omega)$  曲线上距  $(-1, j0)$  点最近的点所对应的  $\omega$ , 即被认为是等效的固有频率。按此方法重新估计例题 5-1 中反坦克导弹系统闭环的等效固有频率, 由图 5-43 可以看出, 应有

$$\omega_e \approx 1.3 \text{ 弧度/秒}$$

这一数据同前面求出的  $\omega_e = 1.24 \text{ 弧度/秒}$  相当接近。

### 四、系统闭环的通频带宽度

利用图 5-42 中所做出的闭环对数幅频特性 (曲线 5), 还可求出闭环系统通频带宽度。即是, 根据截止频率处的相对振幅应该是 -3 分贝的条件, 可在图 5-42 的曲线 5 上确定一个 C 点, 相应的频率为  $\omega_c = 1.95 \text{ 弧度/秒}$ , 这就是截止频率。闭环系统的通频带就是  $0 \leq \omega \leq 1.95$  的频率范围。

## § 5-3 三点法导引的反坦克导弹的制导误差

### § 5-3-1 引言

上节所研究的导弹系统稳定性问题, 是设计导弹时要考虑的基本问题之一。而另一个基本问题是, 要保证导弹具有足够的制导准确度。

在 § 4-1 中，曾经把导弹看做是一个质点，并且按照三点法的导引规律，可以描绘出或计算出理想的弹道，这个理想的弹道，常常被称之为运动学弹道。如果导弹真的能够按照理想的运动学弹道运动，那么，就不会有制导误差产生了。

然而，在实际的制导过程中，总是会有制导误差发生的。问题在于，在设计过程中应该能够预测这些误差的大小，并采取设计措施缩小这些误差，把可能发生的误差限制在合理的限度之内。

按照制导误差的性质及原因，可把它们分成两大类——动态误差及起伏误差。

**动态误差。**产生动态误差的基本原因是惯性——导弹弹体的惯性以及制导系统中各种装置的惯性（包括机械惯性及电的“惯性”）。由于惯性的存在，就使得控制指令的形成过程和导弹执行控制指令的过程发生了滞后及畸变。因此，导弹质心的真实运动轨迹就不可能准确地跟上由目标运动所确定的运动学弹道。关于产生动态误差的原因，还可以换一种说法，即如果把目标的运动看做是输入，导弹质心的运动看做是输出，那么导弹系统的作用无非就是把这个输入转换为输出。为了使输出的变化能够完全准确地跟上输入的变化，导弹系统就必须有足够宽的通频带，理论上说来它的频带必须无限宽，才能使输出信号完全不失真，但是这是不可能的。事实上，只能使导弹系统的频带覆盖输入信号的频谱的主要部分。在这种情况下，不可避免地会产生一定的动态误差。如果目标的运动规律已知，那么动态误差的大小是可以根据导弹系统的动态特性计算出来的，从这个意义上说，动态误差是确定型的。然而，在实际情况中，目标的运动及机动情况是随机的，因此，实际的动态误差的大小及方向也是随机的。

**起伏误差。**产生起伏误差的原因是随机干扰或噪声的作用。制导系统首先要探测目标和跟踪导弹以获取它们的运动信息，在这种信息中就会混入噪声，然后，在把这种信息转换为控制指令以及对指令进行传输的过程中也会混入噪声；最后，在将控制指令转化为控制力并进而转化为导弹质心的受控运动的过程中，也会混入干扰作用。这些干扰和噪声都是随机的，因此，起伏误差也是随机型的。显然，由于干扰及噪声的大量性、普遍性，要绝对避免它们是不可能的。然而，可以通过适当的设计，使它们所引起的起伏误差减小。主要的办法就是限制导弹通频带。这是因为，这些干扰和噪声大都含有强烈的高频成分，如果导弹系统的通频带比较窄，噪声对导弹运动的影响就会大大减轻。

由此可见，导弹系统的通频带的宽度对于动态误差和起伏误差的影响是相反的。因此，所谓最优设计，主要的就是要在这两种互相矛盾的因素中寻求最恰当的折衷解决办法。

### § 5-3-2 导弹系统的动态误差计算

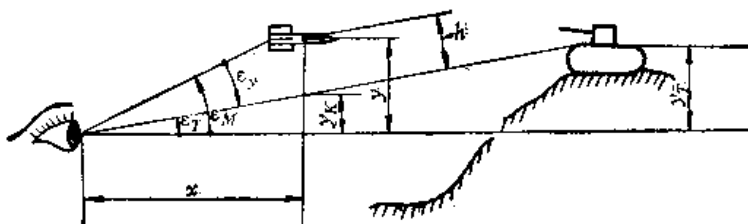
下面将针对第二代反坦克导弹系统来分析它的动态误差。在第二代反坦克导弹系统中，用红外测角仪来代替射手环节，这对于动态误差的分析计算可能更为方便。

在分析动态误差的时候，暂且假定起伏误差为零。

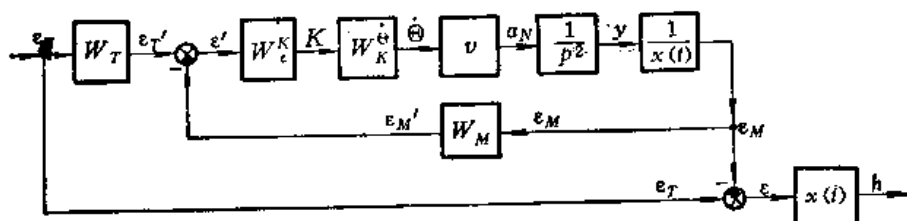
#### 一、结构图及系统的传递函数

按照三点法的导引原则，动态误差  $h$  就是导弹质心偏离瞄准线的线性距离，如图 5-46 所示。需要求得动态误差  $h(t)$  同目标运动情况  $y_r(t)$  之间的关系。为此，首先建立



图5-46 动态误差  $h$  的几何关系

结构图, 如图 5-47。在图 5-47 中,  $\varepsilon'_T$  是由光学瞄准镜的瞄准方向所决定的目标瞄准角信息;  $\varepsilon'_M$  是由红外测角仪所测得的导弹跟踪角信息;  $W_T$  及  $W_M$  分别为描述光学瞄准镜及红外测角仪工作状态的传递函数

图5-47 产生动态误差  $h$  的结构图

$$W_T = \frac{\varepsilon'_T}{\varepsilon_T} \quad (5-3-1)$$

$$W_M = \frac{\varepsilon'_M}{\varepsilon_M} \quad (5-3-2)$$

显然, 若  $W_T = W_M = 1$ , 则说明光学瞄准镜及红外测角仪的探测误差为零。此外, 图 5-47 中的  $\varepsilon'$  是测得的误差角信息, 即

$$\varepsilon' = \varepsilon'_T - \varepsilon'_M \quad (5-3-3)$$

按图 5-47 可引入一个导弹系统的开环传递函数  $G(p)$ , 定义为

$$G(p) = \frac{\varepsilon'_M(p)}{\varepsilon'(p)} = W_c^K W_K^c \cdot \frac{v}{p^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot W_M \quad (5-3-4)$$

注意, 上式中的  $x$ , 即导弹离开控制阵地的距离, 实际上乃是随时间变化相当剧烈的量。为了使整个  $G(p)$  具有变化不大的放大系数, 可在控制盒中加入一个放大率随时间变化的电路, 来抵消  $x$  变化的影响。

同开环传递函数  $G(p)$  相应的闭环传递函数是

$$\frac{\varepsilon'_M(p)}{\varepsilon'_T(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)} \quad (5-3-5)$$

## 二、动态误差及误差传递函数

动态误差  $h$  是由实际上存在的误差角  $\varepsilon$  所决定的

$$h = \varepsilon \cdot x(t) \quad (5-3-6)$$

其中  $\varepsilon$  —— 实际存在的误差角,

$$\varepsilon = \varepsilon_T - \varepsilon_M \quad (5-3-7)$$

可定义一个导弹系统的角误差传递函数如下

$$E(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\varepsilon_T(p)}$$

并可利用前述诸关系式, 将  $E(p)$  改写为

$$\begin{aligned} E(p) &= 1 - \frac{\varepsilon_M(p)}{\varepsilon_T(p)} = 1 - \frac{W_T(p)}{W_M(p)} \cdot \frac{\varepsilon'_M(p)}{\varepsilon'_T(p)} = 1 - \frac{W_T(p)}{W_M(p)} \cdot \frac{G(p)}{1+G(p)} \\ &= \frac{1}{1+G(p)} + \frac{G(p)}{1+G(p)} \left[ 1 - \frac{W_T(p)}{W_M(p)} \right] \end{aligned} \quad (5-3-8)$$

可见, 若  $W_T(p) = W_M(p)$ , 则上式可简化为

$$E(p) = \frac{1}{1+G(p)} \quad (5-3-9)$$

关于线误差  $h = \varepsilon \cdot x$ , 也可建立误差传递函数如下:

$$E_h(p) = \frac{h(p)}{\varepsilon_T(p)} = \frac{x \cdot \varepsilon(p)}{\varepsilon_T(p)} = \frac{x}{1+G(p)} \quad (5-3-10)$$

然而, 式(5-3-10)中含有随时间变化相当剧烈的放大系数  $x$ , 冻结系数的假定已被破坏得相当厉害。因此, 利用这个本来误差就很大的公式来计算导弹系统的误差, 将是不合理的。为了解决这个问题, 可以利用变参数系统的分析方法<sup>(16)</sup>。但是, 这一方法相当复杂, 降低了它的实用价值。为此, 需要寻求简单易行而又不带来方法误差的计算公式。

### 三、动态误差的计算

当导弹按理想三点法导引时, 在弹道上的每一点, 都应具有一定的法向加速度, 才能使弹道具有一定的曲率而形成理想的运动学弹道。若用  $a_{N,K}$  表示, 在这个运动学弹道上, 导弹应具有的法向加速度

$$a_{N,K} = v^2 K \quad (5-3-11)$$

其中  $K$  为理想运动学弹道的曲率。在目标及导弹都具有加速度的情况下,  $K$  应按第四章中公式 (4-1-18) 求出。

于是

$$\begin{aligned} a_{N,K} &= \frac{2vv_T \sin^2 \phi}{h} \left[ 1 + \frac{\frac{v_T r}{vh} \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_T r}{vh}\right)^2 \sin^4 \phi}} \right] \\ &\quad + \frac{\frac{v_T r}{vh} \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_T r}{vh}\right)^2 \sin^4 \phi}} \left( \frac{v}{v_T} \dot{v}_T - \dot{v} \right) \end{aligned} \quad (5-3-12)$$

在一定的参数条件及运动初始条件之下, 上式是随时间而变化的确定函数

$$a_{N,K} = a_{N,K}(t, h, \phi_0, v_0, v_{T,0}, \dot{v}, \dot{v}_T) \quad (5-3-13)$$

注意, 上二式中的  $h$  代表“偏移参量”, 而不是动态误差。

在理想运动学弹道的任何一点上, 导弹在制导指令作用下所产生的实际加速度  $a_N$  应该精确地符合于理想加速度  $a_{N,K}$ , 其间若有任何差异则将导致产生动态误差。因此, 关于动态误差  $h$  可以建立如下的结构图, 如图 5-48 所示。

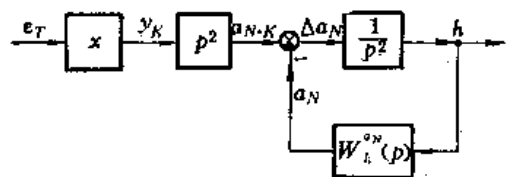


图5-48 结构图的变换

在这个结构中，以传递函数  $W_k^{qN}$  所代表的环节定义为

$$W_k^{qN}(p) = \frac{a_N(p)}{h(p)} = \frac{1}{x} \cdot W_k^x(p) \cdot W_k^{\dot{q}}(p) \cdot v \quad (5-3-14)$$

通过适当的控制盒电路设计，可以使  $\frac{1}{x} W_k^x(p)$  具有不随时间剧烈变化的放大系数，已如前述，于是以  $W_k^{qN}$  所代表的环节可认为是符合于冻结系数假定的。按此结构图，以理想运动学弹道的加速度  $a_{N,K}$  为输入，而以导弹的动态线偏差  $h$  为输出的闭环误差传递函数应是

$$H(p) = \frac{h(p)}{a_{N,K}(p)} = \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{1}{p^2} W_k^{qN}(p)} = \frac{1}{p^2 + W_k^{qN}(p)} \quad (5-3-15)$$

可见，在  $H(p)$  中也不含随时间剧烈变化的量。在  $p=0$  的邻域内，可将  $H(p)$  展开为台劳级数如下

$$H(p) = h_0 + h_1 p + \frac{h_2}{2!} p^2 + \frac{h_3}{3!} p^3 + \dots \quad (5-3-16)$$

其中  $h_0, h_1, h_2, \dots$  —— 误差系数，可如下计算

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= [H(p)]_{p=0} \\ h_1 &= \left[ \frac{d}{dp} H(p) \right]_{p=0} \\ h_2 &= \left[ \frac{d^2}{d^2 p^2} H(p) \right]_{p=0} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5-3-17)$$

求得诸误差系数  $h_0, h_1, \dots$ ，即可求得动态偏差  $h(t)$  的拉氏变换。按式 (5-3-15) 及 (5-3-16)，可有

$$h(p) = H(p) \cdot a_{N,K}(p) = \left[ h_0 + h_1 p + \frac{h_2}{2!} p^2 + \dots \right] a_{N,K}(p) \quad (5-3-18)$$

注意到上式只是在  $p=0$  的邻域内才收敛，而在  $p \rightarrow \infty$  时发散；故上式只适用于计算稳态情况下的动态误差。显然，初始时刻的理想法向加速度  $a_{N,K}|_{t=0}$  及其各阶导数等，对于稳态情况 ( $t \rightarrow \infty$ ) 下的动态误差影响很小，可以略而不计。于是对 (5-3-18) 式进行拉氏反变换，并认为  $a_{N,K}$  及其各阶导数的初始值皆为零，即可得

$$h(t) = h_0 a_{N,K}(t) + h_1 \frac{da_{N,K}(t)}{dt} + \frac{h_2}{2!} \frac{d^2 a_{N,K}(t)}{dt^2} + \dots \quad (5-3-19)$$

这就是导弹在稳态情况下的动态误差。

考虑上式的收敛问题：若运动学弹道的曲率变化太剧烈，以致按理想运动学弹道算出的导弹加速度  $a_{N,K}$  变化也很剧烈，那么， $a_{N,K}$  可能具有很大的高阶导数，则按 (5-3-19) 式计算动态误差时，其收敛很慢，可能是不适用的。

然而，在一般情况，特别是在反坦克导弹的情况下，上式是可以收敛的。这是因为 (1) 在导弹已经导入到了瞄准线上之后，对导弹的操纵动作总是很平缓的；(2) 作为目标的坦克，其机动性是低的；因此理想加速度  $a_{N,K}$  通常不会具有很大的高阶导数。

在这种情况下，导弹的动态误差将只决定于式(5-3-19)中的前几项，而主要决定于第一项，即

$$h(t) \approx h_0 \cdot a_{N,K}(t) \quad (5-3-20)$$

然而，按照式(5-3-17)

$$h_0 = [H(p)]_{p=0} = \frac{1}{W_{AN}(0)} = \frac{1}{k_x^* k_k^* v \frac{1}{x}} = \frac{1}{k_x^* M} \quad (5-3-21)$$

由此可知，反坦克导弹的动态误差大体上同开环放大系数  $k_x^* M$  成反比。因此，为了减小动态误差，应增大放大系数  $k_x^* M$ 。

但是，由 § 5-2 中关于系统稳定性的讨论已经知道，放大系数  $k_x^* M$  的增大将导致系统闭环稳定性的降低。所以，实际上不能够依靠增大放大系数的办法来减小动态误差。为了减小动态误差，必须寻找另外的途径。

### § 5-3-3 减小动态误差的途径

提高放大系数可以降低动态误差，但是，受稳定性的限制已如上述。

从表面上看，采用在控制盒电路中串入积分环节的办法也可以减小动态误差。假如在  $W_{AN}$  的表达式中，包含有  $\frac{1}{p}$  的因子，那么在(5-3-17)式中将有  $h_0 = 0$ ；若含有  $\frac{1}{p^2}$  的因子，就将有  $h_1 = 0$ ，以此类推。但是，也是由于系统稳定性的问题，我们不能这样做。在上一节中，讨论稳定性问题时已经指出过，由于反坦克导弹系统的开环中已含有二重积分的运动学环节，必须在控制盒中增加微分补偿电路，才能使系统稳定。如果再增加积分环节，同时必须再增加微分电路以保证系统的稳定性。然而增加微分环节后，系统滤除噪声的能力将会降低，从而使起伏误差增大。所以应该尽量避免采用串入积分环节的办法来降低动态误差。

为了减小反坦克导弹的动态误差，目前比较行之有效的办法是采用附加补偿。它类似于在一般的自动调节系统中按扰动进行调节的方法<sup>(1)</sup>。这一方法的基本观念是很简单的，可以用图 5-49 来说明。图 5-49 中给出了一个以速度  $v_T(t)$  运动的目标的轨迹，以及相应的按三点法导引的理想运动学弹道  $a$ ，还有实际的动力学弹道（实际弹道  $b$  总是落后于理想弹道的），动态误差  $h(t)$  就是曲线  $a$  及  $b$  相应各点之间的距离。按 § 5-3-2 所述，对于给定的目标运动规律，动态误差  $h(t)$  是可以计算出来的。于是可以这样地提出问题：既然动态误差  $h(t)$  是使实际的动力学弹道滞后于理想的运动学弹道，那么，是否能够按照一条虚拟的运动学弹道  $c$ （虚拟弹道  $c$  应该超前于理想弹道  $a$ ）来形成控制指令，从而使相应的实际动力学弹道  $d$  非常接近于理想弹道  $a$  呢？这个想法在理论上是很吸引人的，在实践上也是成功的。实际上，通过这一方法，即使不能完全补偿动态误差，也能补偿其很大一部分。

为了按照这个方法补偿动态误差  $h(t)$ ，显然必须根据目标过去和当前的运动情况，对它在未来某个时刻的运动状态进行一些预测。就是说，应该提供更多的关于目标运动的信息。在按三点法导引的反坦克导弹系统中，通常所采取的措施，就是在对制导系统输入

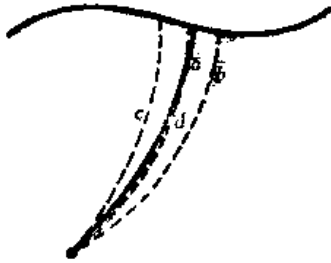


图5-49 几种弹道的几何关系  
 a—运动学弹道，b—动力学弹道，  
 c—虚拟的运动学弹道，d—对应于  
 c的实际动力学弹道。

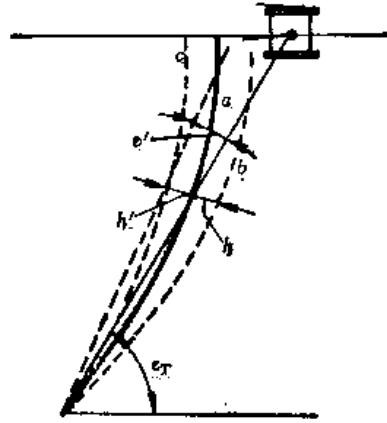


图5-50 虚拟弹道的超前  
 a—理想运动学弹道，b—相应于  
 a的动力学弹道，c—虚拟的运动  
 学弹道。

目标运动的角度位置信息的同时，还要输入目标运动的角速度信息。

设虚拟弹道  $c$  在各点上超前于理想运动学弹道的线偏移量为  $h'$ ，从控制点至虚拟弹道上任一点之连线同相应的某一时刻的瞄准线之间的夹角为  $\epsilon'$ ，显然

$$h'(t) = x(t) \cdot \epsilon'(t) \tag{5-3-22}$$

若按照虚拟弹道  $c$  来对导弹形成控制指令，则由于存在着动态误差，相应的实际弹道将滞后一个线偏差  $h$ ，如果使

$$h' = h \tag{5-3-23}$$

那么这时的实际弹道将恰好落在理想的运动学弹道上。这样就达到了补偿的目的。

于是，应该在按三点法导引原则形成的控制指令之上，增加一个  $\epsilon'(t)$  形成的补偿指令，由式 (5-3-22) 及 (5-3-23)，应使

$$\epsilon'(t) = \frac{1}{x(t)} \cdot h(t) \tag{5-3-24}$$

又由 (5-3-19) 式可得

$$\epsilon'(t) = \frac{1}{x(t)} \left[ h_0 \cdot a_{N,K}(t) + h_1 \frac{da_{N,K}(t)}{dt} + \dots \right] \tag{5-3-25}$$

或按 (5-3-20) 式可得

$$\epsilon'(t) \approx \frac{h_0}{x(t)} \cdot a_{N,K}(t) \tag{5-3-26}$$

其中，理想弹道的加速度  $a_{N,K}(t)$  应由 (5-3-12) 式计算，但可予以简化。由第四章中的分析结果可知，在反坦克导弹的通常情况下，由于速度比  $p > 5$ ，故式 (5-3-12) 中的

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{ph}\right)^2 \sin^4 \phi} \approx 1$$

并且

$$\left[ 1 + \frac{\frac{r}{ph} \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{ph}\right)^2 \sin^4 \phi}} \right] \approx 1$$

于是

$$a_{N,K} \approx \frac{2v^2 \sin^2 \phi}{ph} + \frac{r}{ph} \sin^2 \phi (-\dot{v} + pv_T) \quad (5-3-27)$$

其中, 根据几何学关系可知

$$\frac{v \cdot \sin^2 \phi}{ph} = \dot{\epsilon}_T$$

及

$$\frac{r \sin^2 \phi}{ph} = \frac{r \dot{\epsilon}_T}{v}$$

于是

$$a_{N,K} \approx \dot{\epsilon}_T \left( 2v - x \frac{\dot{v}}{v} + x \frac{\dot{v}_T}{v_T} \right)$$

实际上, 目标的加速度是无法由设计者掌握的, 而且一般说来是不大的。因此, 可认为

$$a_{N,K} \approx \dot{\epsilon}_T \left( 2v - x \frac{\dot{v}}{v} \right) \quad (5-3-28)$$

所以, 式 (5-3-26) 可改写为

$$\epsilon'(t) \approx \dot{\epsilon}_T \left( 2v - x \frac{\dot{v}}{v} \right) \frac{h_0}{x} = \dot{\epsilon}_T \left( \frac{2v}{x} - \frac{\dot{v}}{v} \right) \cdot \frac{1}{k_{\epsilon M}^{\epsilon}} \quad (5-3-29)$$

在实际工作中, 瞄准线的角速度  $\dot{\epsilon}_T$  是可以测得的, 这样, 通过一个变放大系数的环节

$$k_{\epsilon_T}^{\epsilon'} = \left( \frac{2v}{x} - \frac{\dot{v}}{v} \right) \frac{1}{k_{\epsilon M}^{\epsilon}} \quad (5-3-30)$$

就可以把  $\dot{\epsilon}_T$  信息转化为补偿信号  $\epsilon'(t)$ 。于是, 有补偿的反坦克导弹系统的结构图应如图 5-51 所示。

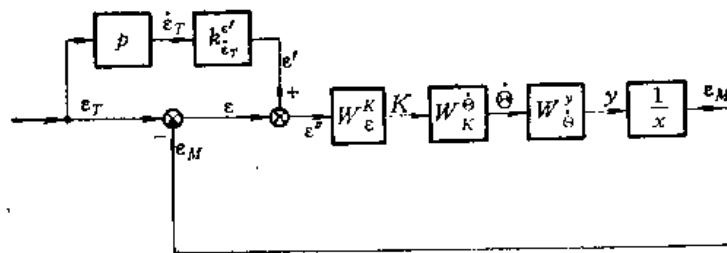


图5-51 有补偿的导弹系统的结构图

上述补偿动态误差的办法, 可以施于俯仰和偏航两个通道。

#### § 5-3-4 制导过程中的随机干扰因素及起伏误差

##### 一、随机干扰因素

在导弹的制导飞行过程中, 受到大量的随机干扰因素的作用。这些干扰因素的作用大致如下:

1. 在目标运动过程中, 射手应使瞄准望远镜中的十字线始终对准目标的几何中心。在这个瞄准过程中, 射手不可能绝对准确地使十字线对准瞄准点, 而是具有某个瞄准误差,

这个瞄准误差是一个随机的时间函数  $n_{瞄准}(t)$ ，即噪声。

2. 红外测角仪根据导弹曳光管相对于瞄准线的偏差位置，输出一个俯仰误差角信号和一个偏航误差角信号，由于光源、背景、环境及测角仪内部的原因，在输出信号中也混有噪声。

3. 控制盒根据红外测角仪给出的误差角信号形成控制指令，此控制指令在弹上又转化为操舵信号；在这些过程中，由于电路内部的因素，也将混入噪声。

4. 控制指令沿着导线（或其他通道）传递给导弹上的接收装置，在此过程中，由于外界的电磁干扰，将混入噪声。

5. 控制舵（或其他执行元件）在空气流或燃气流中运动而产生舵控力。在此过程中，由于气流中的扰动作用，也将混入噪声；此外，整个弹体受发动机工作及外部空气流动的激励作用而产生随机振动。这种噪声也将影响控制力及其控制效果，它们是声音噪声、机械噪声和气动弹性噪声。

6. 导弹在受控飞行中，可能受到随机阵风的干扰，这也是一种噪声。

## 二、噪声和平稳随机过程

以上这些噪声，在最严重的情况下将使导弹系统正常工作的条件受到破坏，其结果是可靠性受到影响。在一般的情况下，可使导弹的制导精确度降低，影响导弹的命中率。

由于噪声对导弹制导过程的影响，就形成了起伏误差。为了计算和缩小起伏误差，需要掌握两方面的知识：第一，关于各种噪声的性质的实际资料；第二，计算各种噪声对起伏误差的影响效果的理论方法。

所谓各种噪声的性质的实际资料，指的是实际作用于导弹系统的各种噪声的类型、强度、频率等等。这些资料，常常只能从实地测量来获得。在缺乏这些资料的情况下，就不得不根据过去的经验进行估计。

噪声是一种随着时间而随机变化的信号，或者说是一种随机过程。一般把随机过程分为平稳随机过程和非平稳随机过程两大类。下面只考虑平稳随机过程。所谓平稳随机过程，简单地说，就是对于一个在相当长的时间内的随机信号  $x(t)$ ，任意从中截取一段时间适当长的部分，这样的任一部分的概率分布特性都能代表总体的概率分布特性。因此，对于平稳随机过程，知道了它在某个时刻之前的概率分布特性，也就知道了它在这时刻以后的概率分布特性。

经验证明，作用在导弹制导系统中的噪声，常可近似地被认为是平稳随机过程。

## 三、噪声的统计描述

噪声是一个时间的随机函数。所以，重要的问题并不是关于它的强度的时间历程  $x(t)$ ，而是它在任何时刻  $t$  所具有的强度  $x_t$  的统计规律。在平稳随机过程的情况中，应注意以下的简单统计特性。

最重要的一个统计量就是噪声  $x(t)$  的强度的时间平均值  $\bar{x}$  即

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (5-3-31)$$

另一个重要统计量就是  $x(t)$  的时间均方差

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt \quad (5-3-32)$$

显然，这两个统计特征量，都可以同概率论中的相应量联系起来理解。

另一个重要的统计量是同噪声的时间变化过程有关的，即“自相关函数” $R(\tau)$ ，定义为

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau) \cdot x(t) dt \quad (5-3-33)$$

$R(\tau)$  表明信号在任一时刻的强度同将来某一时刻的强度之间是否存在相关性。如果在一个噪声信号中含有某种非随机的规律成分，那么通过自相关函数就可以把这种规律成分表示出来。如果有这样一种信号，对于任何  $\tau$  值 ( $\tau=0$  除外) 而言，在  $x(t)$  及  $x(t+\tau)$  之间没有任何相关性；那么，这种信号做为一种时间历程来说，就真正是“变化莫测”的，这种信号称为“白色噪声”。

#### 四、噪声的功率谱密度

一个周期为  $T$  的时间函数  $f(t)$  可以表达为傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5-3-34)$$

式中  $C_n$ ——傅立叶系数

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

并且

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

一般说来，傅立叶系数  $C_n$  是一个复数；若  $f(t)$  为实变函数，则  $C_n$  同  $C_{-n}$  为共轭复数。利用傅立叶系数  $C_n$ ，可以做出  $f(t)$  的离散频谱。

以上是众所周知的数学知识。下面要注意一个重要的关系——各傅立叶系数  $C_n$  的绝对值的平方和就是时间函数  $f(t)$  在一个周期  $T$  之内的均方值，即

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (5-3-35)$$

这个重要的关系称为“帕萨瓦(Parseval)定理”。它在数学上是不难证明的，重要的是从物理意义上理解它。注意，若  $f(t)$  代表信号的电压，而电压的平方则正比于信号的功率，于是  $f(t)$  的时间均方值就代表着在周期  $T$  之内的信号的平均功率。另一方面， $|C_n|^2$  则代表着以  $n\omega$  为频率之信号成分的功率。这样就不难理解帕萨瓦定理的物理意义了。

以上诸关系是对周期函数建立的，但也可推广到非周期函数。噪声就是一种非周期函数。若  $f(t)$  是非周期函数，在  $-\infty < t < +\infty$  区间内绝对可积，即满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$



则上述的傅立叶级数转化为傅立叶积分，即有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5-3-36)$$

其中  $F(\omega)$ —— $f(t)$  的傅立叶积分变换，或有

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5-3-37)$$

同傅立叶级数  $C_n$  的情况类似，傅立叶变换  $F(\omega)$  也是复数；若  $f(t)$  为实变函数，则  $F(\omega)$  同  $F(-\omega)$  是共轭复数。利用  $F(\omega)$  的绝对值，可以得到  $f(t)$  的连续频谱。此外，相应地也有帕萨瓦公式如下

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5-3-38)$$

此式的物理意义，同 (5-3-35) 式类似。

如果时间过程是有限的，即  $f(t)$  定义于有限的时间区间  $-T \leq t \leq T$ ，仍可进行傅立叶积分变换，只需假定一个函数  $f_T(t)$ ，定义为

$$\begin{cases} f_T(t) = f(t), & \text{当 } -T \leq t \leq T, \\ f_T(t) = 0, & \text{当 } t < -T \text{ 或 } t > T. \end{cases}$$

于是可得傅立叶变换

$$F_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5-3-39)$$

这个  $F_T(\omega)$  称为有限过程的频谱，它也是一个复数。定义有限过程的功率谱密度  $S_T(\omega)$  为

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} |F_T(\omega)|^2 \quad (5-3-40)$$

在平稳随机过程中，只要把某次观测的延续时间  $T$  取得足够长，就可以把从这次观测所获得的数据  $f_T(t)$  看做是无限延续的过程的代表。这时，就可以认为，由  $F_T(\omega)$  导出的有限过程的谱密度  $S_T(\omega)$  可以代表全过程的谱密度  $S(\omega)$ ，即

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_T(\omega)|^2 \quad (5-3-41)$$

在  $T$  足够长的情况下，则有

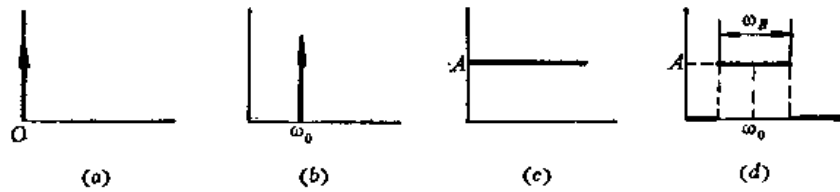
$$S(\omega) \approx \frac{1}{2T} |F_T(\omega)|^2 = S_T(\omega) \quad (5-3-42)$$

在图 5-52 中，绘出了若干典型函数的功率谱密度  $S(\omega)$  的曲线。在  $S(\omega)$  曲线下所包围的面积正比于信号  $f(t)$  的功率；而  $S(\omega)$  的纵坐标即代表着信号  $f(t)$  中各种频率成分的功率密度，故称  $S(\omega)$  为功率谱密度。曲线  $S(\omega)$  的峰值所对应的频率，就代表着信号  $f(t)$  中占优势的振荡成分的频率。

在这些典型的信号中，白噪声的功率谱密度  $S(\omega)$  在整个频率  $\omega = 0 \sim \infty$  的范围上为常数。而带通白噪声则是在一定的频率区间，其功率谱密度  $S(\omega)$  不为零而为常数。

关于谱密度的特性，可指出如下几点：

1. 谱密度  $S(\omega)$  在任何频率  $\omega$  处总为正值，这是因为能量是不可能为负的。

图5-52 典型信号的功率谱密度  $S(\omega)$ 

(a)  $f(t) = c = \text{常数}$ ;  $S(\omega) = c^2 \delta(\omega)$ , 其中  $\delta(\omega)$  为频率域中的单位脉冲函数;

(b)  $f(t) = A \sin(\omega_0 t)$ ;  $S(\omega) = \frac{A^2}{2} \delta(\omega - \omega_0)$ ;

(c)  $f(t) = \text{白噪声}$ , 其自相关函数  $R(\tau) = A \cdot \delta(\tau)$ ;  $S(\omega) = A$ ;

(d)  $f(t) = \text{带通白噪声}$ , 其  $R(\tau) = A \cdot \omega_B \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega_B}{2} \tau\right)}{\frac{\omega_B}{2} \tau} \right) \cos(\omega_0 \tau)$ ;  $S(\omega) = A$ ,

当  $\omega_0 - \frac{\omega_B}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}$  时, 但是  $S(\omega) = 0$ , 当  $\omega < \omega_0 - \frac{\omega_B}{2}$  或  $\omega > \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}$

时, 其中  $\omega_B$  为频带宽度,  $\omega_0$  为频带中心频率。

2.  $S(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数; 由于在一般情况下, 负的  $\omega$  并无物理意义, 故通常只需在  $\omega \geq 0$  的范围内取  $S(\omega)$  就可以了。

3. 在平稳随机过程中, 谱密度  $S(\omega)$  是自相关函数  $R(\tau)$  的傅立叶变换, 即

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5-3-43)$$

并且

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (5-3-44)$$

4. 随机过程  $x(t)$  的谱密度  $S(\omega)$  同均方值  $\sigma_x^2$  之间, 有简单的关系如下

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (5-3-45)$$

### 五、制导系统对于噪声的响应

若已知制导系统或环节的传递函数  $W(p)$ , 如果有一个噪声信号, 其功率谱密度  $S(\omega)$  已知, 将此信号施于制导系统或环节的输入端, 则在输出端的响应信号之谱密度可由下式求得

$$S_{\text{出}}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{\text{入}}(\omega) \quad (5-3-46)$$

其中  $W(j\omega)$  为系统或环节的频率特性。这个表达式的物理意义就是: 随机信号通过一个系统之后, 其功率按频率  $\omega$  的分布情况是随着系统的幅频特性的平方而改变的。由于系统的通频带宽度是有限的, 因此噪声信号在通过系统之后, 原有的高频成分将被滤除, 而在共振频率附近的信号成分的功率将被放大。

并且, 输出信号的均方值  $\sigma_{\text{出}}^2$  可由下式算出

$$\sigma_{\text{出}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_{\text{入}}(\omega) d\omega \quad (5-3-47)$$

如果, 输入信号是白噪声, 则上式简化为

$$\sigma_{\text{出}}^2 = \frac{S_{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \quad (5-3-48)$$

由上式可看出，在将白噪声输入于一个系统的情况下，如果增大系统的通频带宽度，或者增大系统的振荡性（即增大其幅频特性曲线之高度），就会增大输出信号的均方值。由此可见，为了压制噪声，就应该缩小系统的通频带宽度，并减小其振荡性。

在实际制导系统中，有用的制导信号同干扰的噪声信号同时输入进来，在总的输出中，包含了有用部分和误差部分。输出中的有用部分就是对制导信号的复现，误差部分则包含了系统惯性所引起的动态误差和噪声引起的起伏误差。为了减小动态误差，希望增大系统的通频带宽度；而为了减小起伏误差则希望减小通频带宽度。因此，在设计工作中，必须选择一个比较恰当的通频带宽度，使得在动态误差及起伏误差之间取得最优的折衷关系。

### 六、混有噪声的控制信号作用于含有非线性元件的制导系统时的特殊问题

在反坦克导弹系统中，通常含有一些非线性元件，特别是具有饱和特性的元件，这种元件的输入-输出特性曲线如图 5-53 所示。在输入信号不太强时，特性曲线是线性的，但是只要输入信号的强度超过某一限度，输出即达到饱和。例如，红外测角仪就是这样的环节；舵机也是这样的环节。这种具有饱和特性的环节，常有保护制导系统的作用。就是说，在输入太强时，不致使系统的输出太强，以免达到破坏正常运转的程度。但是，这种具有饱和特性的环节，在遇到混有噪声的输入信号时，将使系统的性能降低，在严重的情况下，将使系统完全失去作用。现用图 5-54 来说明这一现象。在图 5-54 中，(a) 是非线性环节的特性曲线， $x$  为输入量， $y$  为输出量；(b) 是输入信号  $x(t)$ ，其中曲线 1 是有益信号，即  $x(t)$  的时间平均值，以  $m_x(t)$  表之，曲线 2 是  $x(t)$  的随机起伏的边界；(c) 是输出信号  $y(t)$ 。假如环节是完全线性的， $y(t)$  的平均值及随机起伏边界值就是相应的曲线 1 及 2。显然，有益的输出  $m_y(t)$  同有益的输入  $m_x(t)$  应该是成正比的。如果环节具有饱和特性，只要输出信号的起伏电平不大于饱和电平  $y_{\text{max}}$ ，则  $m_y(t)$  同  $m_x(t)$  仍会保持这个比例关系。但是如果在非线性环节的输入信号中混有较强烈的噪声，那么，它的起伏电平就将相当大，相应的输出电平  $y(t)$  就会受到饱和电平  $y_{\text{max}}$  的限制，其顶部将被削去一部分。这样一来，输出的有益信号  $m_y(t)$  就将如图中虚线 3 所示。显然，它将低于线性环

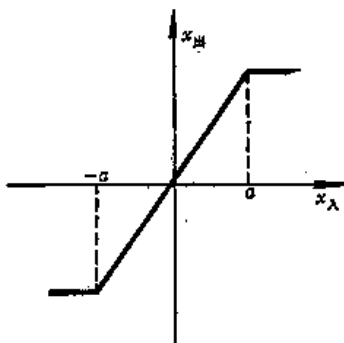


图5-53 非线性环节的特性曲线

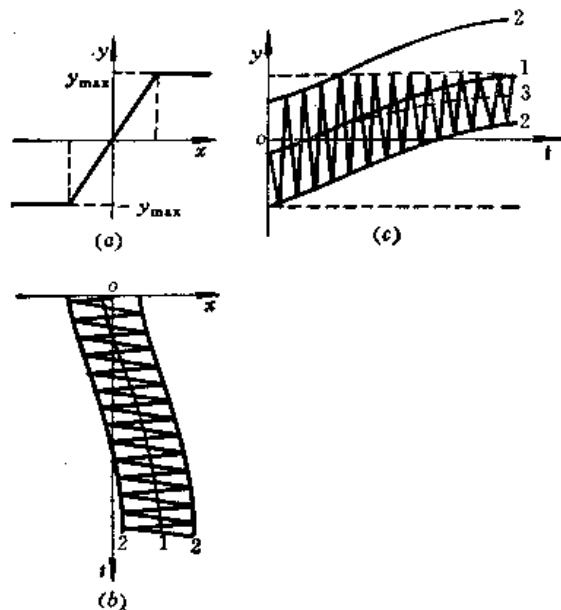


图5-54 混有噪声的信号通过具有饱和特性的环节

节情况中的曲线1。换句话说,输出和输入之间不再能维持原来的比例关系,新的比值  $k = \frac{m_y}{m_x}$  将低于线性情况下的比值。也就是说,静态的有益信号的放大系数将被降低。

在极端的情况下,如果在输入信号中混入的噪声很强,以致输出信号的起伏电平以很大的概率超过了饱和电平。于是,输出信号在  $\pm y_{\max}$  之间的分布几乎完全是无规的。这时,其平均值  $m_y(t)$  即趋于零。这就是噪声完全淹没(或阻塞)了有益信号的情况。

为了不致严重地降低有益信号的静态放大系数,在设计工作中应该尽可能设法压制噪声,提高有益信号对于噪声的相对强度,并且合理地选择非线性元件的饱和电平。

利用图5-55可以计算混有噪声的信号通过具有饱和特性的环节后对有益信号的静态放大系数。图中表明,当输入  $x = \pm a$  时,输出达到饱和电平  $y = y_{\max}$ ; 输入信号的时间均方值为  $\sigma_x^2$ , 而有益信号的静态放大系数  $K_0$  同无量纲参量  $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{a}$  及  $\frac{m_x}{a}$  有密切关系。

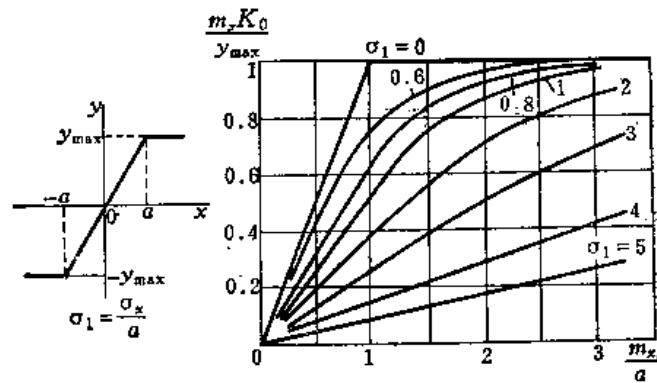


图5-55 具有饱和特性的环节对于混有噪声的有益信号的静态放大系数

#### § 5-4 脉冲调宽式控制系统的设计特点

在反坦克导弹的制导系统中,相当广泛地采用着脉冲调宽式的控制方式。这种类型的控制系统的构造简单,作用可靠,造价低廉。由于它具有这些突出的优点,所以近来也将它用在某些小型的地空导弹中。

这种脉冲调宽式的控制系统,可以用于弹体无滚转的导弹上,也可以用在弹体滚转的导弹上,而在滚转的导弹上用得特别多。利用弹体滚转的条件,可以使用单一的控制通道及单一的舵机来操纵导弹在俯仰和偏航两个方向上的运动,这样就能使导弹的构造更加简化。

虽说有上述的重大优点,但是,这种脉冲调宽式控制指令所引起的导弹弹体的响应运动十分复杂,从而引起了一些特殊的设计问题。

在本节中,先针对弹体不滚转的情况,讨论同脉冲调宽控制方式有关的设计问题。至于在弹体滚转情况下的设计问题,将留在下节进行专门讨论。

### § 5-4-1 脉冲调宽指令信号及其引起的舵控力的谱量分析

脉冲调宽指令信号的电压波形  $U(t)$  是一系列周期重复的方波 (图 5-56), 其幅值为  $U_0$ 。为便于计算, 可用无量纲电压  $u(t)$  来表示  $U(t)$ , 即

$$U(t) = U_0 \cdot u(t) \quad (5-4-1)$$

式中

$$u(t) = \sum_{k=0}^N [1(t - kT) - 1(t - kT + T_1)] \quad (5-4-2)$$

式中  $T$  —— 脉冲重复周期, 设定为常值;

$T_1$  —— 脉冲的宽度, 是可被调制的。

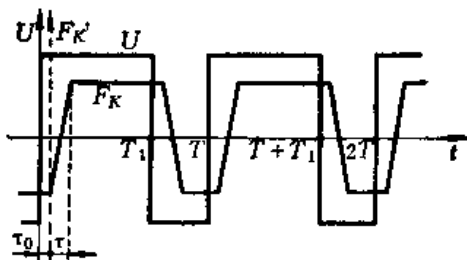


图 5-56 脉冲调宽信号及其引起的舵控力

脉冲宽度  $T_1$  的调制程度是由指令系数  $K$  来衡量的, 如 (5-1-3) 式, 定义

$$K = 1 - \frac{2T_1}{T} \quad (5-4-3)$$

显然, 若  $T_1 = T/2$ , 则  $K = 0$ , 这就是“零指令”; 若  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = T$  (或反之,  $T_1 = T$  而  $T_2 = 0$ ) 则  $K = \pm 1$ , 即为“全上指令”或“全下指令” (在俯仰通道中)。

这样的脉冲调宽式的电压信号作用于弹上接收电路及继电器式舵机, 引起舵机的动作, 并产生相应的舵上控制力  $F_k$ 。假若舵机没有惯性, 那么舵机的动作及舵上控制力  $F_k$  的变化波形应是同信号  $u(t)$  一致的方波。

然而, 事实上不仅舵机具有相当的惯性, 而且电路中也具有一定的惯性 (即电感)。所以, 舵机的动作及舵上控制力  $F_k(t)$  的变化都将同原来发出的指令信号波形略有不同。主要不同处是两点, 一是相位略有滞后, 二是波形带有斜边。滞后及斜边的时间通常有几毫秒以至几十毫秒 (图 5-56)。

在导弹弹体滚转的情况下, 舵上控制力  $F_k(t)$  波形滞后于原指令波形  $U(t)$  的时间  $\tau_0$ , 对于导弹的运动往往有不可忽视的影响, 必须进行仔细的分析并加以修正 (详见下节)。但在弹体不滚转的情况下, 滞后时间  $\tau_0$  的影响很小, 往往可以略而不计。为了便于分析, 本节中先不考虑  $\tau_0$  的影响。这样就相当于在图 5-56 中把  $F_k(t)$  曲线的纵坐标轴向右移动了一个  $\tau_0$  的距离, 如图 5-56 中虚线所示。

斜边时间  $\tau$  的影响, 通常也可略去。但在尚未证明这一结论之前, 在分析过程中不妨把这个因素考虑在内。

于是舵上控制力  $F_k(t)$  也可表为无量纲形式  $f(t)$ ,

$$F_k(t) = |F_{k,\max}| f(t) \quad (5-4-4)$$

$f(t)$  是一个以  $T$  为周期的周期函数, 即

$$f(t) = f(t - kT) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

在任何一个周期之内的  $f(t)$  的变化情况都能代表全体。在  $0 \leq t \leq T$  的区间之内,  $f(t)$  的数学描述如下:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \frac{t}{\tau/2}, & \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \\ f(t) &= 1, & \text{当 } \frac{\tau}{2} \leq t \leq T_1 - \frac{\tau}{2}; \\ f(t) &= \frac{T-t}{\tau/2}, & \text{当 } T_1 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq T_1 + \frac{\tau}{2}; \\ f(t) &= -1, & \text{当 } T_1 + \tau \leq t \leq T - \frac{\tau}{2}; \\ f(t) &= \frac{t-T}{\tau/2}, & \text{当 } T - \frac{\tau}{2} \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (5-4-5)$$

可将  $f(t)$  展开为傅立叶级数如下

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \quad (5-4-6)$$

或为便于计算, 也可展为指数函数形式的级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{j2n\pi \frac{t}{T}} \quad (5-4-7)$$

式中  $f_n$ ——傅立叶系数,

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j2n\pi \frac{t}{T}} dt \quad (5-4-8)$$

下面来具体地求出  $f_n$ 。

当  $n = 0$  时, 有

$$f_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (5-4-9)$$

将式 (5-4-5) 的  $f(t)$  表达式代入上式中, 分段积分后可得

$$f_0 = \frac{2T_1}{T} - 1 \quad (5-4-10)$$

注意, 又由 (5-4-3) 式可知

$$f_0 = -K$$

关于  $f_0$  的物理意义, 由 (5-4-9) 可知, 它是在一个周期  $T$  之内, 无量纲舵控力的平均值。这也就是前面 (5-1-4) 式的由来。

对于  $n \neq 0$  的各系数, 将 (5-4-5) 式代入 (5-4-8) 式, 可得如下的公式

$$f_n = \frac{-j}{n\pi} \left( 1 - e^{-j2n\pi \frac{T_1}{T}} \right) \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5-4-11)$$

已知  $f_n$ , 容易求得三角函数形式的傅立叶级数式 (5-4-6) 中之系数  $A_n$  及  $B_n$  如下

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= f_0 = -\frac{2T_1}{T} - 1 \\ A_n &= f_n + f_{-n} = \frac{2}{n\pi} \sin\left(2n\pi \frac{T_1}{T}\right) \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}} \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \\ B_n &= j(f_n - f_{-n}) = \frac{2}{n\pi} \left[ 1 - \cos\left(2n\pi \frac{T_1}{T}\right) \right] \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}} \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5-4-12)$$

将式 (5-4-12) 具体写入 (5-4-6) 式中, 并进一步整理后可得

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left[\left(1+f_0\right)\frac{n\pi}{2}\right]}{n} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}} \right. \\ &\quad \left. \times \cos\left[\left(\frac{1+f_0}{2}\right)n\pi - \frac{2n\pi}{T}t\right] \right\} \quad (5-4-13) \end{aligned}$$

从公式 (5-4-13) 可以看出, 在脉冲调宽指令信号  $u(t)$  的作用之下, 通过弹上继电式舵机的动作所产生的舵控力无量纲值  $f(t)$ , 乃是包含着两个部分: 一部分是由周期平均值  $f_0$  所决定的常值成分; 另一部分则是由无穷多高频谐波分量组成的振荡成分。

已知信号脉冲的重复周期为  $T$ , 则信号脉冲的重复周率就是  $\frac{1}{T}$  (赫芝), 或者说, 信

号脉冲的基本振荡（角）频率就是

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \text{ [弧度/秒]}$$

这也就是舵机振荡的基本频率。

舵控力的振荡部分就是以  $\omega_s$  为基频的无穷多高次谐波分量所组成的。由 (5-4-13) 式看来，频率愈高的分量，其振幅愈小。取其中的基频 ( $n=1$ ) 分量来看，它就是

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin\left[(1+f_0)\frac{\pi}{2}\right] \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\frac{\tau}{T}\right)}{\pi \frac{\tau}{T}} \cos\left[(1+f_0)\frac{\pi}{2} - \omega_s t\right] \quad \dots\dots(5-4-14)$$

若在设计导弹时，使指令信号的脉冲频率  $\omega_s$  远远大于弹体摆动的固有频率  $\omega_n$ ，那么，由于弹体环节的低通滤波特性，信号中的这种以  $\omega_s$  为基频的谐波振荡成分将被滤掉。于是在指令信号  $u(t)$  及其引起的舵控力  $f(t)$  之中，就只剩下了同周期平均值  $f_0$  成正比的常值分量能够引起弹体的响应运动。正是根据这个原理，才能把一个按脉冲调宽方式工作的制导系统看做是一个等效的比例式制导系统，并且能够运用传统的方法来分析弹体环节对指令的响应以及系统闭环的稳定性和制导误差等。

为了确保指令信号  $u(t)$  以及舵控力  $f(t)$  之中的振荡成分不致显著地影响导弹的运动，只需着重地考察其中的基频谐波分量，因为它的频率较低，可能对弹体运动产生较大影响。由 (5-4-14) 式可知，基频振荡分量的振幅是

$$|f_1(t)| = \frac{4}{\pi} \sin\left[(1+f_0)\frac{\pi}{2}\right] \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\frac{\tau}{T}\right)}{\pi \frac{\tau}{T}} \quad (5-4-15)$$

此基频分量的振幅同两个因素有关：一是周期平均值  $f_0$ ，二是舵控力脉冲波形  $f(t)$  的斜边相对宽度  $\tau/T$ 。

周期平均值  $f_0$  的影响，表现于因子  $\sin\left[(1+f_0)\frac{\pi}{2}\right]$ 。当  $f_0 = \pm 1$  时， $\sin\left[(1+f_0)\frac{\pi}{2}\right] = 0$ ，于是这个基频振荡分量趋于消失。事实上，这时的指令信号整个地成为连续的阶跃函数，已不具有振荡性。但当  $f_0 = 0$  时，则  $\sin\left[(1+f_0)\frac{\pi}{2}\right] = 1$ 。这时，振荡的基频分量的振幅将达极大值，为

$$|f_1(t)| = \frac{4}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\frac{\tau}{T}\right)}{\pi \frac{\tau}{T}} \quad (5-4-16)$$

舵控力脉冲波形  $f(t)$  的斜边参量  $\frac{\tau}{T}$  的影响一般很小，这是由于，在正确选择参数的情况下，总是使  $\pi \frac{\tau}{T} \ll 1$ 。于是，例如 (5-4-16) 式，往往可化成



$$|f_1(t)| = \frac{4}{\pi} \frac{\pi \frac{\tau}{T} - \frac{1}{3!} \left( \pi \frac{\tau}{T} \right)^3 + \dots}{\pi \frac{\tau}{T}}$$

$$\approx \frac{4}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{3!} \left( \pi \frac{\tau}{T} \right)^2 \right] \approx \frac{4}{\pi}$$

由上式可知，斜边时间  $\tau$  的存在，使得脉冲调宽的舵控力波形  $f(t)$  中的振荡分量的振幅有所减弱。这种情况粗看起来似乎是有利的，但实际上并非如此。这是因为，斜边时间  $\tau$  的存在，在一定条件下，将使得舵机及导弹弹体不能对指令系数  $K$  的微小变化做出精确的鉴别和响应。这种情况可以参见图 5-57。图中表明，在  $0 < T_1 < \tau$  (或  $0 < T - T_1 < \tau$ ) 的情况下，舵控力波形  $f(t)$  在一部分区间上将是不完整的；于是，它的周期平均值  $f_0$  将不能精确地代表指令系数  $K$ 。若是  $\tau$  很小，那么这种现象对于导弹的操纵性能还不会造成太大的影响。这是因为，这时的指令系数  $K$  接近于  $\pm 1$ ，导弹正处于大机动状态，要求导弹对于指令系数的微小变化做出精确的响应，并没有太大的实际意义。但是，如果斜边时间  $\tau$  相对于脉冲重复周期  $T$  而言已相当大（例如  $\tau \sim \frac{T}{4}$ ），那么在小指令 ( $|K| \ll 1$ ) 的情况下，导弹也不能精确地响应指令的微小变化，这时导弹的制导精度就会受到严重的影响。所以在实践中，总是力求使斜边时间  $\tau$  尽量地小。

在斜边时间  $\pi \frac{\tau}{T} \ll 1$  的情况下，可以近似认为  $\tau$  的存在对舵控力的周期平均值及基频振荡分量都无影响，可认为  $\tau \approx 0$ ，或  $f(t) = u(t)$ ，即认为舵控力同指令信号的波形是一致的。

**例题 5-2** 设弹体环节的传递函数

为  $W_k^a = \frac{k_k^a}{T_a^2 p^2 + 2\zeta T_a p + 1}$ 。其中， $T_a = 0.075$  秒， $\zeta = 0.1$ ， $k_k^a = 0.45$ 。指令信号为脉冲调宽的，其脉冲重复周期为  $T = 0.1$  秒。试分析此弹体在零指令情况下的稳态响应。

**解** 第一步，先求出弹体环节的频率特性  $W_k^a(j\omega)$

$$W_k^a(j\omega) = \frac{k_k^a}{1 - T_a^2 \omega^2 + j 2\zeta T_a \omega} = |W_k^a(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

其中

$$|W_k^a(j\omega)| = \frac{k_k^a}{\sqrt{(1 - T_a^2 \omega^2)^2 + (2\zeta T_a \omega)^2}} = \frac{0.45}{\sqrt{[1 - (0.075 \omega)^2]^2 + (0.015 \omega)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{-2\zeta T_a \omega}{1 - (T_a \omega)^2} = \tan^{-1} \frac{-0.015 \omega}{1 - (0.075 \omega)^2}$$

第二步，求输入信号的基本振荡频率  $\omega_0$ 。由于已知  $T = 0.1$  秒，故信号脉冲重复频率是

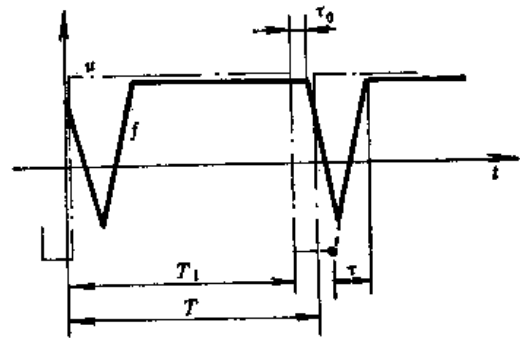


图 5-57 斜边时间  $\tau$  对于指令鉴别精确性的影响

$$f_s = \frac{1}{T} = 10 \text{ 赫芝}$$

故

$$\omega_s = 2\pi f_s = 20\pi \text{ 弧度/秒}$$

第三步, 求出弹体环节在  $\omega = \omega_s$  条件下的稳态响应的相对振幅及相位

$$|W(j\omega)|_{\omega=\omega_s} = \frac{0.45}{\sqrt{[1 - (0.075 \times 20\pi)^2]^2 + (0.015 \times 20\pi)^2}} = 0.0212$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega)|_{\omega=\omega_s} &= \tan^{-1} \frac{-0.015 \times 20\pi}{1 - (0.075 \times 20\pi)^2} = \tan^{-1} \frac{-0.9425}{-21.2066} \\ &= -177.46^\circ = -3.097 \text{ 弧度} \end{aligned}$$

第四步, 求出在零指令情况下指令信号 (或无量纲舵控力) 中基频振荡分量。

零指令即  $K_0 = 0$ , 于是, 由 (5-4-14) 式可有

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \omega_s t\right] = \frac{4}{\pi} \sin(\omega_s t)$$

第五步, 求弹体环节对指令信号中的基频分量的稳态响应, 以  $\alpha_1(t)$  表之。

$$|\alpha_1|_{\max} = |f_1|_{\max} \cdot |W(j\omega)|_{\omega=\omega_s} = \frac{4}{\pi} \times 0.0212 = 0.027 \text{ 弧度} = 1.55^\circ$$

故

$$\alpha_1(t) = 0.027 \sin(20\pi t - 3.097) \text{ (弧度)}$$

对于频率更高的谐波成分不必再分析了。

### § 5-4-2 同脉冲调宽控制方式有关的总体设计问题

在采用脉冲调宽控制方式的情况下, 在总体设计工作中要着重考虑控制信号的脉冲重复周期  $T$  (或脉冲重复周率  $f_s = \frac{1}{T}$ ) 应如何确定的问题。

这里再强调一下, 脉冲重复周率  $f_s$  是指每秒钟内脉冲重复出现的次数, 单位为赫芝。然而, 在计算中常常用到脉冲的基本振荡频率  $\omega_s$ , 则是指信号的基频振荡成分的 (角) 频率, 其单位为 (弧度/秒), 并有

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad (5-4-17)$$

这两个参量有密切关系, 但其量值是不同的, 含意也是不同的。

在设计工作中, 一般说来, 应该把脉冲重复周率  $f_s$  尽量取得高一些, 但是, 实际上, 受到许多技术因素的限制。

信号的脉冲重复周率  $f_s$  应该尽可能高一些, 其主要理由在于, 在采用脉冲调宽式信号来控制导弹时, 只有脉冲重复周率  $f_s$  足够高时, 才能使导弹精确地跟随上目标的机动运动。制导过程本来应该是一个连续的过程, 目标的运动轨迹、运动速度及加速度都是随时间连续变化的, 瞄准线也应是连续地跟随着目标而转动; 因此, 为了把导弹始终保持在瞄准线上也必须施加一个连续变化的控制指令。然而, 对于脉冲调宽式的控制方式来说, 在每个脉冲周期的时间间隔  $T$  之内, 指令系数只能取为某一个定值。换言之, 虽然射手是在连续地瞄准着目标并连续地测量着导弹相对于瞄准线的运动偏差; 但是, 事实上, 导弹的制导系统只不过是每个指令脉冲周期的开始时刻对这种测量进行一次“抽样”, 并根据此抽样算出本周期之内的指令系数, 来对本周期之内的脉冲宽度进行调制的。所以, 这

是一种离散的过程。显然，只有在脉冲重复周率足够高，亦即每秒抽样的次数足够多的条件下，这种离散的制导过程才能取得同连续的制导过程一致的效果。

信号脉冲的重复周率，或者说，每秒钟之内的抽样次数  $f_s$  应该有多高才合适呢？这决定于输入给制导系统的信息的频谱。输入信号的连续频谱愈宽，每秒抽样的次数就应愈多，才能使输出的离散信号能够精确地复现输入的连续信息。输入信号的频谱同抽样的每秒次数之间的关系问题是由“抽样定理”来解决的。

抽样定理的意思是说<sup>●</sup>：如果有一个连续信号  $x(t)$ ，其频谱中不包含任何大于  $\omega_1$  (弧度/秒) 的频率分量。那么，若以周期  $T$  对  $x(t)$  进行抽样而获得离散信号  $x^*(t)$ ；并且

$$\frac{1}{T} > \frac{\omega_1}{\pi},$$

或者有

$$\omega_s > 2\omega_1$$

其中  $\omega_s$ ——抽样的“频率”， $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  (弧度/秒)；则根据抽样所得的离散信号  $x^*(t)$ ，可以完满地复现连续信号  $x(t)$ 。

因此，如果已根据第四章的运动学分析获得了理想控制信息  $a_{N,K}$  的频谱的有效带宽  $\omega_a$ ，那么就应使抽样频率  $\omega_s > 2\omega_a$ 。或者说，应使脉冲重复周率  $f_s > \frac{\omega_a}{\pi}$ 。这样才能保证离散的制导过程能够完满地复现连续的制导过程。

脉冲调宽信号的脉冲重复周率  $f_s$  应尽可能高一些的另一个理由是：较高的脉冲重复周率有利于减小系统的滞后时间。事实上，使制导过程离散化，必将带来系统响应的滞后。为了说明这一事实，可参看图 5-58。如果理想的控制信息是一个正弦函数，那么在通过按脉冲调宽方式工作的制导系统之后，这个信息就好像转化为一个阶梯变化的信号，阶梯的宽度就是抽样周期  $T$  (或脉冲重复周期)。若取一个连续曲线，通过各阶梯的中点 (图 5-58 中的虚线)，来逼近该阶梯状曲线，即可看出，这个系统大约具有  $\frac{T}{2}$  的滞后时间。也就是说，采用脉冲调宽的制导系统后，无形中在回路中增加了一个滞后环节。

在 § 5-2 中已指出，滞后环节对于系统闭环的稳定性具有不利的影响。此外，滞后时间对于系统的动态误差显然也有不好的影响。为了尽可能缩小这些影响，当然希望脉冲周期  $T$  愈小愈好，或者说，脉冲重复周率  $f_s$  愈高愈好。

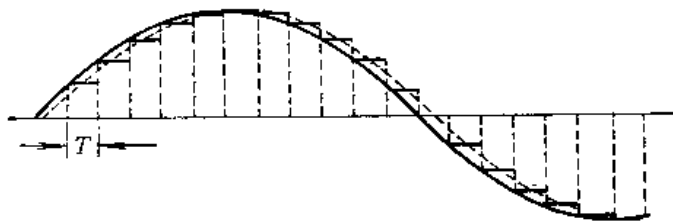


图 5-58 抽样周期同系统滞后时间的关系

脉冲重复周率应尽可能高一些的第三个理由是： $\omega_s$  必须远远大于弹体摆动的固有频率  $\omega_n$  才能在弹体的响应中有效地压制或滤除脉冲调宽信号中的振荡成分。这一问题通过 § 5-4-1 中的例题已可理解。一般认为，为了在弹体响应中有效地压制或滤除脉冲调宽信

● 关于抽样定理的证明，可以参考 [8] (其中第 485~486 页)。

号中的振荡成分，必须使脉冲频率  $\omega_p$  大于弹体摆动的固有频率  $\omega_n$  的 3~5 倍。

在确定弹体摆动的固有频率  $\omega_n$  时，是要考虑很多因素的（参见 §5-1-10）。这样，当  $\omega_n$  确定后， $\omega_p$  的下限值也就可以确定了。

提高脉冲重复周率的问题，还要考虑到若干实际的技术因素的限制。

第一个限制因素就是舵机本身的动作速度是有限的，因此，它的每秒动作次数不可能无限提高。

第二个可能的限制因素是弹体结构的刚度是有限的。可以看出，弹上的继电式舵机的动作乃是一个弹上结构振动源。如果这个振源的频率同弹体结构的某一个振型的固有频率相近，就有可能激起共振，其结果可能是破坏性的。在采用比例式舵机的情况下，弹体结构弯曲振动主振型的固有频率应该远远高于弹体摆动运动的频率，以避免结构振动同弹体摆动运动的耦合。为此，通常对于弹体结构的刚度应提出一定的要求。更有甚者，在采用继电式舵机的情况下，弹体结构的固有频率，不仅须高出弹体摆动的频率  $\omega_n$ ，而且应高出舵机的基本振荡频率  $\omega_s$ 。所以，对弹体结构的刚度特性将提出更高的要求。然而，弹体结构的刚度是不能无限提高的。因此，舵机的每秒动作周数  $f_s$ ，或者说，脉冲的基本振荡频率  $\omega_s = 2\pi f_s$ ，应该受到适当的限制。

## § 5-5 弹体滚转的反坦克导弹的动力学及设计问题

### § 5-5-1 引言

近年来，相当多的反坦克导弹都采用了弹体低速滚转的方案。在弹体滚转的情况下，有可能采用单一的控制通道及单一的舵机，同时对俯仰与偏航运动进行控制。这样一来，就使导弹系统的构造更加简化，成本降低，并使可靠性增加。另一方面，弹体以低速滚转，还有利于改善导弹在起飞段上的无控散布。近年来，不仅在反坦克导弹上，而且在某些小型的地空导弹和近程的地地弹道式导弹上，也有采用弹体低速滚转方案的。

然而，弹体滚转后，导弹的运动情况复杂了，如果搞得不好，会降低导弹的制导精度，甚至会使导弹失去飞行稳定性。因此，为了要设计一个弹体滚转的导弹，必须先把滚转对于导弹运动的影响情况搞清楚。

如果导弹的弹体有了滚转，那么导弹的俯仰运动就要同偏航运动发生“交连”（或称“耦合”）。就是说，导弹的俯仰运动会引起它的偏航运动。反过来偏航运动也会引起它的俯仰运动。

为什么弹体的滚转会引起俯仰运动和偏航运动之间的交连呢？主要有以下两方面原因：第一是陀螺效应，就是由于导弹在滚转中具有一定的角动量，就像一个陀螺，在受到某一个方向的力矩后，要在垂直的方向上产生进动运动；第二是所谓“马格努斯”效应。对于一个在空气中运动的滚转的飞行器，如果它进行着俯仰运动，那么必然还会受到一些偏航方向的空气动力和力矩的作用（反过来也类似）。

由于运动中有交连，所以，对于滚转的导弹，必须把它的俯仰运动和偏航运动放在一起来进行研究。

在实际情况中，凡是弹体滚转的反坦克导弹，都具有轴对称的空气动力外形及大体上

轴对称的质量分布。因此，以下的讨论也只限于针对这种轴对称的导弹。

### § 5-5-2 不滚转的导弹的俯仰与偏航运动的复合

在 § 5-1 中已建立了不滚转导弹的俯仰运动及偏航运动的线性化方程组 (5-1-15)~(5-1-18) 及 (5-1-50)~(5-1-53) 式，其表达式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta - \alpha - \Theta = 0 \quad (5-5-1) \\ \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + a_1 \frac{d\vartheta}{dt} + a_2 \alpha = -a_3 f_y(t) \quad (5-5-2) \\ a_4 \alpha - \frac{d\Theta}{dt} = \frac{g}{v} - a_5 f_y(t) \quad (5-5-3) \\ \frac{dy}{dt} = v\Theta \quad (5-5-4) \\ \psi - \beta - \Psi = 0 \quad (5-5-5) \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} + b_1 \frac{d\psi}{dt} + b_2 \beta = -b_3 f_x(t) \quad (5-5-6) \\ b_4 \beta - \frac{d\Psi}{dt} = -b_5 f_x(t) \quad (5-5-7) \\ \frac{dz}{dt} = -v\Psi \quad (5-5-8) \end{array} \right.$$

在导弹具有轴对称的空气动力外形及质量分布的情况下，动力系数  $a_1 \sim a_5$  同  $b_1 \sim b_6$  是逐对相等的。

在导弹不滚转的情况下，一般是在俯仰和偏航两个方向上分别按装两副舵机。因此，无量纲的舵控力  $f_y(t)$  同  $f_x(t)$  可能具有不同的变化规律，它们之间并无相关性。

在俯仰及偏航两个通道之间的指令（系数）具有任意变化规律的情况下，导弹的运动轨迹是一条空间曲线。为了对这样一种空间的运动情况建立一些直观的印象（见图 5-59）。

在图 5-59 中，于导弹飞行的前方，同  $o_1 x$  轴相垂直地做一个铅垂平面  $P$ 。 $o_1 x$  轴同此平面  $P$  相交于  $O_P$  点。此外， $o_1 y$  轴在  $P$  平面上的投影为  $O_P y_P$ ，负的  $o_1 z$  轴在  $P$  平面上的投影为  $O_P z_P$ 。设导弹重心  $o_1$  至  $P$  平面之距离  $\overline{o_1 O_P}$  为一个单位长度。把弹体纵轴 ( $o_1 x_1$  轴) 延长，与  $P$  平面相交于  $Q$  点。又把速度向量  $V$  ( $o_1 x_2$  轴) 延长，与  $P$  平面相交于

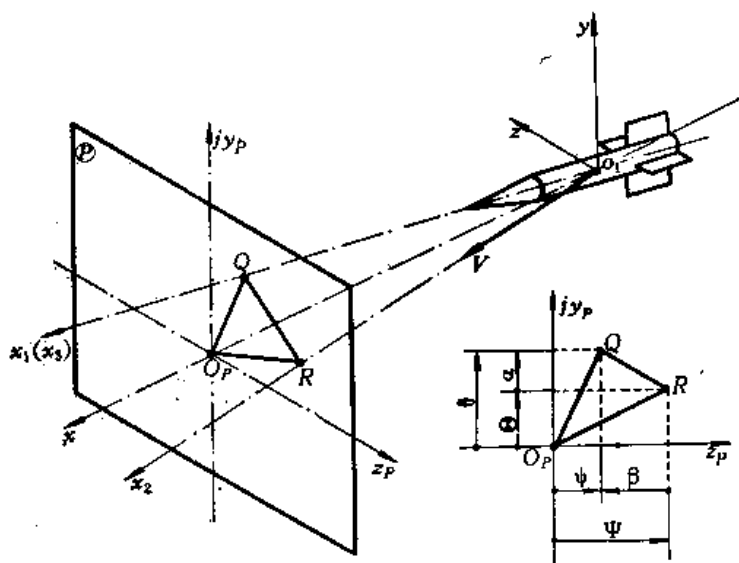


图 5-59 导弹在三维空间中运动

$R$  点。在小扰动的前提下， $\psi$ 、 $\vartheta$ 、 $\Psi$ 、 $\Theta$  及  $\beta$ 、 $\alpha$  都不大；这时，可用  $Q$  点及  $R$  点在  $P$  平面坐标系  $O_P y_P z_P$  上的投影来近似地代表这些角度（见图 5-59 右下角）。它们之中具

有下列的近似关系:

$$\begin{cases} \psi - \beta - \Psi = 0 \\ \delta - \alpha - \Theta = 0 \end{cases}$$

为了便于用解析法研究导弹在三维空间中的运动, 可以利用“复角”的概念把俯仰运动和偏航运动统一起来。注意, 弹体的姿态  $(\psi, \delta)$  可由矢量  $\overrightarrow{O_p Q}$  来代表, 弹道切线的方向  $(\Psi, \Theta)$  可由矢量  $\overrightarrow{O_p R}$  来代表, 弹体同迎面气流之间的相对角度  $(\beta, \alpha)$  可由矢量  $\overrightarrow{RQ}$  来代表。另一方面, 可以用复数来表示平面上的矢量, 并利用复数运算法则对这些矢量进行运算。所以可把  $O_p y_p$  轴视为“虚轴”, 虚轴上的长度单位是  $j = \sqrt{-1}$ ; 并把  $O_p z_p$  视为实轴, 其上的长度单位是实数 1。以如下定义三个复数来代表矢量  $\overrightarrow{O_p Q}$ 、 $\overrightarrow{O_p R}$  和  $\overrightarrow{RQ}$ , 即

$$\begin{cases} A = \psi + j\delta & (5-5-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \beta + j\alpha & (5-5-10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \Psi + j\Theta & (5-5-11) \end{cases}$$

并把  $A$ 、 $B$ 、 $C$  分别称为“复姿态角”、“复攻角”和“复方向角”。在  $A$ 、 $B$  及  $C$  的模量都不太大的情况下, 它们之间应有下面的近似关系

$$A - B - C = 0 \quad (5-5-12)$$

类似地, 可以定义一个“复舵控力”  $F_K$  及其无量纲值  $f$

$$\left. \begin{aligned} F_K &= F_{K_x} + jF_{K_y} \\ f &= f_x + jf_y \end{aligned} \right\} \quad (5-5-13)$$

于是将方程组 (5-5-1)~(5-5-3) 各乘以  $j$ , 再同方程组 (5-5-5)~(5-5-7) 逐对相加, 即可合并为一个方程组

$$\begin{cases} A - B - C = 0 & (5-5-14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + a_1 \frac{dA}{dt} + a_2 B = j \frac{g}{v} - a_3 f & (5-5-15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 B - \frac{dC}{dt} = -a_5 f & (5-5-16) \end{cases}$$

在采用比例式舵机的情况下, 或者在可以把继电器舵机等效地看做是一个比例式舵机的情况下, 用指令系数  $K$  来代替无量纲舵控力  $f$  的平均作用效果, 即可定义

$$f \triangleq -K \bullet \quad (5-5-17)$$

式中  $K$ ——复合的指令系数, 并定义为

$$K = K_x + jK_y \quad (5-5-18)$$

这里  $K_x$  及  $K_y$ ——俯仰及偏航的指令系数, 有

$$f_y \triangleq -K_y \quad \text{及} \quad f_x \triangleq -K_x$$

可将运动方程组 (5-5-15) 及 (5-5-16) 的右端中的输入量  $f$ , 用  $-K$  来代替。这样一来, 就便于将导弹的平飞运动和扰动控制运动分开了。

如果, 在 (5-5-14)~(5-5-16) 方程组中的输入量是  $j \frac{g}{v}$  及  $K = K_{x_0}$ , 那么所获得

● 符号全意为按定义相

的输出量就是导弹在直线平飞弹道上各角度参量的变化规律。

若取  $\Delta K = K - K_{\text{平飞}}$ ,  $\Delta A = A - A_{\text{平飞}}$ ……, 则由式 (5-5-14)~(5-5-16) 可以得出在直线平飞弹道附近的扰动控制运动方程。为了书写简便, 也可不写增量符号, 而得如下扰动控制运动方程组

$$\begin{cases} A - B - C = 0 & (5-5-19) \\ -\frac{d^2 A}{dt^2} + a_1 \frac{dA}{dt} + a_2 B = a_3 K & (5-5-20) \\ a_4 B - \frac{dC}{dt} = a_5 K & (5-5-21) \end{cases}$$

注意, 在这个扰动控制运动方程组中, 输入量是叠加在平飞指令  $K_{\text{平飞}}$  之上的扰动控制指令系数  $K$ , 输出量是  $A$ 、 $B$  及  $C$ 。它们都是复变量 (或矢量)。所以方程组 (5-5-19)~(5-5-21) 描述的是导弹的俯仰控制同偏航控制同时存在的空间运动。

### § 5-5-3 弹体滚转的导弹的陀螺效应及马格努斯效应

#### 一、对滚转导弹的运动的基本假定及简化

弹体滚转的导弹是在三维空间中运动的。这个运动是非常复杂的, 为了弄清这个运动的主要物理图景, 必须做出一些假定, 如下:

(一) 导弹对于其纵轴是对称的——首先, 质量分布是轴对称的, 弹体的惯性主轴与其几何中心轴重合, 即  $J_y = J_z$ , 并且对于通过重心的任何横轴之转动惯量都是相等的; 其次, 空气动力特征也是轴对称的, 即  $Y^a = -Z^a$ ,  $M_y^a = M_z^a$ , ……等。如果把弹体绕自身纵轴旋转任何一个角度后, 其空气动力特性仍然不变。

(二) 根据冻结系数假定, 认为在某一时刻附近, 导弹的速度  $v$  是常数, 其他如质量、重心位置、转动惯量、空气动力特征等也都不变 (或者说各动力系数保持为常数)。

(三) 认为在某一时刻附近, 导弹围绕自身纵轴  $o_1 x_1$  的滚转角速度  $\omega_x$  是不变的。

(四) 在导弹受到扰动之后,  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\Theta$ 、 $\Psi$  等参量的变化是不大的 (小扰动假定), 从而可以将方程线性化。

(五) 为了克服重力的影响, 对于弹上的舵机能够施以平飞的程序指令  $K_{\text{平飞}}$ , 使导弹的运动只限于在直线平飞弹道附近进行。

(六) 略去弹上活动零件的哥氏惯性力。

以上这些假定, 是为了用解析法分析滚转导弹的运动而做出的。实际情况当然更复杂, 为了精确地计算滚转导弹的运动, 应该考虑到全部非线性和变系数的因素, 并在电子计算机上来求解完整的运动方程。然而, 对于总体设计来说, 只有对滚转导弹的运动, 建立清楚的物理概念, 才能理解各种因素对导弹运动的影响, 才能抓住主要的因素, 因此, 进行简化的解析分析是必要的。

为了使分析简化, 可以在前面对于不滚转的导弹运动的研究基础之上, 来进一步考虑弹体滚转的影响。为此, 可以设想一个无质量的刚性“外壳”包容着滚转的弹体, 此“外壳”是不滚转的; 并且像一个不滚转的导弹那样受到各种外力的作用而进行着俯仰和偏航的运动。此外, 壳固联于准弹体坐标系  $o_1 x_3 y_3 z_3$ , 然后再设想实际的弹体就在这个外壳之中绕  $o_1 x_1$  轴滚转, 好象一个“转子”一样。由于这个“转子”的滚转, 必须在“外壳”上

增加一些由于陀螺效应而造成的惯性力矩，以及由于马格努斯效应造成的空气动力和力矩。这样就可以使问题的处理大为简单。

## 二、滚转导弹的陀螺效应

理论力学中指出，若有一个陀螺绕其自身对称轴  $ox$  以相当高的角速度  $\omega_x$  旋转，则其角动量为  $J_x \omega_x$ 。当受到外加力矩  $M_y$  的作用时，如果略而不计同赤道转动惯量  $J_y$  有关的角动量变化，则这个陀螺将产生进动角速度  $\omega_z$ 。

$$\omega_z = \frac{M_y}{J_x \omega_x} \quad (5-5-22)$$

或者写成

$$J_x \omega_x \omega_z = M_y \quad (5-5-23)$$

在  $\omega_x$ 、 $M_y$  及  $\omega_z$  三个矢量之间的方向关系遵循右手定则。

但是，对于一个滚转的导弹来说，它的滚转角速度  $\omega_x$  往往是相当低的。对比之下，当受到一个外加力矩  $M_y$  的作用时，由于弹体的赤道转动惯量  $J_y$  而引起的角动量变化不能略而不计。于是，运动方程应是

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} + J_x \omega_x \omega_z = M_y \quad (5-5-24)$$

假如外力矩是  $M_z$ ，结果将相似，但考虑到坐标系正负方向的规定，则应写成下式

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} - J_x \omega_x \omega_y = M_z \quad (5-5-25)$$

方程式 (5-5-24) 及 (5-5-25) 中左端第二项即代表导弹滚转所带来的陀螺效应。

## 三、滚转导弹的马格努斯效应

古典的马格努斯效应，在一百来年前就被发现了。然而，人们对于这一问题的研究，还是相当不完善的。对于这一问题的详尽研讨，是空气动力学专著的任务<sup>[11]</sup>。在这里，只能给出简单的提示。

古典的马格努斯效应是在研究旋转炮弹运动时被发现的。当一个自旋炮弹以攻角  $\alpha$  运动时，气流将以  $v \sin \alpha$  的速度分量横绕炮弹柱面而流动。由于横向绕流同旋转着的附面层之间的交互作用，炮弹将受到一个侧向力的作用。这个力就叫做“马格努斯力”。这个力相对于炮弹重心所产生的力矩就叫做“马格努斯力矩”。对于右旋炮弹来说，在攻角  $\alpha > 0$  时，马格努斯力的方向是指向其飞行方向的左侧。

对于火箭和导弹这一类带有弹翼的飞行体来说，当它们在飞行中有旋转时，也会产生一个垂直于攻角平面的侧向力，通常把这个力及相应的力矩也叫做马格努斯力及力矩。但是，由弹翼所引起的马格努斯力和力矩，往往远远超过由单独弹身所引起的古典意义下的马格努斯力和力矩，甚至可将古典的马格努斯力和力矩略而不计。因此，近代所说的马格努斯效应，同古典意义下的马格努斯效应其实是两回事。

在近代的马格努斯效应之中，对于导弹运动的影响比较大的不是马格努斯力，而是马格努斯力矩。形成这种马格努斯力矩的物理因素是十分复杂的。下面只对其中两个最重要的因素略加提示。

引起马格努斯力矩的第一个重要因素是平直弹翼的差动偏斜安装角  $\delta$ 。在设计滚转的导弹时，人们为了使导弹在飞行中能维持一定的转速，常常使弹翼具有适当的差动偏斜安装



角  $\delta$  (或简称“差偏角”)。差偏角  $\delta$  的大小决定于预期的导弹滚转角速度  $\omega_x$  (参阅 § 6-5)。

在导弹具有平板弹翼的情况下, 可按下式近似确定弹翼的差偏安装角  $\delta$

$$\delta \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{l^3 - D^3}{l(l^2 - D^2)} \bar{\omega}_x \quad (5-5-26)$$

式中  $\bar{\omega}_x$ ——无量纲的折算转速

$$\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{2v}$$

$l$ ——弹翼 (装在弹体上的) 全翼展。

显然, 由于弹翼具有差偏角  $\delta$ , 所以, 若  $\alpha = 0$ , 则在左、右两片弹翼上将分别产生一个向上和向下的空气动力升力, 而在上、下两片弹翼上将分别产生一个向右和向左的空气动力升力。它们对于弹轴将产生一个滚转力矩, 以克服滚转阻尼力矩, 使导弹维持一定的稳态转速。

然而, 若  $\alpha \neq 0$ , 则由于弹翼具有差偏角  $\delta$ , 导弹还将受到一个附加的偏航力矩的作用。关于这个偏航力矩的成因, 可简要说明如下 (参看图 5-60)。假定在某个瞬间, 四片弹翼的位置恰好是上、下、左、右的十字形, 那么由于弹体攻角  $\alpha$  及弹翼差偏角  $\delta$  同时存在, 在左右两片弹翼 1 及 3 上将产生空气动力法向力  $N_1$  及  $N_3$  (其大小及方向都是不一样的)。把这两个力投影在准弹体坐标系的  $O_1x_3z_3$  平面上, 就是  $N_1 \sin \delta$  及  $N_3 \sin \delta$ , 显然, 它们对于导弹的重心将造成一个偏航力矩。

虽然这个偏航力矩并不是直接由导弹的滚转角速度  $\omega_x$  引起的, 而是由弹翼差偏角  $\delta$  引起的, 但由于  $\omega_x$  的稳态值直接决定于弹翼差偏角  $\delta$ , 所以在这个

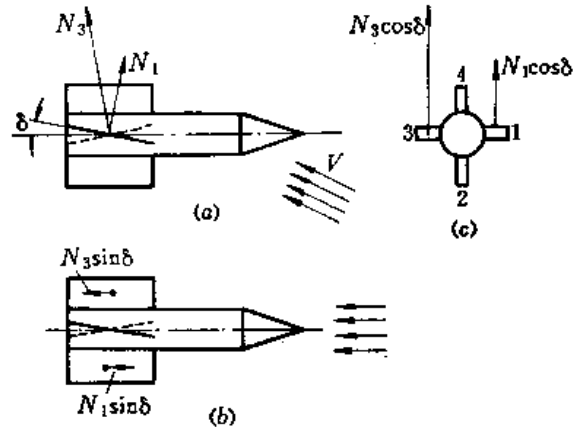


图5-60 弹翼差偏角  $\delta$  引起马格努斯力矩  
(a) 弹体侧视图, (b) 弹体顶视图, (c) 弹体后视图。

偏航力矩同导弹滚转角速度  $\omega_x$  之间可以间接地建立起一定的函数关系, 也可把这个力矩泛称为马格努斯力矩。只是必须注意, 这个力矩成分只是由攻角  $\alpha$  (或侧滑角  $\beta$  也类似) 和弹翼差偏角  $\delta$  所直接引起, 同导弹的实际瞬时转速无关, 即使  $\omega_x = 0$ , 这个力矩仍然存在。故, 可将此力矩表为  $M_y(\alpha, \delta)|_{\omega_x=0}$ , 其相应的力矩系数可表为  $m_y(\alpha, \delta)|_{\omega_x=0} =$

$$\frac{M_y(\alpha, \delta)}{\frac{1}{2} \rho v^2 S L}, \text{ 其相应的力矩系数导数 } m_y^{\alpha, \delta}|_{\omega_x=0} = \frac{\partial m_y(\alpha, \delta)}{\partial \alpha \partial \delta} \text{ 可如下近似计算}$$

$$m_y^{\alpha, \delta}|_{\omega_x=0} = -\frac{1}{6} k_f \frac{\eta + 2}{\eta + 1} \left( \frac{2C_y^\alpha}{\pi \lambda} - 1 \right) C_y^\alpha \quad (5-5-27)$$

式中  $\eta$ ——弹翼根梢比;

$\lambda$ ——弹翼展弦比;

$k_f$ ——修正系数  $k_f = 0.45 + 0.03\lambda$ ;

$C_y^\alpha$ ——一对弹翼的举力系数导数 (考虑到弹身干扰之后的)。

引起马格努斯力矩的第二个重要因素是平直弹翼随弹体的滚转。同上述第一个因素相

反, 现在只考虑弹翼的滚转, 而不管是否具有差偏角  $\delta$ 。在滚转过程中, 弹翼上任何一个纵向剖面都受到一个同滚转切向相反的垂直于弹翼表面的气流作用 (图 5-61), 这个切向

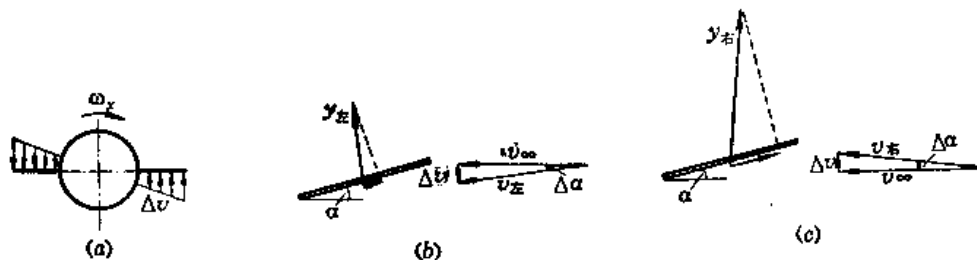


图5-61 弹翼滚转引起马格努斯力矩  
(a) 后视图; (b) 左翼片受力; (c) 右翼片受力。

流动的气流的速度是

$$\Delta v = z \cdot \omega_x$$

其中  $z$  ——由弹轴至弹翼上某个纵向剖面的距离。

如果假定在某个瞬间, 弹翼的位置恰好是上、下、左、右的十字形; 那么, 这个切向气流同迎面来流合成为一个具有附加攻角  $\Delta\alpha$  的气流

$$\Delta\alpha = \Delta v / v_\infty$$

在弹翼旋转过程中, 由于此附加攻角  $\Delta\alpha$  的出现, 在任何弹翼剖面上将产生附加举力  $\Delta Y$  和附加阻力  $\Delta X$ 。在左、右两片弹翼上,  $\Delta\alpha$  及  $\Delta Y$  的方向是恰好相反的。这同弹翼具有差偏角  $\delta$  的情况相类似。

在弹体攻角  $\alpha = 0$  的情况下, 这些附加的空气动力的主要效果是产生一个相对于弹轴的滚转阻尼力矩, 力图减小弹体的滚转角速度。但是, 在弹体攻角  $\alpha \neq 0$  的情况下, 上述附加攻角  $\Delta\alpha$  将同弹体的攻角  $\alpha$  相合成, 在一边翼面上是相加, 在另一边则是相减。于是, 左、右两片弹翼上各个翼剖面处的实际攻角的分布情况是不同的。这时, 把左、右两片弹翼上的空气动力投影到  $o_1x_3z_3$  平面上之后, 也将是左右不对称的, 它们相对于弹体的重心将产生一个偏航力矩。这个偏航力矩直接同弹体攻角  $\alpha$  及实际转速  $\omega_x$  有关, 而同弹翼的差偏角  $\delta$  无关, 所以它也是马格努斯力矩中的一个组成成分。事实上, 它是很重要的一个成分, 可记为  $M_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}$ , 相应的力矩系数为  $m_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0} = \frac{M_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}}{\frac{1}{2}\rho v^2 SL}$ , 其偏

导数为

$$m_{y, \bar{\omega}_x}|_{\delta=0} = \left( \frac{\partial m_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}}{\partial \alpha \partial \bar{\omega}_x} \right)_{\bar{\omega}_x=0, \alpha=0}$$

在亚音速情况下, 这项马格努斯力矩系数的导数可如下计算

$$m_{y, \bar{\omega}_x}|_{\delta=0} = \frac{\eta + 3}{6(\eta + 1)} \left[ C_x + k_f C_y^\alpha \left( \frac{C_y^\alpha}{\pi \lambda} - 1 \right) \right] \quad (5-5-28)$$

式中各符号意义同 (5-5-27) 式。

在马格努斯力矩之中, 以上所述两个因素所引起的成分通常是主要的, 还有一些其他的次要因素, 在这里不再进行讨论了。

所以, 在弹体同时具有弹翼差偏角  $\delta$  及滚转角速度  $\omega_x$  的情况下, 弹体的马格努斯力矩主要就是上述两部分之和, 即

$$M_y(\alpha, \delta, \bar{\omega}_x) = M_y(\alpha, \delta)|_{\bar{\omega}_x=0} + M_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}$$

或表为马格努斯力矩系数及其导数

$$m_y(\alpha, \delta, \bar{\omega}_x) = \frac{M_y(\alpha, \delta, \omega_x)}{\frac{1}{2}\rho v^2 SL} = m_y(\alpha, \delta)|_{\bar{\omega}_x=0} + m_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}$$

$$m_y^\alpha(\delta, \bar{\omega}_x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [m_y(\alpha, \delta, \bar{\omega}_x)] = m_y^{\alpha, \delta}|_{\bar{\omega}_x=0} \cdot \delta + m_y^{\alpha, \bar{\omega}_x}|_{\delta=0} \cdot \bar{\omega}_x \quad (5-5-29)$$

在弹体以稳态转速飞行的情况下，引用式(5-5-26)还可得

$$m_y^{\alpha, \bar{\omega}_x} = \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}_x} [m_y^\alpha(\delta, \bar{\omega}_x)] = m_y^{\alpha, \delta}|_{\bar{\omega}_x=0} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{I^2 - D^2}{I(I^2 - D^2)} \right] + m_y^{\alpha, \bar{\omega}_x}|_{\delta=0} \quad (5-5-30)$$

总之，具有攻角 $\alpha$ 的滚转弹体将产生绕 $o_1y_3$ 轴的马格努斯力矩 $M_y(\alpha, \delta, \bar{\omega}_x)$ 。在弹体右旋( $\omega_x > 0$ )且 $\alpha > 0$ 的情况下，应有 $M_y(\alpha, \delta, \bar{\omega}_x) > 0$ ，即此时的马格努斯力矩的方向乃是趋于使弹体向左偏航。

若滚转弹体具有侧滑角 $\beta$ ，则将产生绕 $o_1z_3$ 轴的马格努斯力矩 $M_z(\beta, \delta, \bar{\omega}_x)$ 。仍可利用式(5-5-27)~(5-5-28)来计算其大小。但考虑到坐标系方向的规定，应将结果取负值。就是说，在弹体右旋且 $\beta > 0$ 的情况下，将有 $M_z(\beta, \delta, \bar{\omega}_x) < 0$ ，即此时的马格努斯力矩的方向趋于使弹体低头。

#### § 5-5-4 滚转导弹的运动方程

在上一节的假定及简化之下，考虑到弹体滚转影响之后，导弹弹体的运动方程应该是

$$\begin{cases} mv \frac{d\Theta}{dt} = \Sigma F_y \\ -mv \frac{d\Psi}{dt} = \Sigma F_z \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + J_z \omega_x \omega_z = \Sigma M_y \\ J_x \frac{d\omega_x}{dt} - J_z \omega_x \omega_y = \Sigma M_x \end{cases}$$

上面这个方程组中，前两个方程的左边是导弹的动量沿着弹道坐标系 $o_1y_2$ 及 $o_1z_2$ 轴的投影的变化率，而右边是诸外力（应包含马格努斯力及重力）在 $o_1y_2$ 轴上的投影之和。后两个方程的左边是导弹的动量矩沿准弹体坐标系 $o_1y_3$ 及 $o_1z_3$ 轴的投影的变化率（已考虑陀螺效应），而右边是诸外力矩（包括马格努斯力矩）在 $o_1y_3$ 及 $o_1z_3$ 轴上的投影之和。

具体地考虑诸力及诸力矩的组成，并在直线平飞弹道附近对方程进行线性化，即可得到下列的运动方程组：

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{Y^\alpha}{mv} \cdot \alpha + \frac{F}{mv} \cdot \alpha + \frac{Y^\beta}{mv} \beta + \frac{F_{K,y}}{mv} - \frac{g}{v} \\ -\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{Z^\beta}{mv} \beta - \frac{F}{mv} \cdot \beta + \frac{Z^\alpha}{mv} \cdot \alpha - \frac{F_{K,z}}{mv} \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} - \frac{J_z}{J_x} \omega_x \cdot \frac{d\psi}{dt} &= \frac{M_z^\alpha}{J_x} \cdot \alpha + \frac{M_z^{\alpha z}}{J_x} \cdot \frac{d\delta}{dt} + \frac{M_z^\beta}{J_x} \cdot \beta + \frac{-L_K}{J_x} F_{K,y} \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{J_x}{J_y} \omega_x \cdot \frac{d\delta}{dt} &= \frac{M_y^\beta}{J_y} \cdot \beta + \frac{M_y^{\alpha y}}{J_y} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{M_y^\alpha}{J_y} \cdot \alpha + \frac{-L_K}{J_y} F_{K,z} \end{aligned}$$

其中  $Y^\alpha = \frac{\partial Y}{\partial \alpha}$ ,  $Y^\beta = \frac{\partial Y}{\partial \beta}$ ,  $Z^\alpha = \frac{\partial Z}{\partial \alpha}$ ,  $Z^\beta = \frac{\partial Z}{\partial \beta}$ 。

以前定义的动力系数  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_4$  及  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_4$  仍可沿用；并且注意到，在轴对称的情况下  $a_1 = b_1$ ,  $\dots\dots a_4 = b_4$ 。此外，再定义几个陀螺效应和马格努斯效应有关动力系数如下：

$$a_6 = \frac{J_x}{J_z} \omega_x, \quad b_6 = \frac{J_x}{J_y} \omega_x,$$

$$a_7 = \frac{-M_z^g}{J_x} = \frac{-\rho v^2 S L m_z^g}{2J_x}, \quad b_7 = \frac{M_y^g}{J_y} = \frac{\rho v^2 S L m_y^g}{2J_y},$$

$$a_8 = \frac{-Y^\beta}{mv} = \frac{-\rho v S C_y^\beta}{2m}, \quad b_8 = \frac{-Z^\alpha}{mv} = \frac{-\rho v S C_z^\alpha}{2m}$$

并且由于导弹是轴对称的，故有

$$a_6 = b_6, \quad a_7 = b_7, \quad a_8 = b_8.$$

其中的系数  $a_6$  显然是正的。对于一般常见的压心位于重心后方的右旋滚转导弹来说，系数  $a_7$  及  $a_8$  也是正的。

于是，上列的运动方程组可改写成

$$\begin{cases} \frac{d^2 \delta}{dt^2} + a_1 \frac{d\delta}{dt} + a_2 \alpha - a_6 \frac{d\psi}{dt} + a_7 \beta = -\frac{L_K}{J_z} F_{K,y} \end{cases} \quad (5-5-31)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi}{dt^2} + a_1 \frac{d\psi}{dt} + a_2 \beta + a_6 \frac{d\delta}{dt} - a_7 \alpha = -\frac{L_K}{J_y} F_{K,x} \end{cases} \quad (5-5-32)$$

$$\begin{cases} -\frac{d\Theta}{dt} + a_4 \alpha - a_8 \beta = -\frac{F_{K,y}}{mv} + \frac{g}{v} \end{cases} \quad (5-5-33)$$

$$\begin{cases} -\frac{d\Psi}{dt} + a_4 \beta + a_8 \alpha = -\frac{F_{K,x}}{mv} \end{cases} \quad (5-5-34)$$

在这个方程组的右端，故意不引入  $a_3$  及  $a_5$ ，而保留着  $F_{K,y}$  及  $F_{K,x}$ 。这是由于，在导弹滚转的情况下，舵控力在准弹体坐标系的  $o_1 y_3$  及  $o_1 z_3$  轴上的投影  $F_{K,y}$  及  $F_{K,x}$  的变化规律比较复杂，将在 § 5-5-6 中对它进行专门的分析，然后才好对它进行无量纲化。为使方程组封闭，还应补充两个几何关系方程，即

$$\begin{cases} \delta - \alpha - \Theta = 0 \end{cases} \quad (5-5-35)$$

$$\begin{cases} \psi - \beta - \Psi = 0 \end{cases} \quad (5-5-36)$$

上列方程组中含有  $a_6$ 、 $a_7$  及  $a_8$  的诸项称为交连项，交连项的存在使得我们不可能把俯仰运动和偏航运动分开来。于是，这样一个方程组等价于一个六阶的微分方程；或者，也可以化成六个一阶的微分方程。

为了便于用解析法解出上列方程组，可再次利用复角及复合舵控力的概念。先用虚数单位  $j = \sqrt{-1}$  去乘同俯仰运动有关的各式 (5-5-31)、(5-5-33) 及 (5-5-35)，然后再把它们一一地同偏航运动的各方程相加。利用前面对于复角及复合控制力的定义式 (5-5-11)~(5-5-14)，可把上列方程组改写成下面的简缩形式：

$$\begin{cases} A - B - C = 0, \end{cases} \quad (5-5-37)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + (a_1 - ja_6) \frac{dA}{dt} + (a_2 + ja_7) B = -\frac{L_K}{J_z} F_{K,y} \end{cases} \quad (5-5-38)$$

$$\begin{cases} -\frac{dC}{dt} + (a_4 - ja_8) B = -\frac{F_{K,y}}{mv} + j \frac{g}{v} \end{cases} \quad (5-5-39)$$

这个描述滚转导弹的空间运动的方程组，同前面用来描述不滚转导弹的运动方程组(5-5-16)~(5-5-18)具有同样的形式，只是考虑到交连现象，各系数都是复数。

在这个方程组中，若使舵控力  $F_K$  按某个规律变化，应能使导弹的弹道基本上是直线平飞；这样的舵控力变化规律就是实现平飞所需的舵控力  $F_{K, \text{平飞}}(t)$ 。相应的  $A$ 、 $B$  及  $C$  就是  $A_{\text{平飞}}$ 、 $B_{\text{平飞}}$  及  $C_{\text{平飞}}$ 。即

$$\begin{cases} A_{\text{平飞}} - B_{\text{平飞}} - C_{\text{平飞}} = 0 & (5-5-40) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_{\text{平飞}}}{dt^2} + (a_1 - ja_6) \frac{dA_{\text{平飞}}}{dt} + (a_2 + ja_7) B_{\text{平飞}} = -\frac{L_K}{J_x} F_{K, \text{平飞}} & (5-5-41) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{dC_{\text{平飞}}}{dt} + (a_4 - ja_8) B_{\text{平飞}} = -\frac{F_{K, \text{平飞}}}{mv} + j \frac{g}{v} & (5-5-42) \end{cases}$$

应注意，在弹体滚转的情况下，由于俯仰与偏航运动的交连，导弹的基准弹道不可能是绝对的直线平飞弹道，只能获得基本上直线平飞的弹道。特别是在采用继电器式舵机的情况下，弹道曲线将是相当复杂的三维空间曲线。

但可暂且不去注意这些复杂的细节，而简单地假定在平飞舵控力及重力的综合作用之下，导弹进行着“理想的”直线平飞运动。这时，假若导弹受到某种短暂的干扰，使运动偏离了直线平飞的状态。那么，在外界干扰停止之后，导弹即将在直线平飞状态附近进行自由运动。它的运动方程仍如(5-5-37)~(5-5-39)，只是应以  $F_{K, \text{平飞}}$  代替原来的  $F_K$ 。即

$$\begin{cases} A - B - C = 0 & (5-5-43) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + (a_1 - ja_6) \frac{dA}{dt} + (a_2 + ja_7) B = -\frac{L_K}{J_x} F_{K, \text{平飞}} & (5-5-44) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{dC}{dt} + (a_4 - ja_8) B = -\frac{F_{K, \text{平飞}}}{mv} + j \frac{g}{v} & (5-5-45) \end{cases}$$

在这自由运动的过程中，导弹的运动参量同平飞状态中有所不同，其差别是

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= A - A_{\text{平飞}} \\ \Delta B &= B - B_{\text{平飞}} \\ \Delta C &= C - C_{\text{平飞}} \end{aligned} \right\} \quad (5-5-46)$$

从方程组(5-5-43)~(5-5-45)中减去平飞弹道方程组(5-5-40)~(5-5-42)，即得关于  $\Delta A$ 、 $\Delta B$  及  $\Delta C$  的增量方程组。但为了方便，通常略去增量符号，而得

$$\begin{cases} A - B - C = 0 & (5-5-47) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + (a_1 - ja_6) \frac{dA}{dt} + (a_2 + ja_7) B = 0 & (5-5-48) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{dC}{dt} + (a_4 - ja_8) B = 0 & (5-5-49) \end{cases}$$

这就是描述导弹在直线平飞弹道附近进行自由运动的(增量)方程组。

### § 5-5-5 滚转导弹的自由运动及动态稳定性

滚转导弹在沿基准弹道运动的过程中，若受到某种短暂的外界干扰，使导弹的运动偏离了原来的状态，在干扰去掉之后，若不另外施加任何扰动控制指令，那么导弹就将在基

准弹道附近进行自由运动。

如果导弹的自由运动是衰减的，那么，滚转导弹就是动态稳定的；否则就是动态不稳定的。事实上，滚转导弹在转速超过一定范围之后，确实有可能出现动态不稳定性，这种情况应该在总体设计中预见到并尽力避免。此外，滚转导弹在自由运动中的特征，还将影响到它在受控运动中的性状。因此，弄清滚转导弹在自由运动中的特征，对于设计工作是很重要的。

### 一、滚转导弹的自由运动及特征根

由方程组 (5-5-47)~(5-5-49)，给出适当的初始条件，即可求解其自由运动。

事实上，往往对复攻角  $B$  在自由运动中的变化最感兴趣，于是从上述齐次方程组中消去两个暂时不感兴趣的未知量  $A$  及  $C$ ，而得关于  $B$  的微分方程如下：

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + [a_1 + a_4 - j(a_6 + a_8)] \frac{dB}{dt} + [a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j(a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)] B = 0 \quad (5-5-50)$$

若初始条件为：当  $t = 0$  时， $B = B_0$ ， $\frac{dB}{dt} = \dot{B}_0$ ，则方程式 (5-5-50) 之解应为

$$B = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5-5-51)$$

其中， $B_1$  及  $B_2$  是由初始条件所决定的积分常数，而  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$  则是特征方程之根。

方程 (5-5-50) 的特征方程是

$$\lambda^2 + [a_1 + a_4 - j(a_6 + a_8)] \lambda + [a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j(a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)] = 0 \quad (5-5-52)$$

于是，特征根为

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-(a_1 + a_4) + j(a_6 + a_8)}{2} \pm \frac{1}{2} \\ &\times \sqrt{[a_1 + a_4 - j(a_6 + a_8)]^2 - 4[a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j(a_7 - a_1 a_8 - a_4 a_6)]} \\ &= \frac{-(a_1 + a_4) + j(a_6 + a_8)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{P + jQ} \end{aligned} \quad (5-5-53)$$

式中

$$\begin{aligned} P &= -4a_2 + (a_1 - a_4)^2 - (a_6 - a_8)^2 \\ Q &= -4a_7 + 2(a_4 - a_1)(a_6 - a_8) \end{aligned}$$

在 (5-5-53) 式中比较麻烦的是公式右端  $\sqrt{P + jQ}$  的处理。为此可令

$$P + jQ = R e^{j\varphi} \quad (5-5-54)$$

其中

$$\begin{aligned} R &= +\sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{Q}{P} \end{aligned}$$

于是，可得

$$\sqrt{P + jQ} = \sqrt{R e^{j\varphi}} = \sqrt{R} e^{j\varphi/2} \quad (5-5-55)$$

又由欧拉公式及三角公式可知

$$\begin{aligned} e^{j\varphi/2} &= \cos \frac{\varphi}{2} + j \sin \frac{\varphi}{2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \pm j \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} = \pm \sqrt{\frac{R + P}{2R}} \pm j \sqrt{\frac{R - P}{2R}} \end{aligned} \quad (5-5-56)$$

现在必须细心地考察 (5-5-56) 式中的正负号的搭配关系问题。为此, 应该考察  $(P+jQ)$  同  $\sqrt{P+jQ}$  做为矢量的相位角关系〔见图 5-62 的 (a) 及 (b)〕, 并可区分为以下两种情况:

第一种情况: 如图 5-62(a) 所示,  $Q > 0$ 。这时, 矢量  $(P+jQ) = Re^{j\varphi}$  必然位于第一象限 (若  $P > 0$ ) 或第二象限 (若  $P < 0$ ), 于是  $0 < \varphi < \pi$ 。所以, 矢量  $+\sqrt{P+jQ} = +\sqrt{R} e^{j\varphi/2}$  必然位于第一象限, 即  $0 < \frac{\varphi}{2} <$

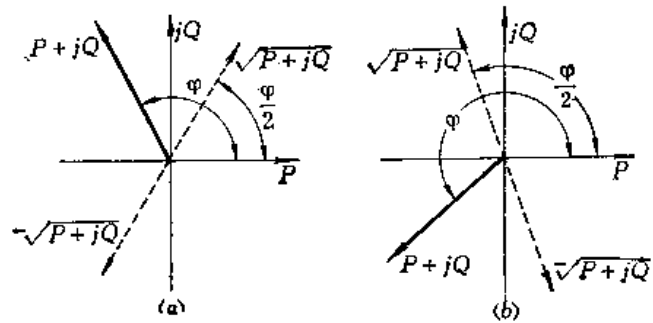


图5-62 矢量  $\sqrt{P+jQ}$  的相位角  
(a)  $Q > 0$  情况, (b)  $Q < 0$  情况。

$\frac{\pi}{2}$ , 因此, 由 (5-5-55) 及 (5-5-56) 式应有

$$+\sqrt{P+jQ} = +\sqrt{\frac{R+P}{2}} + j\sqrt{\frac{R-P}{2}}$$

代入 (5-5-53) 式即得

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \left[ (a_1 + a_4) \mp \sqrt{\frac{R+P}{2}} \right] + \frac{j}{2} \left[ (a_6 + a_8) \pm \sqrt{\frac{R-P}{2}} \right] \quad (5-5-57)$$

第二种情况: 见图 5-62(b),  $Q < 0$ 。这时, 矢量  $(P+jQ) = Re^{j\varphi}$  必然位于第三象限 ( $P < 0$ ) 或第四象限 ( $P > 0$ ), 于是  $\pi < \varphi < 2\pi$ 。所以矢量  $+\sqrt{P+jQ} = +\sqrt{R} e^{j\varphi/2}$  必然位于第二象限, 即  $\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \pi$ ; 因此, 由 (5-5-55) 及 (5-5-56) 式应有

$$+\sqrt{P+jQ} = -\sqrt{\frac{R+P}{2}} + j\sqrt{\frac{R-P}{2}}$$

代入 (5-5-53) 式即得

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \left[ (a_1 + a_4) \pm \sqrt{\frac{R+P}{2}} \right] + \frac{j}{2} \left[ (a_6 + a_8) \pm \sqrt{\frac{R-P}{2}} \right] \quad (5-5-58)$$

对于通常的无尾式布局的反坦克导弹来说, 具有差偏角的弹翼总是位于导弹重心的后方。这时, 马格努斯力矩的方向将是使动力系数  $a_7 > 0$ , 在弹翼不太小的情况下, 往往使得  $Q < 0$  即相当于上述第二种情况。

## 二、特征根 $\lambda_{1,2}$ 的简化近似计算

上述用来计算滚转导弹自由运动特征根的公式 (5-5-53) 等, 具体展开之后是相当复杂的。对于总体设计工作说来, 往往希望有一些既能充分反映各参量之间的物理本质关系, 又能使计算简单的近似公式。事实上, 对于大多数的弹体滚转的反坦克导弹, 其特征根的计算确可简化。

大多数的反坦克导弹都具有适当的静稳定度 (即  $a_2 > 0$ ) 和适当的弹体摆动固有频率

(即  $\omega_n = \sqrt{a_2 + a_1 a_4} > 0$ )。滚转时, 弹体右旋 ( $\omega_x > 0$ ), 并且转速不太大, 因而马格努斯效应及陀螺效应都不太大。就是说, 具有下列条件

$$(1) a_2 > a_7;$$

$$(2) \omega_n > a_6;$$

此外, 按通常情况, 还应有以下数量级关系, 即

$$(3) a_6 > a_1 (\text{及 } a_4) \gg a_8;$$

$$(4) a_1 \text{ 及 } a_4 \text{ 为同一数量级。}$$

在上列经常遇到的条件中, 式 (5-5-53) 的组合参量  $P$  必定是负数, 并且总会有

$$\frac{|Q|}{|P|} < 1$$

所以, 就有可能把式 (5-5-53) 中的  $\sqrt{P+jQ}$  用台劳级数展开。

在上述条件之下, 由于  $P < 0$ , 故最好改写  $\sqrt{P+jQ}$  为

$$\sqrt{P+jQ} = \sqrt{-(-P-jQ)} = j \sqrt{-P} \sqrt{1+j\frac{Q}{P}}$$

于是, 可得下面的展开式

$$\begin{aligned} \sqrt{P+jQ} &= j \sqrt{-P} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( j \frac{Q}{P} \right) - \frac{1}{2 \times 4} \left( j \frac{Q}{P} \right)^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} \left( j \frac{Q}{P} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6 \times 8} \left( j \frac{Q}{P} \right)^4 + \dots \right\} \\ &= \sqrt{-P} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{Q}{P} + \frac{1}{16} \left( \frac{Q}{P} \right)^3 - \frac{7}{256} \left( \frac{Q}{P} \right)^5 + \dots \right. \\ &\quad \left. + j \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{Q}{P} \right)^2 - \frac{5}{128} \left( \frac{Q}{P} \right)^4 + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (5-5-59)$$

将上式代入 (5-5-53) 式中, 并将实部及虚部分开, 即可得到

$$\lambda_{1,2} = \sigma_{1,2} + j\omega_{1,2} \quad (5-5-60)$$

其中

$$\sigma_{1,2} = \frac{-1}{2} \left\{ (a_1 + a_4) \pm \sqrt{-P} \left[ \frac{1}{2} \frac{Q}{P} - \frac{1}{16} \left( \frac{Q}{P} \right)^3 + \frac{7}{256} \left( \frac{Q}{P} \right)^5 - \dots \right] \right\} \quad (5-5-61)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (a_6 + a_8) \pm \sqrt{-P} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{Q}{P} \right)^2 - \frac{5}{128} \left( \frac{Q}{P} \right)^4 + \dots \right] \right\} \quad (5-5-62)$$

此外, 由 (5-5-53) 式中  $P$  及  $Q$  的定义, 又可得下列的一些级数

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{-P} &= 2\omega_n \left\{ 1 + \frac{(a_6 - a_8)^2 - (a_1 + a_4)^2}{8\omega_n^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[(a_6 - a_8)^2 - (a_1 + a_4)^2]^2}{128\omega_n^4} + \dots \right\} \\ \frac{Q}{P} &= \frac{a_7}{\omega_n^2} \left\{ 1 + \frac{(a_1 - a_4)(a_6 - a_8)}{2a_7} \right. \end{aligned} \right\} \quad (5-5-63)$$



$$\left. \begin{aligned} & - \frac{(a_8 - a_4)^2 - (a_1 + a_4)^2}{4\omega_n^2} + \dots \} \\ \left(\frac{Q}{P}\right)^2 &= \left(\frac{a_7}{\omega_n^2}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{(a_1 - a_4)(a_8 - a_4)}{a_7} \right. \\ & \left. - \frac{(a_8 - a_4)^2 - (a_1 + a_4)^2}{2\omega_n^2} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots$$

以上各式中的  $a_8$  同  $a_4$  相比，通常相差好几个数量级，可以略去  $a_8$  不计；此外，通常还有  $\frac{(a_1 - a_4)a_8}{a_7} \ll 1$ 。这样，将上面式 (5-5-63) 的诸级数代入到  $\sigma_{1,2}$  及  $\omega_{1,2}$  的式 (5-5-61)

及 (5-5-62) 中，按幂次整理并略去高阶小量之后，即可得简单的线性近似公式。

式 (5-5-61) 的近似式为：

$$\sigma_{1,2} \approx -\frac{1}{2} \left\{ a_1 + a_4 \pm \omega_n \left[ -\frac{a_7}{\omega_n^2} + \frac{a_8(a_1 - a_4)}{2\omega_n^2} \right] \right\} \quad (5-5-64)$$

此近似式之误差可按下式估值：

$$\frac{|\delta\sigma_{1,2}|}{\omega_n} < \frac{1}{16} \left( \frac{a_7}{\omega_n^2} \right) \left[ \left( \frac{a_7}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{a_8}{\omega_n} \right)^2 \right] \quad (5-5-65)$$

误差方向是：按近似式 (5-5-64) 算出之  $\sigma_1$  值比准确值略小， $\sigma_2$  比准确值略大。误差估值式 (5-5-65) 的曲线见图 5-63。

式 (5-5-62) 的近似式为

$$\omega_{1,2} \approx -\frac{a_8}{2} \pm \omega_n \quad (5-5-66)$$

按此近似式计算时，相应的误差估值为

$$\frac{|\delta\omega_{1,2}|}{\omega_n} < \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{a_7}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{a_8}{\omega_n} \right)^2 \right] \quad (5-5-67)$$

误差方向是：按 (5-5-66) 式近似算出的  $\omega_1$  比准确值略小， $\omega_2$  比准确值略大。误差估值式 (5-5-67) 的曲线见图 5-64。

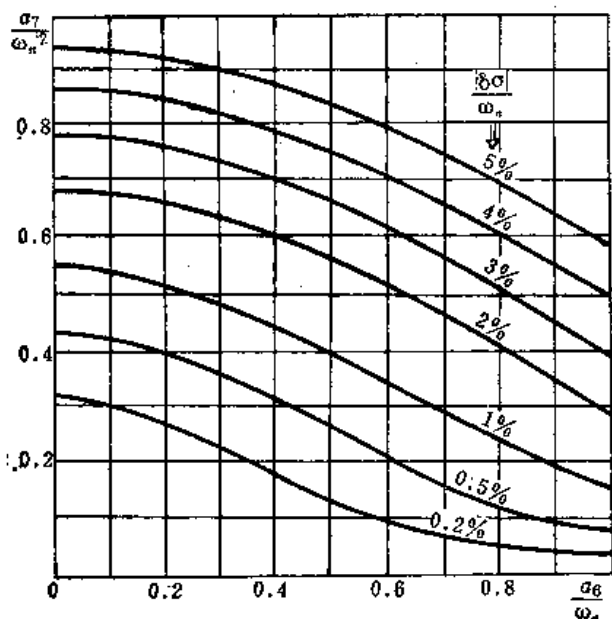


图5-63 对  $\sigma_{1,2}$  的近似计算误差估值曲线

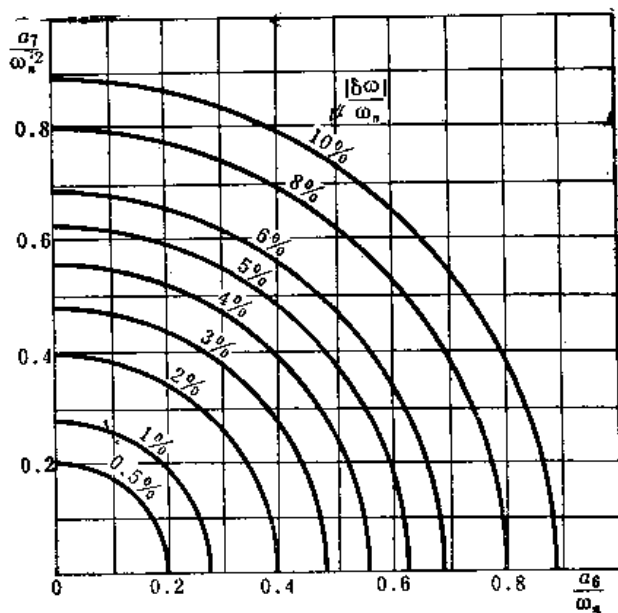


图5-64 对  $\omega_{1,2}$  的近似计算误差估值曲线

关于特征根虚部  $\omega_{1,2}$  之近似式 (5-5-66) 的计算误差, 有时可能较大, 这时可利用式 (5-5-67) 或利用图 5-64 之曲线再做一次修正计算, 即

$$\omega_{1,2} \approx \frac{a_6}{2} \pm \omega_n \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{a_6}{\omega_n} \right)^2 + \left( \frac{a_7}{\omega_n} \right)^2 \right] \right\} \quad (5-5-68)$$

这时的计算误差可按式估值

$$\frac{|\delta \omega_{1,2}|}{\omega_n} < \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{a_1 + a_4}{\omega_n} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{a_7}{\omega_n^2} \right)^2 \left( \frac{a_6}{\omega_n} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{a_6}{\omega_n} \right)^4 \right] \quad (5-5-69)$$

误差方向同按 (5-5-66) 式计算者相反。

### 三、滚转导弹自由运动的形态

求得了滚转导弹运动的特征根  $\lambda_{1,2} = \sigma_{1,2} + j\omega_{1,2}$  之后, 即可由初始条件求出积分常数, 就是

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{B_0 - \lambda_2 B_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ B_2 &= \frac{B_0 - \lambda_1 B_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (5-5-70)$$

$B_1$  及  $B_2$  是两个复数, 也可以说是在  $(\beta, j\alpha)$  平面上的两个向量。于是导弹的自由运动即可按式 (5-5-51) 求出, 又可写成

$$B = B_1 \cdot e^{\sigma_1 t} \cdot e^{j\omega_1 t} + B_2 \cdot e^{\sigma_2 t} \cdot e^{j\omega_2 t} \quad (5-5-71)$$

$e^{j\omega t}$  乃是一个以角速度  $\omega$  旋转的单位矢量, 故复攻角  $B$  是两个旋转矢量的几何和。这两个矢量各自以角速度  $\omega_1$  及  $\omega_2$  旋转, 它们的长度分别是  $B_1 e^{\sigma_1 t}$  及  $B_2 e^{\sigma_2 t}$ , 如图 5-65 所示。

对于上面所说的一类常见的弹体滚转不太快且具有相当的静稳定度的导弹而言:  $|\omega_1| > |\omega_2|$ , 并且  $\omega_1$  及  $\omega_2$  具有相反的方向, 可称  $B_1 e^{\sigma_1 t} \cdot e^{j\omega_1 t}$  为快进动, 而  $B_2 e^{\sigma_2 t} \cdot e^{j\omega_2 t}$  为慢进动 (也有把它们分别称为章动和进动的)。快进动的阻尼较强, 而慢进动的阻尼较弱 ( $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ ), 它们的合成向量如图 5-66 所示的形态。在图 5-66 中, (a) 表示滚转很慢, 因而  $|\omega_1|$  及  $|\omega_2|$  相差很小的情况; (b) 表示滚转稍快因而  $|\omega_1| \approx 3|\omega_2|$  时的情况; (c) 表示滚转更快, 因而  $|\omega_1| \gg |\omega_2|$  的情况。

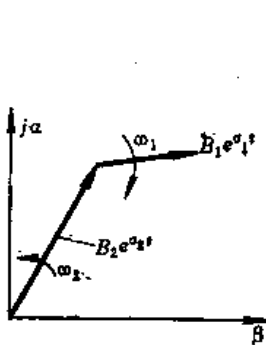


图5-65 滚转导弹的自由运动

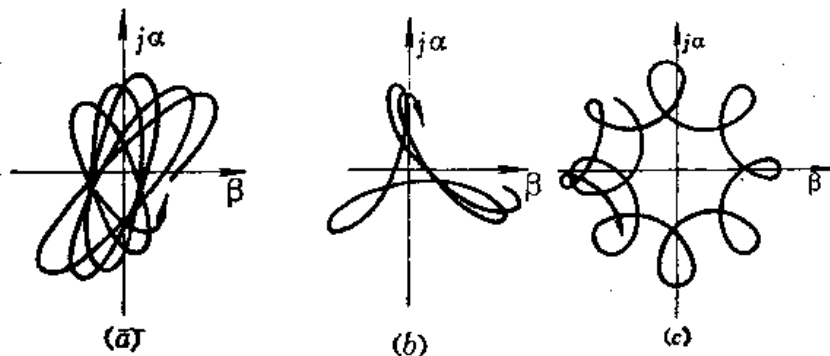


图5-66 滚转导弹的自由运动的形态

快进动运动总是衰减的, 它的阻尼较强, 因此衰减得比较快; 当快进动充分衰减以后, 在导弹的自由摆动运动中就只剩下了慢进动。在滚转导弹具有动态稳定性的情况下, 慢进动也是衰减的, 但阻尼较弱, 衰减较慢。由式 (5-5-61) 及 (5-5-64) 可以看出, 在一定条件下, 可能出现  $\sigma_2 = 0$  的情况, 这时慢进动将维持为稳定的旋转  $B_2 e^{j\omega_2 t}$ 。若更进一步,

$\sigma_2 > 0$ , 则慢进动将失去衰减性, 其幅值不断增大, 运动就成为动态不稳定的。通常不允许出现这种情况。

#### 四、滚转导弹的动态稳定性判据

前已说过, 动态稳定性的条件是自由运动为衰减的。也就是说, 特征根  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$  应该具有负实部, 即按式 (5-5-57) 或 (5-5-58) 算出的  $\sigma_{1,2}$  皆应为负值。

事实上, 由于实际的导弹必定总有  $a_1 > 0$  及  $a_4 > 0$ , 故不言而喻将有

$$-\left[ a_1 + a_4 + \sqrt{\frac{R+P}{2}} \right] < 0$$

于是, 动态稳定性的条件可以紧缩为

$$-\left[ (a_1 + a_4) - \sqrt{\frac{R+P}{2}} \right] < 0 \quad (5-5-72)$$

此式经过整理后可写成

$$4(a_2 + a_1 a_4) + (a_6 - a_8)^2 - \left[ \frac{2a_7 + (a_1 - a_4)(a_6 - a_8)}{a_1 + a_4} \right]^2 > 0 \quad (5-5-73)$$

这就是保证滚转导弹具有动态稳定性的条件式 (或判别式)。注意, 在导出这个判别式的过程, 并未对  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_4$ 、 $a_6$ 、 $a_7$ 、 $a_8$  各动力系数的大小以及各系数 (除  $a_1$ 、 $a_4$  外) 的正负做什么限制, 因此它是相当普遍的判别式。例如, 即使导弹不具有静稳定性, 即  $(a_2 + a_1 a_4) < 0$ , 只须陀螺力矩  $a_6$  充分地大, 上式仍可能获得满足。例如, 静不稳定的炮弹, 通过高速旋转, 也可以获得动态的稳定性。事实上, 若略去  $a_1$ 、 $a_4$ 、 $a_7$ 、 $a_8$  诸系数, 从式 (5-5-73) 就可获得用来判别炮弹的飞行稳定性的实用公式。

在导弹具有静稳定性的情况下, 引入弹体摆动的固有频率  $\omega_n = \sqrt{a_2 + a_1 a_4}$ ; 又注意到通常  $|a_6| \gg |a_8|$ 。于是判别式 (5-5-73) 可改写成更实用的形式

$$\omega_n^2 + \left( \frac{a_6}{2} \right)^2 - \left[ \frac{a_7 + (a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}}{a_1 + a_4} \right]^2 > 0 \quad (5-5-74)$$

上式已较为实用, 但为了便于分析滚转弹体的各动力系数同动稳定性之间的关系, 还可更进一步简化。上式左边可分解为二因式, 即

$$\left[ \sqrt{\omega_n^2 + \left( \frac{a_6}{2} \right)^2} - \frac{a_7 + (a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}}{a_1 + a_4} \right] \\ \times \left[ \sqrt{\omega_n^2 + \left( \frac{a_6}{2} \right)^2} + \frac{a_7 + (a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}}{a_1 + a_4} \right] > 0$$

在上式左边的二因式中, 已经有一个永为正值, 于是判别式可简化为其中另一个因式大于零。在弹翼位于弹体重心后方的通常情况下,  $a_7 > 0$ , 且常有  $a_7 > -(a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}$ ; 于是, 上式可简化为

$$\sqrt{\omega_n^2 + \left(\frac{a_6}{2}\right)^2} - \frac{a_7 + (a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}}{a_1 + a_4} > 0 \quad (5-5-75)$$

再考虑到对于转速不太快的弹体，常有  $\omega_n \gg \frac{a_6}{2}$ ，于是上式可进一步简化为

$$\omega_n - \frac{a_7}{a_1 + a_4} - \frac{a_1 - a_4}{a_1 + a_4} \cdot \frac{a_6}{2} > 0 \quad (5-5-76)$$

注意，若所述的前提条件满足（即  $\omega_n > a_6$  且  $a_7 > -(a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}$ ），则按式 (5-5-76) 来判别动稳定性时，将具有一定的保险裕量。事实上，由前面获得的特征根实部的近似计算公式 (5-5-64)，已知

$$\sigma_2 \approx -\frac{1}{2} \left\{ a_1 + a_4 - \left[ \frac{a_7}{\omega_n} + \frac{a_6(a_1 - a_4)}{2\omega_n} \right] \right\}$$

并且它的误差方向是比准确值略大。由保证  $\sigma_2 < 0$  的条件，也可直接导出公式 (5-5-76)；显然，这时是略有稳定裕量的。

为了分析低速滚转弹体的各动力系数对动稳定性的影响，可将动稳定判别式 (5-5-76) 改写成

$$a_1 \left( \omega_n - \frac{a_6}{2} \right) + a_4 \left( \omega_n + \frac{a_6}{2} \right) - a_7 > 0 \quad (5-5-77)$$

由此式可以看出，在导出此近似式时所指出的前提之下，关于滚转弹体的动稳定性，可获得如下的规律性认识：

第一，若弹体的静稳定度愈大，即弹体不滚转时的摆动固有频率  $\omega_n$  愈大，则滚转弹体的动稳定性愈容易得到保证。

第二，动力系数  $a_4$  愈大，则滚转弹体的动稳定性愈容易得到保证。

第三，动力系数  $a_1$  愈大（即空气动力阻尼系数愈大），动稳定性愈容易保证（注意，慢滚转弹体的前提是： $\omega_n > \frac{a_6}{2}$ ）。

第四，动力系数  $a_7$  愈大（马格努斯力矩愈大），动稳定性就愈差。事实上，马格努斯力矩是导致慢滚转弹体产生动不稳定性的主要因素。由于这一点，在有些文献中，把具有尾翼的慢滚转弹体的动态不稳定性称为“马格努斯不稳定性”。

第五，动力系数  $a_6$ （即陀螺效应）对于动稳定性的影响具有二重性；若  $(a_1 - a_4) > 0$  则陀螺效应对于动稳定性是不利的；但若  $(a_1 - a_4) < 0$ ，则陀螺效应对于动稳定性是有利的。无论如何，在导出式 (5-5-77) 时所引用的前提  $\left( \omega_n \gg \frac{a_6}{2} \right)$  之下，显然  $\omega_n \gg \frac{a_1 - a_4}{a_1 + a_4} \cdot \frac{a_6}{2}$ 。这就是说，陀螺效应对于具有尾翼的慢滚转弹体的动稳定性的影响将是较小的，是次要的因素。

由上所说，具有尾翼的慢滚转弹体的动不稳定性主要是由马格努斯力矩所引起的。可是马格努斯力矩可随着转速  $\omega_n$  的增大而增大的，所以，这类弹体常在转速增大的情况下发生动态不稳定的问题。因此，对于这类弹体的转速必须加以适当限制。

### 五、滚转导弹的动态稳定区及临界转速

如前所述, 对于带有尾部弹翼的低速滚转弹体来说, 为了保证它的动态稳定性, 必须适当地提高它在无滚转情况下的弹体摆动固有频率  $\omega_n$ , 并且适当限制它的滚转角速度  $\omega_x$ 。由此可以预料, 在参数  $\omega_n$  及  $\omega_x$  之间, 应有一个制约关系。

考察动态稳定性的判别式 (5-5-75) (前提是  $a_2 > 0$ , 并且  $a_6 \gg a_8$ )

$$\sqrt{\omega_n^2 + \left(\frac{a_6}{2}\right)^2} - \left[ \frac{a_7 + (a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}}{a_1 + a_4} \right] > 0$$

或其近似式 (5-5-76) [在前提  $\omega_n \gg \frac{a_6}{2}$ , 并且  $a_7 > -(a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}$  之下]

$$\omega_n - \frac{a_7 + (a_1 - a_4) \frac{a_6}{2}}{a_1 + a_4} > 0$$

其中,  $a_6$  及  $a_7$  都是转速  $\omega_x$  的函数。已知  $a_6 = \frac{J_x}{J_y} \omega_x$ , 若  $a_7$  也同  $\omega_x$  直接成正比,  $a_7 = a_7' \omega_x$ , 则不难导出下面形式的判别式

$$\omega_n - C \omega_x > 0 \quad (5-5-78)$$

其中 
$$C = \sqrt{\left[ \frac{a_7' + (a_1 - a_4) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{J_x}{J_y}}{a_1 + a_4} \right]^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{J_x}{J_y} \right)^2}$$

或 
$$C \approx \frac{a_7' + (a_1 - a_4) \frac{1}{2} \frac{J_x}{J_y}}{a_1 + a_4}$$

按判别式 (5-5-78) 即可在  $\omega_x - \omega_n$  平面中绘出动稳定区 (如图 5-67)。显然, 在设计工作中必须保证滚转导弹的设计参数 ( $\omega_x, \omega_n$ ) 落在这个动稳定区中。

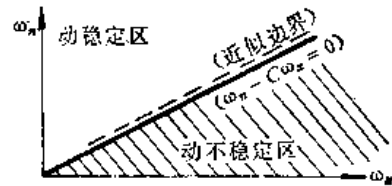


图5-67 滚转导弹的动稳定区

下面来考察 (5-5-78) 式的适用情况。注意到其中

$$a_7 = \frac{-\rho v^2 S L m_y^{\delta}}{2J_x} = \frac{-\rho v^2 S L m_y^{\bar{\omega}_x}}{2J_y}$$

并且 
$$m_y^{\delta} = m_y^{\delta}(\delta, \omega_x) = m_y^{\delta, \delta}|_{\bar{\omega}_x=0} \cdot \delta + m_y^{\delta, \bar{\omega}_x}|_{\delta=0} \cdot \bar{\omega}_x$$

因此, 动力系数  $a_7$  是同时随  $\delta$  及  $\bar{\omega}_x$  的变化而线性变化的。

若只限于考察弹体稳态滚转的情况, 那么, 弹体的稳态转速  $\bar{\omega}_x$  乃是决定于弹翼的差偏角  $\delta$ , 故按式 (5-5-30) 可得

$$m_y^{\delta} = \left\{ m_y^{\delta, \delta}|_{\bar{\omega}_x=0} \left[ -\frac{2}{3} - \frac{l^3 - D^3}{l(l^2 - D^2)} \right] + m_y^{\delta, \bar{\omega}_x}|_{\delta=0} \right\} \bar{\omega}_x$$

于是, 可认为动力系数  $a_7$  同  $\omega_x$  之间具有简单正比关系, 即

$$a_7 = a_7' \omega_x \quad (5-5-79)$$

$$\text{其中 } a_7' = -\frac{\rho v^2 S L}{2J_y} \left\{ m_y^{\alpha, \delta} \Big|_{\omega_x=0} \left[ \frac{2}{3} \frac{l^3 - D^3}{l(l^2 - D^2)} \right] + m_y^{\alpha, \omega_x} \Big|_{\delta=0} \right\} \frac{l}{2v}$$

只有在这种情况下，上面按(5-5-78)式划定滚转导弹动态稳定区的方法才是适用的。这正是我们在导弹设计工作进行过程中将会遇到的情况。这时，导弹弹翼的差偏角 $\delta$ 及稳态转速 $\omega_x$ 都尚未确定。所以，完全可以根据动态稳定性的考虑（还有其它方面的考虑）先把稳态转速确定下来；然后，再根据稳态转速来确定弹翼的差偏角 $\delta$ 。

但是，在实践中还会遇到另一种情况。这就是对于一个已经设计制造好的导弹，需要考察一下，能够把它的转速增加到多大，还不致丧失动态稳定性。在这种情况下，由于弹翼的差偏角 $\delta$ 已经是固定的，于是这个导弹的动力系数 $a_7$ 同转速 $\omega_x$ 已不再是简单正比关系，而应表为

$$a_7 = a_{7.0} + a_7' \cdot \omega_x \quad (5-5-80)$$

$$\text{其中 } a_{7.0} = a_7 \Big|_{\substack{\omega_x=0 \\ \delta=\text{const.}}} = -\frac{\rho v^2 S L}{2J_x} \cdot m_y^{\alpha, \delta} \Big|_{\omega_x=0} \cdot \delta$$

$$a_7' = -\frac{\rho v^2 S L}{2J_x} m_y^{\alpha, \omega_x} \Big|_{\delta=0} \cdot \frac{l}{2v}$$

于是，由动态稳定性的判别式(5-5-75)，可得

$$\omega_n^2 > \left( \frac{a_{7.0}}{a_1 + a_4} \right)^2 + 2 \frac{a_{7.0} \left[ a_7' + (a_1 - a_4) \frac{J_x}{2J_y} \right]}{(a_1 + a_4)^2} \omega_x$$

$$+ \left\{ \left[ \frac{a_7' + (a_1 - a_4) \frac{J_x}{2J_y}}{a_1 + a_4} \right]^2 - \left( \frac{J_x}{2J_y} \right)^2 \right\} \omega_x^2 \quad (5-5-81)$$

注意，在这种情况下，弹体的无滚转摆动固有频率 $\omega_n$ 是已经确定的。因此，实际上已不存在如图5-67那样的动稳定区。在实际上有意义的只是“临界转速”，就是使滚转弹体恰好位于动稳定同动不稳定之间的临界状态时的转速。

在临界状态下，判别式(5-5-81)中的大于符号改为等于符号，即获得一个以 $\omega_x$ 为未知的二次方程式。解此方程，弃去无意义的负根，即得

$$\omega_{x, \text{临界}} = -\frac{a_{7.0} \left( a_7' + \frac{a_1 - a_4}{2} \cdot \frac{J_x}{J_y} \right)}{\left( a_7' + a_1 \frac{J_x}{J_y} \right) \left( a_7' - a_4 \frac{J_x}{J_y} \right)}$$

$$+ \sqrt{\left[ \frac{a_{7.0} \left( a_7' + \frac{a_1 - a_4}{2} \cdot \frac{J_x}{J_y} \right)}{\left( a_7' + a_1 \frac{J_x}{J_y} \right) \left( a_7' - a_4 \frac{J_x}{J_y} \right)} \right]^2 + \frac{\omega_n^2 - \left( \frac{a_{7.0}}{a_1 + a_4} \right)^2}{\left( a_7' + a_1 \frac{J_x}{J_y} \right) \left( a_7' - a_4 \frac{J_x}{J_y} \right)}} \quad (5-5-82)$$

此式过于复杂，不便于应用。

在大多数反坦克导弹的实际情况下，如前所述，具有条件

$$\omega_n \gg \frac{a_0}{2}$$

及

$$a_7 + \frac{(a_1 - a_4)a_6}{2} > 0$$

于是, 由近似判别式 (5-5-76) 也可得到临界转速  $\omega_x$  之近似计算公式如下

$$\omega_{x \cdot \text{临界}} = \frac{(a_1 + a_4)\omega_n - a_7 \cdot 0}{a_7' + \frac{a_1 - a_4}{2} \cdot \frac{J_x}{J_y}} \quad (5-5-83)$$

对于一个已经设计好的、具有固定的弹翼差偏角  $\delta$  的导弹来说, 若在飞行过程中, 其实际转速超过了按式 (5-5-82) 或 (5-5-83) 所算出的临界转速, 那么, 它就会失去动态稳定性。

### § 5-5-6 滚转弹体的舵上控制力

#### 一、控制信号、基准信号及陀螺安装角

在弹体滚转的导弹上, 采用单一的脉冲调宽指令信号通道和继电式舵机, 就能够实现对于俯仰与偏航两个通道的控制任务。这是一种很巧妙的设计方法。下面对这种设计的原理进行分析。

在弹体不滚转的导弹的脉冲调宽式控制方式中所用的指令信号  $u(t)$ , 都是交流信号, 相应的舵上控制力的方向也是正负交变的。

但在弹体滚转的导弹上, 除了采用交流脉冲调宽式指令信号之外, 也可以采用直流信号来对导弹进行控制。在采用交流指令信号的情况下, 舵机仍是在正、负两个极限位置之间跳来跳去, 相应的舵上控制力  $F_K$  则一边随着弹体旋转, 一边从“正”跳变到“负”, 又从“负”跳变到“正”。可是, 在采用直流指令信号的情况下, 舵机却是在零位置和正极限位置之间跳动, 相应的舵上控制力  $F_K$  则一面随着弹体旋转, 一面不时地从“无”跳变到“有”, 再从“有”跳变到“无” (参看图 5-68)。这两种形式的指令信号各有优缺点, 实践中都已被采用。

为了分析滚转导弹的舵控力, 首先必须对它做出确切的数学描述。

在弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  中描述舵控力随控制信号而变化的规律是最方便的。从  $o_1x_1y_1z_1$  中看来, 舵控力  $F_K$  及其无量纲值  $f$  随着指令信号  $u(t)$  变化的规律同弹体不滚转的情况是类似的。

不失一般性, 可以假定弹上舵机的安装是使得舵控力  $F_K$  总是产生在弹体坐标系的  $o_1y_1$  轴上。并可设定, 当控制信号  $u > 0$  时,  $F_K$  的方向是指向  $o_1y_1$  轴的正向。于是, 当信号  $u(t)$  变化的时候, 舵控力  $F_K$  或其无量纲值  $f$  就在  $o_1y_1$  轴上做着“正负”或“有无”的变化。

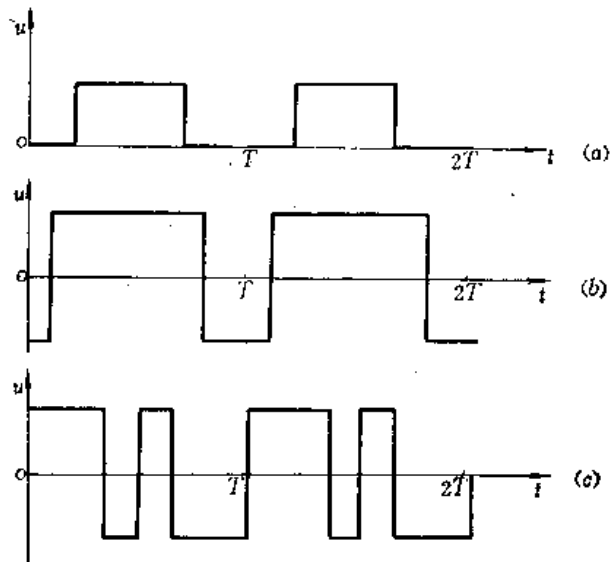


图5-68 滚转导弹的脉冲调宽控制指令信号  
(a) 直流信号; (b) 最简单的交流信号; (c) 双脉冲的交流信号。

为了研究舵控力对于导弹弹体运动的控制效果,最好是在准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中来描述舵控力。由于弹体的滚转,弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  也在准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中滚转(以  $o_1x_1$  或即  $o_1x_3$  为轴)。于是,在  $o_1x_3y_3z_3$  中看来,舵控力  $F_K$  乃是一边旋转、一边沿  $o_1y_1$  轴做着“正负”或“有无”变化的复杂旋转矢量。

为了便于分析,下面仍采用从弹顶向弹尾观察导弹的规定:右旋导弹的旋转方向同任何一个旋转矢量在复平面上的旋转正方向是一致的,并且观察导弹时,准弹体坐标系的  $o_1z_3$  轴在图面上是指向左方(图 5-69),这同 § 5-5-2 中所规定的  $P$  平面上的坐标表示是一致的。

于是,舵控力矢量  $F_K$  在准弹体坐标系的  $(o_1y_3)$  轴及  $(-o_1z_3)$  轴上的投影是  $F_{K,y}$  及  $F_{K,z}$ , 并有

$$F_K = F_{K,z} + jF_{K,y}$$

要弄清舵控力矢量  $F_K$  在准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中的变化规律,必须首先弄清弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  在准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中旋转的规律。这样,就必须知道旋转的角速度  $\omega_r$  并适当规定旋转的起点。

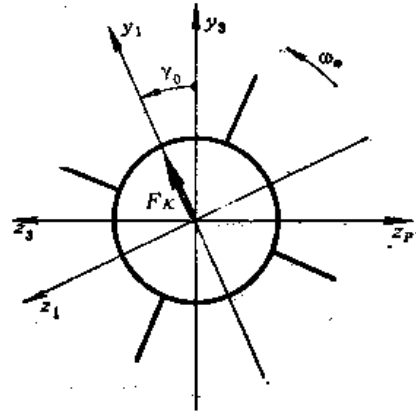


图5-69 关于导弹滚转方向及陀螺安装角  $\gamma_0$  的规定(从弹顶向弹尾看去)

在滚转的导弹上装有一个三自由度的陀螺仪。在弹体滚转时,由于陀螺的定轴性,其转子轴线在惯性空间中基本上保持不变。每当弹体滚转一周又回到起点时,装在陀螺仪外环上的基准信号发生器就发出一个窄脉冲信号,即基准信号。显然,每两个基准信号之间的时间间隔就是弹体滚转  $360^\circ$  的周期时间。这样,就可以随时获知导弹在飞行过程中的实际转速。上述基准信号还可用来规定指令信号  $u(t)$  的周期起点和终点  $t = 0, T, 2T, \dots$ , 据此可以确定各调宽脉冲的相位。

由此可见,这里所说的旋转的起点,实际上就是脉冲调宽控制指令的起点。在此起点处,弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  同准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  一般地并不重合,可规定这时在  $o_1y_1$  轴同  $o_1y_3$  轴之间的夹角为  $\gamma_0$  (相应的时间为  $t = 0$ )。通常,称  $\gamma_0$  为“陀螺安装角”(参看图 5-69)。适当地调整  $\gamma_0$ , 可以减小由于导弹滚转而形成的某些控制偏差(见 § 5-5-7)。

考虑到上述的规定及设定,在存在着陀螺安装角  $\gamma_0$  的情况下,在准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中看来,滚转导弹的舵控力矢量应如下描述

$$F_K = |F_K| f(t) e^{j(\omega_r t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2})} \quad (5-5-84)$$

式中  $|F_K|$ ——即是  $|F_{K,\max}|$ , 在采用继电式舵机的情况下,脚标  $\langle \max \rangle$  已无实际意义。

## 二、直流指令信号及舵控力分析

先分析直流的指令信号  $u(t)$  及相应的舵控力  $F_K$ 。如图 5-70 所示。指令信号的波形可由脉冲中心时刻  $t_0$  及脉冲宽度  $2t_0$  来规定。但是,考虑到信号传递的滞后及舵机的惯性,将使得无量纲舵控力的幅值  $f(t)$  的波形具有滞后时间  $\tau_0$  及斜边时间  $\tau$ 。于是,  $f(t)$  波形的脉冲中心时刻将是  $t_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}$ , 脉冲宽度则为  $2t_0 + \tau$ 。注意,  $u(t)$  及  $f(t)$  的



时间基准一致，并且  $f(t)$  是在弹体坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  中观察到的无量纲舵控力波形。

可以用下面的一组数学式子来描述无量纲舵控力的幅值变化规律：

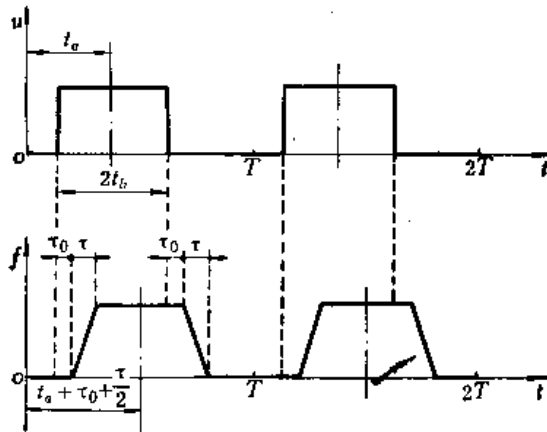


图5-70 直流脉宽信号及舵控力波形

$$\left. \begin{aligned}
 f(t) &= 0 && \text{当 } 0 \leq t \leq t_a - t_b + \tau_0 \\
 f(t) &= \frac{t - (t_a - t_b + \tau_0)}{\tau} && \text{当 } t_a - t_b + \tau_0 \leq t \leq t_a - t_b + \tau_0 + \tau \\
 f(t) &= 1 && \text{当 } t_a - t_b + \tau_0 + \tau \leq t \leq t_a + t_b + \tau_0 \\
 f(t) &= \frac{(t_a + t_b + \tau_0 + \tau) - t}{\tau} && \text{当 } t_a + t_b + \tau_0 \leq t \leq t_a + t_b + \tau_0 + \tau \\
 f(t) &= 0 && \text{当 } t_a + t_b + \tau_0 + \tau \leq t \leq T
 \end{aligned} \right\} (5-5-85)$$

可将如上表达的  $f(t)$  展开为指数形式的傅立叶级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\omega_s t} \quad (5-5-86)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{其中} \quad f_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
 f_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (n \neq 0)
 \end{aligned} \right\} (5-5-87)$$

并且 
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

将式 (5-5-85) 的  $f(t)$  的表达式代入上式，可得如下结果：

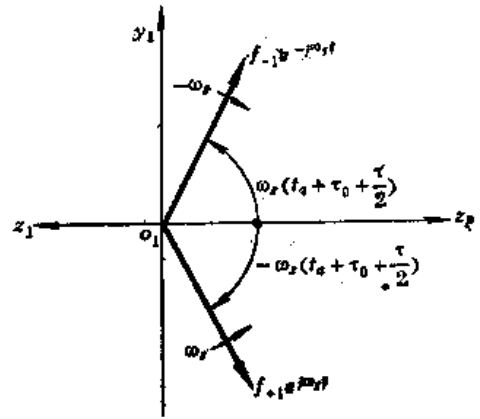
$$\left. \begin{aligned}
 f_0 &= \frac{\omega_s}{\pi} t_b \\
 f_n &= \frac{e^{-jn\omega_s(t_a + \tau_0 + \frac{\tau}{2})}}{n\pi} \sin(n\omega_s t_b) \cdot \frac{\sin n\omega_s \frac{\tau}{2}}{n\omega_s \frac{\tau}{2}} \quad (n \neq 0)
 \end{aligned} \right\} (5-5-88)$$

注意，如 (5-5-86) 式表达的傅立叶级数，其中的每一项都是一个旋转矢量。例如  $n = -1$  和  $n = +1$  的两项将分别为

$$f_{-1}e^{-j\omega_s t} = \frac{e^{j\omega_s(t_a + \tau_0 + \frac{\tau}{2})}}{-\pi} \left[ \sin(-\omega_s t_b) \cdot \frac{\sin(-\omega_s \frac{\tau}{2})}{(-\omega_s \frac{\tau}{2})} \right] e^{-j\omega_s t}$$

$$f_{+1}e^{+j\omega_s t} = \frac{e^{-j\omega_s(t_a + \tau_0 + \frac{\tau}{2})}}{\pi} \left[ \sin(\omega_s t_b) \cdot \frac{\sin(\omega_s \frac{\tau}{2})}{\omega_s \frac{\tau}{2}} \right] e^{+j\omega_s t}$$

在固连于弹体的  $o_1x_1y_1z_1$  坐标系中, 从弹顶向弹尾看去, 这两个分量的图象如下 (参见图 5-71): 分量  $f_{-1}e^{-j\omega_s t}$  乃是一个顺时针旋转的矢量 (角速度为  $-\omega_s$ ), 其初始相位为  $\omega_s(t_a + \tau_0 + \frac{\tau}{2})$ , 幅值为  $\sin(\omega_s t_b) \cdot \sin(\omega_s \frac{\tau}{2}) / (\omega_s \frac{\tau}{2})$ ; 分量  $f_{+1}e^{+j\omega_s t}$  则是一个逆时针旋转的向量 (角速度为  $+\omega_s$ ), 其初始相位角则为  $-\omega_s(t_a + \tau_0 + \frac{\tau}{2})$ , 其幅值同于  $n = -1$  的分量。这一对旋转矢量在旋转过程中, 将合成为一个沿横轴的简谐振荡。

图5-71 旋转矢量  $f_{-1}e^{-j\omega_s t}$  及  $f_{+1}e^{+j\omega_s t}$ 

考虑到弹体本身的滚转以后, 应将式 (5-5-86) 代入式 (5-5-84) 中而得

$$F_K = |F_K| e^{j(\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\omega_s t}$$

由于指令信号同弹体的滚转是严格同步的, 故  $\omega_x = \omega_s$ , 于是上式又可表为

$$F_K = |F_K| \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{j[(n+1)\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}]} \quad (5-5-89)$$

并且, 在系数  $f_n$  的表达式 (5-5-88) 中, 也可以用  $\omega_x$  代替  $\omega_s$ 。于是, 从准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中看来, 舵控力矢量  $F_K$  乃是由无穷多的旋转分矢量  $f_n e^{j(n+1)\omega_x t}$  所组成的, 它们的转速分别为  $(n+1)\omega_x$ , 它们的幅值及初相角由  $f_n$  决定 (并考虑到  $\gamma_0 + \frac{\pi}{2}$ )。

在这些旋转分矢量之中, 应特别注意其转速  $(n+1)\omega_x$  恰好为零的那一个分量, 因为这个分量在  $o_1x_3y_3z_3$  坐标系中是静止不转的, 它的大小及方向将决定着导弹的控制运动的大小及方向。这就是相应于  $n = -1$  的那个分量, 表示为  $F_{-1}$ , 即是

$$F_{-1} = |F_K| \cdot f_{-1} \cdot e^{-j\omega_x t} \cdot e^{j(\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2})}$$

$$= \frac{|F_K|}{\pi} \frac{\sin(\omega_x t_b) \cdot \sin(\omega_x \frac{\tau}{2})}{\omega_x \frac{\tau}{2}} \cdot e^{j[\omega_x(t_a + \tau_0 + \frac{\tau}{2}) + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}]} \quad (5-5-90)$$

实际上, 这个力分量就是导弹在滚转一周中的平均舵控力, 因为, 按照 (5-5-87) 式及 (5-5-90) 式, 将有

$$F_{-1} = |F_K| \cdot \frac{e^{j(\gamma_0 + \frac{\pi}{2})}}{T} \int_0^T f(t) e^{j\omega_x t} dt$$

这同 § 5-4 中所说过的舵控力的周期平均值是很类似的,只不过是增加了导弹滚转的效应。

由式 (5-5-90) 可知,在直流指令信号的控制之下,导弹在滚转一周中的平均舵控力的大小是

$$|F_{-1}| = |F_K| \cdot \frac{\sin(\omega_x t_b) \cdot \sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{\pi \cdot \omega_x \cdot \frac{\tau}{2}}$$

改变指令信号的脉冲宽度  $t_b$ ,即可改变平均舵控力的幅值大小。当  $t_b = \frac{T}{4}$  即  $\omega_x t_b = \frac{\pi}{2}$  时,平均舵控力达最大值,称为全指令。当  $t_b = 0$  时,为零指令。

此外,这个平均舵控力的方向则决定于单位向量  $e^{j\left[\omega_x\left(t_b + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right]}$  的方向 (图 5-71)。若要改变平均舵控力的方向,有两种方法。第一是改变指令信号的相位  $\omega_x t_b$ ,这个方法可在导弹的飞行控制过程中随时进行。第二是改变时间基准,即改变陀螺安装角  $\gamma_0$ ,这个方法只能在导弹的设计、制造过程中进行。

关于平均舵控力 (5-5-90) 式,还可注意以下事实:第一,电气的及机械的滞后时间  $\tau_0$ ,只影响到平均舵控力矢量的方向,并且当转速  $\omega_x$  增大时,这个影响也将增大,所以通常它是不能忽略的;第二,舵机惯性造成的斜边时间,一方面影响平均舵控力的方向,

另一方面还影响舵控力的幅值。由于  $\frac{\sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_x \frac{\tau}{2}} \approx 1$ ,故  $\tau$  对舵控力幅值的影响常可忽略;但  $\tau$  的存在可能成为导弹转速增大的一个限制因素 (参考 § 5-5-9)。

舵控力  $F_K$  的其他旋转分量对于导弹的运动也是有影响的,将在以后分析。对于一个设计得很好的导弹,这些旋转分量对导弹运动的影响应该小到可以忽略的程度。在这些舵控力的分量中其最大者是相当于  $n = 0$  的分量,特记为  $F_0$ 。

$$F_0 = |F_K| \cdot f_0 e^{j\left(\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right)} = |F_K| \cdot \frac{\omega_x \cdot t_b}{\pi} \cdot e^{j\left(\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

实际上,指令信号的脉冲宽度  $2t_b$  不会超过  $\frac{T}{2}$ ,故  $F_0$  的最大可能的幅值是  $|F_K| \cdot \frac{\omega_x}{\pi} \times \frac{T}{4} = \frac{1}{2} |F_K|$ 。在  $t_b = \frac{T}{4}$  (即全指令) 的条件下,可以做出舵控力  $F_K$  的诸旋转分量的离散频谱,如图 5-72 所示。在中间指令的情况下,整个频谱差不多是均匀地降低,并且在零指令的情况下,整个频谱都是零。这是采用直流信号时,舵控力特性所具有的很大优点。

### 三、最简单的交流指令信号及相应的舵上控制力分析

滚转导弹的指令信号,也可采用交流脉冲调宽式的。交流脉冲指令信号同弹体的滚转也应保持同步。最简单的交流脉宽指令信号,在一个周期时间  $T$  之内,其电压的正负极性只交变一次,见图 5-73(a)。如果在这种信号中的初始相位角  $\omega_x T_0 = 0$ ,则这种信号形

式上同弹体不滚转的导弹的指令信号几乎没有区别 (参 § 5-4)。然而在普遍的情况下, 总有一定的初相位角, 即  $T_0 \neq 0$ 。这时, 仍可将由基准信号所确定的时间区间  $0 \leq t \leq T$  视为一个完整的周期时间。

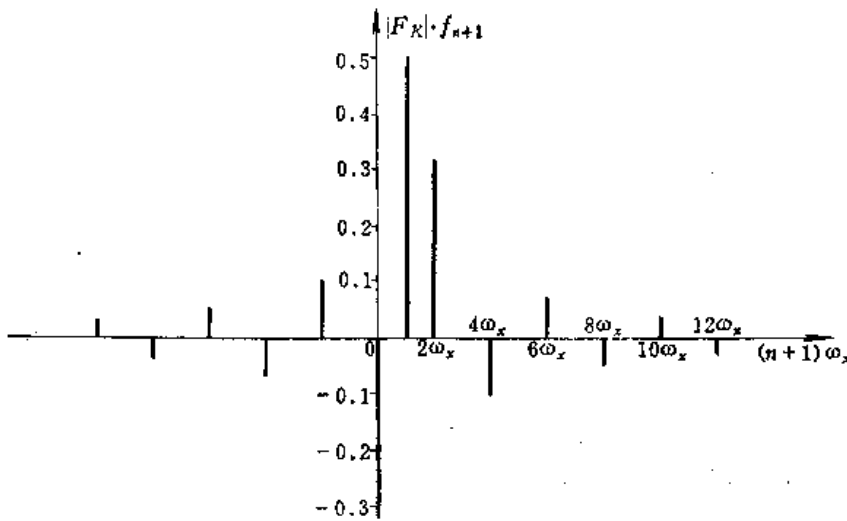


图5-72 直流指令引起的滚转导弹的舵控力的频谱

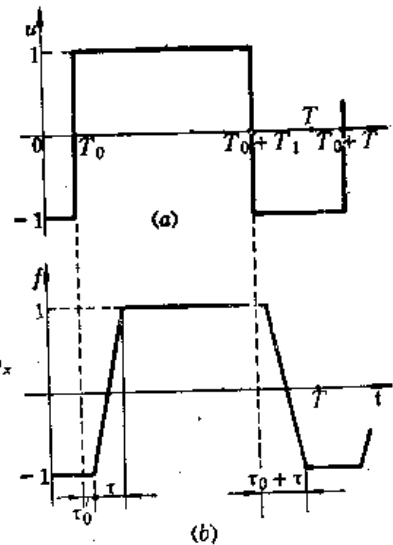


图5-73 最简单的交流脉宽指令信号及舵控力波形

(a) 交流指令信号  $u(t)$ ,  
(b) 相应的无量纲舵控力  $f(t)$ 。

由这样的信号  $u(t)$  所引起的无量纲舵控力  $f(t)$  的波形, 在弹体坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  中观察, 如图5-73(b)所示, 其中的滞后时间  $\tau_0$  及斜边时间  $\tau$ , 仍是由机电惯性引起的。同前类似, 仍将  $f(t)$  分解为傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\omega_s t} \quad (5-5-91)$$

其中各傅氏系数  $f_n$  之值将如下式

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \frac{2T_1 - T}{T} \\ f_n &= \frac{-j}{n\pi} (1 - e^{-jn\omega_s T_1}) \frac{\sin\left(n\omega_s \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_s \frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_s \left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (5-5-92)$$

将上式同 § 5-4 中的 (5-4-10) 及 (5-4-11) 式相比可以看出, 周期开始时间  $T_0$ 、滞后时间  $\tau_0$  及斜边时间  $\tau$  的影响, 反映为 (5-5-92) 中的  $e^{-jn\omega_s \left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right)}$ 。

考虑弹体滚转的影响, 并使  $\omega_s = \omega_x$ , 在准弹体坐标系中观察, 舵控力矢量  $F_K$  即是

$$F_K = |F_K| \left[ \left( \frac{2T_1 - T}{T} \right) e^{jn\omega_s t} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} f_n e^{j(n+1)\omega_s t} \right] \cdot e^{j\left(\gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (5-5-93)$$

由 (5-5-92) 式, 令其中的  $n = -1$ , 即可得  $f(t)$  中以角速度  $-\omega_s$  旋转的分量  $f_{-1} e^{-j\omega_s t}$ 。考虑到弹体的滚转, 并使  $\omega_s = \omega_x$ , 按 (5-5-84) 式即可得到准弹体坐标系中观察到的舵控力  $F_K$  的静止分量  $F_{-1}$ 。

$$\begin{aligned}
 F_{-1} &= |F_K| \cdot f_{-1} e^{-j\omega_x t} \cdot e^{j\left(\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right)} \\
 &= \frac{2|F_K|}{\pi} \frac{\sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_x \frac{\tau}{2}} \sin\left(\omega_x \frac{T_1}{2}\right) e^{j\left[\omega_x \left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2} + \frac{T_1}{2}\right) + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right]} \quad (5-5-94)
 \end{aligned}$$

同直流信号情况下的 (5-5-90) 相类似, 这里的 (5-5-94) 就是交流指令信号在导弹滚转一周中所引起的舵控力  $F_K$  的周期平均值。这个在准弹体坐标系  $o_1 x_3 y_3 z_3$  中不随弹体滚转的舵控力的周期平均值的大小为

$$|F_{-1}| = \frac{2|F_K|}{\pi} \sin\left(\omega_x \frac{T_1}{2}\right) \frac{\sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_x \frac{\tau}{2}}$$

其方向则决定于相位角  $\left[\omega_x \left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2} + \frac{T_1}{2}\right) + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right]$ 。注意,  $T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2} + \frac{T_1}{2}$  乃是舵控力脉冲中心的时刻, 改变它就可以在飞行过程中改变控制运动的方向。

在  $\omega_x \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{2}$  或  $\frac{3\pi}{2}$  的条件下, 舵控力  $F_K$  的周期平均向量的幅值为最大, 即是  $\frac{2}{\pi}|F_K|$  (认为斜边时间  $\tau$  很小,  $\sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right) / \left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right) = 1$ )。这就是全指令情况。可认为这时的指令系数  $K = 1$ 。在此条件下, 舵控力  $F_K$  中包含的各旋转分量的离散频谱如图 5-74。

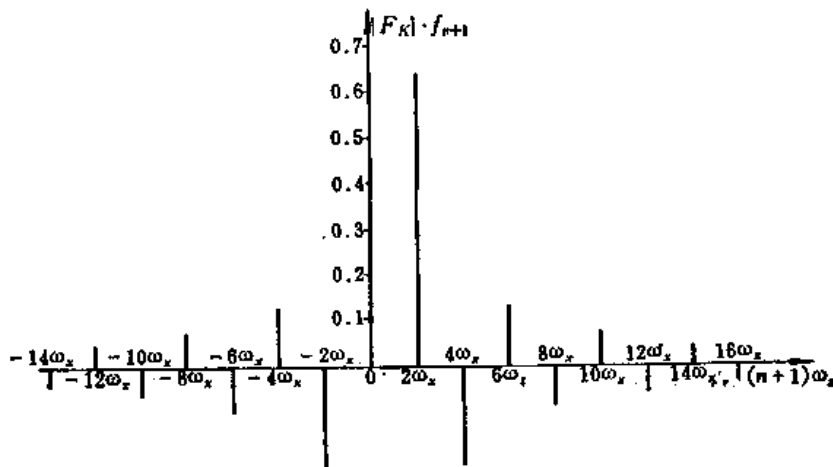


图5-74 最简单的交流指令信号所引起的舵控力的频谱

在  $\omega_x \frac{T_1}{2} = 0$  或  $\pi$  的条件下, 舵控力  $F_K$  的周期平均值为零。这就是零指令的情况。

在零指令情况下,  $F_K$  的周期平均值虽然为零, 其他各旋转分量却不为零。例如, 由 (5-5-93) 式可知, 在  $F_K$  中将出现一个以角速度  $\omega_x$  旋转的分量  $F_0$ , 即

$$F_0 = |F_K| \left( \frac{2T_1 - T}{T} \right) e^{j\omega_x t} \quad (5-5-95)$$

在  $T_1 = 0$  或  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_x}$  的条件下, 这个旋转分量的幅值将达最大。这就是说, 在零指令情况中, 弹体出现高频抖动的可能性最大 (这是所不希望的)。

尤其不好的是, 弹体本身由于制造的缺陷, 总可能有一些质量分布不对称和空气动力不对称, 从而在弹体滚转的过程中, 将会有有一个惯性力 (力矩) 和空气动力 (力矩) 随同弹体以  $\omega_x$  的角速度滚转。而在小指令情况下, 舵控力的主要旋转分量也以  $\omega_x$  滚转, 从而两种干扰是同步的, 将会叠加在一起, 这更是不希望的。

但是, 在采用这种交流指令信号时, 所产生的平均舵控力的最大幅值是直流指令情况中的两倍。这似乎是一个优点。

#### 四、较复杂的交流指令信号及相应的舵控力分析

为了克服上述那种最简单的交流指令信号的缺点, 可以采用较复杂的交流指令信号。若是在一个周期时间  $T$  之内, 使交流指令信号的电压极性正负交变两次, 即给出两个调宽脉冲 (如图 5-75(a) 所示), 则舵控力矢量  $F_K$  的频谱特征将有所改善。为了使信号的处理容易, 可以使信号波形对于周期的中点具有一种特别的反对称关系, 即若不考虑初始时间 ( $T_0 = 0$ ), 则应有下式关系

$$f(t) = -f(T-t) \quad (5-5-96)$$

并且, 在一个周期之内, 第一脉冲的持续时间  $T_1$  应为

$$0 \leq T_1 \leq \frac{T}{2}$$

由这种双脉冲的交流信号所引起的无量纲舵控力  $f(t)$ , 在考虑到机电滞后时间  $\tau_0$  及斜边时间  $\tau$  之后, 其波形如图 5-75(b) 所示。

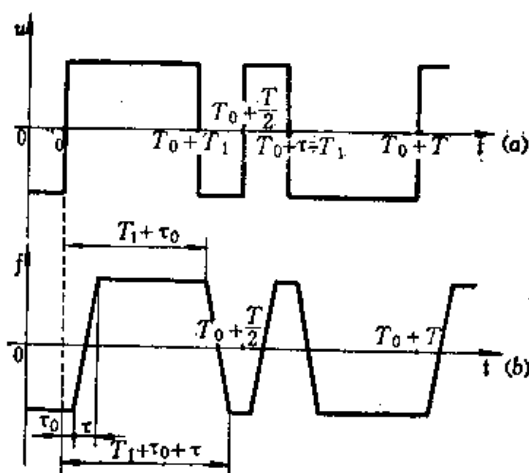


图5-75

(a) 双脉冲的交流指令信号及舵控力波形双脉冲的交流信号  $u(t)$ ; (b) 相应的无量纲舵控力  $f(t)$ 。

考虑到弹体滚转后, 在准弹体坐标系  $O_1x_3y_3z_3$  中观察到的舵控力矢量  $F_K$  仍应按 (5-5-84) 式计算。  $F_K$  是个一面滚转, 一面在正负两极之间跳来跳去的矢量。

为了分析的方便, 可先假定  $T_0 = 0$ ; 这时, 在  $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$  的周期时间之内, 可对  $f(t)$  做出如下的描述:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 2 \frac{t - \left(\tau_0 + \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} && \text{当 } \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + \tau \\
 f(t) &= 1 && \text{当 } \tau_0 + \tau \leq t \leq T_1 + \tau_0 \\
 f(t) &= -2 \frac{t - \left(T_1 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} && \text{当 } T_1 + \tau_0 \leq t \leq T_1 + \tau_0 + \tau \\
 f(t) &= -1 && \text{当 } T_1 + \tau_0 + \tau \leq t \leq \frac{T}{2} + \tau_0 \\
 f(t) &= 2 \frac{t - \left(\frac{T}{2} + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} && \text{当 } \frac{T}{2} + \tau_0 \leq t \leq \frac{T}{2} + \tau_0 + \tau \\
 f(t) &= 1 && \text{当 } \frac{T}{2} + \tau_0 + \tau \leq t \leq T - T_1 + \tau_0 \\
 f(t) &= -2 \frac{t - \left(T - T_1 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} && \text{当 } T - T_1 + \tau_0 \leq t \leq T \\
 &&& \quad \quad \quad -T_1 + \tau_0 + \tau \\
 f(t) &= -1 && \text{当 } T - T_1 + \tau_0 + \tau \leq t \leq T + \tau_0
 \end{aligned} \tag{5-5-97}$$

仍将  $f(t)$  展开为傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\omega_x t} \tag{5-5-98}$$

其中诸系数  $f_n$  仍按 (5-5-87) 式决定 (注意已取  $\omega_s = \omega_x$ )。经过计算可得相应的傅立叶系数如下

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 0 \\
 f_n &= \frac{1}{n\pi} \left\{ 2 \cos(n\omega_x T_1) - (-1)^n - 1 \right\} \\
 &\quad \times \frac{\sin\left(n\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_x \frac{\tau}{2}} e^{j\left[\omega_x\left(\tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]} \quad (n \neq 0)
 \end{aligned} \tag{5-5-99}$$

于是按 (5-5-84) 式可得舵控力矢量  $F_K$

$$\begin{aligned}
 F_K &= \frac{|F_K|}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2 \cos(n\omega_x T_1) - (-1)^n - 1}{n} \right] \frac{\sin\left(n\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_x \frac{\tau}{2}} \\
 &\quad \times e^{j\left[(n+1)\omega_x t + \omega_x\left(\tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 + \pi\right]}
 \end{aligned} \tag{5-5-100}$$

取  $n = -1$ , 可从有关各式求得舵控力的周期平均向量  $F_{-1}$

$$F_{-1} = |F_K| \cdot f_{-1} e^{-j\omega_x t} \cdot e^{j\left(\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{2|F_K|}{-\pi} \cos(\omega_x T_1) \frac{\sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_x \frac{\tau}{2}} e^{j\left[\omega_x\left(\tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 + \pi\right]} \quad (5-5-101)$$

注意，以上分析是在  $T_0 = 0$  的假定之下导出的。若  $T_0 \neq 0$ ，则为了描述  $f(t)$ ，应以  $t + T_0$  来代替 (5-5-97) 式右端及定义区间中之自变量  $t$ 。将这个  $f(t)$  仍按 (5-5-98) 式展开为傅立叶级数，其中的各傅立叶系数仍如 (5-5-99) 式，只是需要在  $f_*$  之上乘以一个  $e^{j\omega_x T_0}$ 。于是，考虑到初始时间  $T_0 \neq 0$  的情况，舵控力矢量  $F_K$  应为

$$F_K = \frac{|F_K|}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2 \cos(n\omega_x T_1) - (-1)^n - 1}{n} \right] \frac{\sin\left(n\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_x \frac{\tau}{2}} \times e^{j\left[(n+1)\omega_x t + \omega_x\left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 + \pi\right]} \quad (5-5-102)$$

它的周期平均向量是

$$F_{-1} = |F_K| f_{-1} e^{j\omega_x t} \cdot e^{j\left(\omega_x t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2} + \omega_x T_0\right)} \\ = \frac{2|F_K|}{-\pi} \cos(\omega_x T_1) \frac{\sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_x \frac{\tau}{2}} e^{j\left[\omega_x\left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 + \pi\right]} \quad (5-5-103)$$

由式 (5-5-103) 可知，若要改变舵控力周期平均向量的幅值，只需改变指令信号第一脉冲的宽度  $T_1$ 。但若要改变舵控力周期平均向量的方向则需整个改变指令信号的初始相位  $\omega_x T_0$ 。

注意，若  $\omega_x\left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 = 0$  或  $\pi$ ，则  $F_K$  的周期平均矢量  $F_{-1}$  将恰好指向准弹体坐标系中的上方或下方。

机电滞后时间  $\tau_0$  只影响周期平均舵控力矢量  $F_{-1}$  的方向。然而斜边时间  $\tau$  不仅影响  $F_{-1}$  的方向，同时还通过因子  $\sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right) / \left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)$  影响  $F_{-1}$  的幅值；但当  $\omega_x \frac{\tau}{2}$  很小时，此因子趋近于 1。

一般可不考虑斜边时间  $\tau$  对幅值的影响。这时，可认为，当  $\omega_x T_1 = 0$  或  $\pi$  时，舵控力的周期平均矢量  $F_{-1}$  具有最大的幅值，这时的指令称为“全指令”。而当  $\omega_x T_1 = \frac{\pi}{2}$  时， $F_{-1}$  的幅值为零；这时的指令称为“零指令”。 $\omega_x T_1$  取其他任何值时的指令都称为中间指令。

这种在一个周期之内包含两个调宽脉冲的交流指令信号所引起的舵控力矢量  $F_K$  的频谱如图 5-76 所示。

从图 5-76 可以看出，在小指令情况下，舵控力矢量  $F_K$  中的主要旋转分量的角速度是  $-\omega_x$ （因此不会同质量偏心及空气动力偏心的干扰力或力矩同步起来），并且其幅值也不太大。从减小弹体高频抖动的方面来说，是较为有利的。



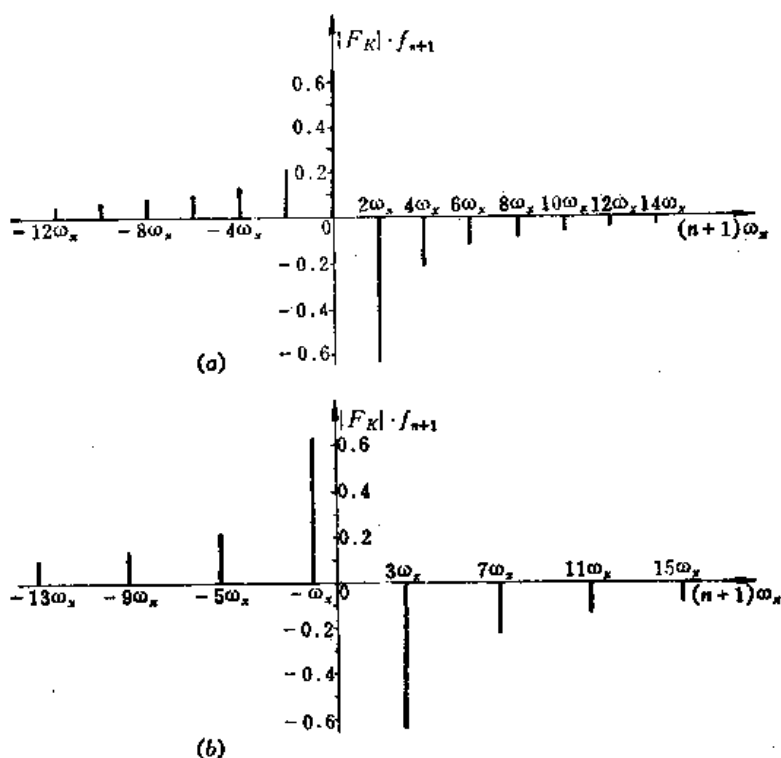


图5-76 双脉冲的交流指令在滚转导弹上形成的舵控力的频谱  
(a) 全指令情况；(b) 零指令情况。

### 五、舵控力的周期平均矢量 $F_{-1}$ 及指令系数 $K$

上面已经说过，在受脉冲调宽指令信号控制的导弹上，所形成的舵控力  $F_K$  是由无穷多的旋转分量组合成的；从准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中看来，其中只有一个分量的旋转角速度为零，这就是滚转导弹的舵控力的周期平均矢量  $F_{-1}$ ，有时称为“平均舵控力”。平均舵控力对于导弹的控制运动起着决定的作用。至于舵控力中的其他旋转分量，在正确设计的导弹中，对于控制运动的影响应该微弱到可以略而不计。

不同形式的指令信号，在同样结构的滚转导弹上所能引起的平均舵控力  $F_{-1}$  的最大幅值  $|F_{-1, \max}|$  是不一样的。在采用直流信号的情况下

$$|F_{-1, \max}| = \frac{|F_K|}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\omega_x \cdot \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_x \cdot \frac{\tau}{2}} \approx \frac{|F_K|}{\pi} \quad (5-5-104)$$

在采用交流指令信号（单脉冲的或双脉冲的）的情况下

$$|F_{-1, \max}| = 2 \frac{|F_K|}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\omega_x \cdot \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_x \cdot \frac{\tau}{2}} \approx \frac{2|F_K|}{\pi} \quad (5-5-105)$$

从导弹系统的角度来看，平均舵控力概念的运用有一个不便之处，就是在舵机位于导弹重心后方的通常情况下，导弹的控制运动的方向同它的平均舵控力  $F_{-1}$  的方向总是相反的。为了避免这个不方便之点，引入了指令系数  $K$  的概念。

在导弹滚转的情况下，可把“指令系数” $K$ 定义为：平均舵控力矢量 $F_{-1}$ 对于其最大幅值 $|F_{-1, \max}|$ 之比的负值，即

$$K = -\frac{F_{-1}}{|F_{-1, \max}|} \quad (5-5-106)$$

就是说，滚转导弹的指令系数 $K$ 是一个复数（或矢量），它的模反映着控制的强度，而方向则恰好代表着控制运动的方向。

按此定义，由式(5-5-90)、(5-5-94)及(5-5-101)可分别得到各种情况下的指令系数。

在直流信号情况下

$$K = \sin(\omega_x t_b) e^{j\left[\omega_x(t_a + \tau_0) + \gamma_0 - \frac{\pi}{2}\right]} \quad (5-5-107)$$

在交流单脉冲信号情况下

$$K = \sin\left(\omega_x \frac{T_1}{2}\right) e^{j\left[\omega_x\left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2} + \frac{T_1}{2}\right) + \gamma_0 - \frac{\pi}{2}\right]} \quad (5-5-108)$$

在交流双脉冲信号情况下

$$K = \cos(\omega_x T_1) e^{j\left[\omega_x\left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 - \pi\right]} \quad (5-5-109)$$

或者，一般地说来，应有

$$K = |K| \cdot e^{j(\Gamma - \pi)} \quad (5-5-110)$$

这里的 $\Gamma$ 即平均舵控力 $F_{-1}$ 在 $P$ 平面中的投影的相位角（见图5-77）；即，在直流信号情

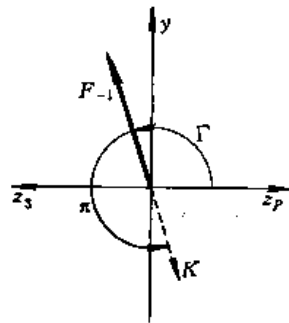


图5-77 平均舵控力 $F_{-1}$ 及指令系数 $K$ 的方向（从弹顶向弹尾望去）

况下

$$\Gamma = \omega_x(t_a + \tau_0) + \gamma_0 + \frac{\pi}{2} \quad (5-5-111)$$

在交流（单脉冲）信号情况下

$$\Gamma = \omega_x\left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2} + \frac{T_1}{2}\right) + \gamma_0 + \frac{\pi}{2} \quad (5-5-112)$$

在交流（双脉冲）信号情况下

$$\Gamma = \omega_x\left(T_0 + \tau_0 + \frac{\tau}{2}\right) + \gamma_0 \quad (5-5-113)$$

当然，指令系数 $K$ 也可在直角坐标系中分解，即

$$K = K_x + jK_y \quad (5-5-114)$$

其中  $K_x$  及  $K_y$  ——  $K$  矢量在  $P$  平面的  $Oz_p$  及  $Oy_p$  轴 (或准弹体坐标系  $O_1y_3$  及  $(-O_1z_3)$  轴) 上的投影, 或分别称为“偏航指令系数”及“俯仰指令系数”, 即

$$\left. \begin{aligned} K_x &= |K| \cos(\Gamma + \pi) \\ K_y &= |K| \sin(\Gamma + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (5-5-115)$$

应注意, 综合的指令系数  $K$  的幅值不可能超过 1, 即总有

$$|K| \leq 1 \quad (5-5-116)$$

因此, 在俯仰及偏航的指令系数  $K_y$  及  $K_x$  之间, 应有如下的制约关系

$$|K_y|^2 + |K_x|^2 \leq 1 \quad (5-5-117)$$

### § 5-5-7 滚转导弹弹体环节的传递函数及控制运动

#### 一、运动方程及传递函数

前已导出滚转导弹的运动方程组 (5-5-37)~(5-5-39)。这个方程组是以舵控力  $F_K$  及重力加速度  $g$  为输入量的。在舵控力  $F_K$  具有如式 (5-5-84) 所示的复杂形式的情况下, 很难把导弹的平飞运动及扰动控制运动分开, 并且很难利用这些方程来分析导弹系统。

为此, 对于滚转导弹也引入了指令系数  $K$  的概念, 见 (5-5-106) 式。

在正确设计的导弹上, 在舵控力  $F_K$  中只有其周期平均矢量  $F_{-1}$  对于导弹的运动起实际控制作用; 其他一切旋转分量对于导弹运动的影响都微弱到可以忽略不计的程度。在这样的条件下, 可定义

$$F_K \triangleq F_{-1} = |F_{-1, \max}| \cdot K \quad (5-5-118)$$

于是方程组 (5-5-37)~(5-5-39) 可写为

$$\begin{cases} A - B - C = 0 & (5-5-119) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + (a_1 - ja_6) \frac{dA}{dt} + (a_2 + ja_7) B = a_3 K & (5-5-120) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{dC}{dt} + (a_4 - ja_8) B = a_5 K + j \frac{g}{v} & (5-5-121) \end{cases}$$

这里  $a_3$  及  $a_5$  ——重新定义的动力系数, 即

$$a_3 = \frac{-L_K}{J_x} |F_{-1, \max}|$$

$$a_5 = \frac{|F_{-1, \max}|}{mv}$$

假定存在着一个平飞指令  $K_{\pi\pi}$  可使导弹基本上沿直线平飞弹道运动。并认为总的指令  $K$  乃是由平飞指令  $K_{\pi\pi}$  及扰动控制指令  $\Delta K$  组合而成, 即

$$K = K_{\pi\pi} + \Delta K$$

并且导弹的总运动乃是由平飞运动及扰动控制运动组合而成, 即

$$A = A_{\pi\pi} + \Delta A; \dots\dots$$

从方程组 (5-5-119)~(5-5-121) 中, 把扰动控制运动方程组分出来, 并略去增量符号  $\Delta$  而写成

$$\begin{cases} A - B - C = 0 & (5-5-122) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + (a_1 - ja_6) \frac{dA}{dt} + (a_2 + ja_7) B = a_3 K & (5-5-123) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{dC}{dt} + (a_4 - ja_8) B = a_5 K & (5-5-124) \end{cases}$$

同时，对于滚转导弹，可定义复合的方向角变化率  $\dot{C}$

$$\dot{C} = \dot{\psi} + j\dot{\theta} \quad (5-5-125)$$

复合的法向过载  $n$

$$n = -n_x + jn_y \quad (5-5-126)$$

和复合的位移

$$D = -z + jy \quad (5-5-127)$$

注意，其中  $n_x$  及  $z$  的正方向仍是  $o_1 z_3$  轴的正方向。

并有如下的运动学关系

$$\dot{C} = \frac{d}{dt} C \quad (5-5-128)$$

$$n = \frac{v}{g} \dot{C} \quad (5-5-129)$$

$$\frac{d}{dt} D = vC \quad (5-5-130)$$

利用类似于 § 5-1 中的方法，可以对滚转导弹的弹体环节求出其传递函数如下

$$W_K^A(p) = \frac{a_3 p + a_3 a_4 - a_2 a_5 - j(a_3 a_8 + a_6 a_7)}{p\{p^2 + p[(a_1 + a_4) - j(a_6 + a_8)] + a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j(a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)\}} \quad (5-5-131)$$

$$W_K^B(p) = \frac{a_5 \left( p + a_1 + \frac{a_3}{a_5} - ja_6 \right)}{p^2 + p[(a_1 + a_4) - j(a_6 + a_8)] + a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j(a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)} \quad (5-5-132)$$

$$W_K^C(p) = \frac{-a_6 \left[ p^2 + (a_1 - ja_6)p + a_2 - \frac{a_3 a_4}{a_5} + j \left( a_7 + \frac{a_3 a_8}{a_5} \right) \right]}{p\{p^2 + p[(a_1 + a_4) - j(a_6 + a_8)] + a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j(a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)\}} \quad (5-5-133)$$

$$W_K^{\dot{C}}(p) = p \cdot W_K^C(p) \quad (5-5-134)$$

$$W_K^n(p) = \frac{v}{g} W_K^{\dot{C}}(p) \quad (5-5-135)$$

$$W_K^D(p) = v \cdot W_K^C(p) \cdot \frac{1}{p} \quad (5-5-136)$$

以上这些传递函数，同传统的传递函数不同，其分子多项式及分母多项式中的系数都是复数。其物理意义无非就是把俯仰和偏航两个方向上的运动因素综合在一个式子里了。反过来，要从这些传递函数中把俯仰运动及偏航运动分解开来，也是容易办到的。

## 二、滚转导弹传递函数的分析

滚转导弹弹体环节的传递函数 (5-5-131)~(5-5-136), 同传统的传递函数形式不同。为了理解这种以复数为系数的传递函数的物理意义, 并在实践中运用它们, 首先需要把它们分解为普通的以实数为系数的传递函数。

例如, 对于复方向角变化率  $\dot{c}$  的传递函数  $W_{\dot{c}}(p)$ , 由 (5-5-133) 及 (5-5-134) 乃是

$$W_{\dot{c}}(p) = \frac{-a_5 \left[ p^2 + (a_1 - ja_6)p + a_2 - \frac{a_3 a_4}{a_5} + j \left( a_7 + \frac{a_3 a_8}{a_5} \right) \right]}{p^2 + p [(a_1 + a_4) - j(a_6 + a_8)] + a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j(a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)} \quad (5-5-137)$$

注意到  $W_{\dot{c}}(p)$  的分母, 就是滚转导弹自由运动的特征多项式 [参考 (5-5-52) 式]。所以,  $W_{\dot{c}}(p)$  的分母可表为  $(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)$ 。也就是说,  $W_{\dot{c}}(p)$  具有两个极点  $\lambda_1$  及  $\lambda_2$ , 它们并不共轭, 这是同传统的情况不一致的主要之处。

关于  $W_{\dot{c}}(p)$  的分子, 也可以利用 § 5-5-5 中的方法分解为  $(p - \gamma_1)(p - \gamma_2)$ ,  $\gamma_1$  及  $\gamma_2$  就是  $W_{\dot{c}}(p)$  的零点, 也是互不共轭的。通过具体计算可知

$$\gamma_{1,2} = -\frac{a_1 - ja_6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{P' + jQ'} \quad (5-5-138)$$

其中

$$P' = 4 \left( -\frac{a_3 a_4}{a_5} - a_2 \right) + a_1^2 - a_6^2$$

$$Q' = -4 \left( a_7 + \frac{a_3 a_8}{a_5} + \frac{a_1 a_6}{2} \right)$$

对于常见的舵机装在弹体重心后方的无尾式布局的反坦克导弹, 其稳定性不太大并且具有适当的操纵性, 经常有

$$P' > 0, \text{ 及 } Q' < 0,$$

并且

$$|Q'| \ll P'$$

这时, 可将 (5-5-138) 式表为

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ a_1 \pm \sqrt{\frac{R' + P'}{2}} \right] + \frac{j}{2} \left[ a_6 \pm \sqrt{\frac{R' - P'}{2}} \right] \quad (5-5-139)$$

其中

$$R' = \sqrt{P'^2 + Q'^2}$$

式 (5-5-139) 的计算较繁, 或可借用 § 5-5-5 中计算特征根的近似方法, 可得

$$\gamma_{1,2} = \sigma'_{1,2} + j\omega'_{1,2} \quad (5-5-140)$$

其中  $\sigma'_{1,2}$ ——零点  $\gamma_{1,2}$  的实部,

$$\sigma'_{1,2} \approx \frac{-a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{P'}}{2} = \frac{-a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_3 a_4}{a_5} - a_2 + \frac{a_1^2 - a_6^2}{4}}$$

$\omega'_{1,2}$ ——零点  $\gamma_{1,2}$  的虚部,

$$\omega'_{1,2} \approx \frac{a_6}{2} \pm \frac{1}{4} \frac{Q'}{\sqrt{P'}} = \frac{a_6}{2} \mp \frac{a_7 + \frac{a_3 a_8}{a_5} + \frac{a_1 a_6}{2}}{2 \sqrt{\frac{a_3 a_4}{a_5} - a_2 + \frac{a_1^2 - a_6^2}{4}}}$$

知道了极点和零点, 即可将  $W_{\dot{c}}(p)$  表为

$$W_K^{\dot{c}}(p) = -a_5 \frac{(p - \gamma_1)(p - \gamma_2)}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)} \quad (5-5-141)$$

它的极、零点分布如图 5-78 所示。

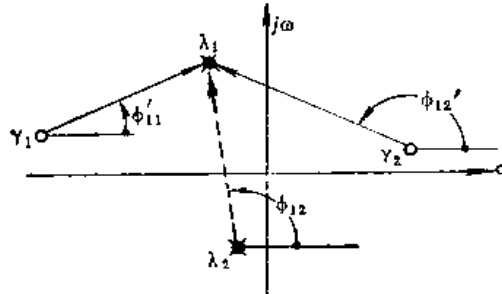


图5-78 传递函数 $W_K^{\dot{c}}(p)$ 的极、零点分布

为了对传递函数 $W_K^{\dot{c}}(p)$ 进行分析, 最好将它表为最简分式之和的形式, 即

$$W_K^{\dot{c}}(p) = \frac{\dot{c}_1}{p - \lambda_1} + \frac{\dot{c}_2}{p - \lambda_2} \quad (5-5-142)$$

其中  $\dot{c}_1$  及  $\dot{c}_2$ ——常数, 在已知极、零点的情况下易于通过下式求得

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= -a_5 \left\{ \frac{(p - \gamma_1)(p - \gamma_2)}{p - \lambda_2} \right\}_{p=\lambda_1} = \frac{-a_5(\lambda_1 - \gamma_1)(\lambda_1 - \gamma_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= -a_5 \sqrt{\frac{[(\sigma_1 - \sigma'_1)^2 + (\omega_1 - \omega'_1)^2] \cdot [(\sigma_1 - \sigma'_2)^2 + (\omega_1 - \omega'_2)^2]}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}} e^{j(\phi'_{11} + \phi'_{12} - \phi_{12})} \end{aligned}$$

这里  $\phi'_{11}$ 、 $\phi'_{12}$ 、 $\phi_{12}$ ——从  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\lambda_2$  到  $\lambda_1$  的辐角, 如图 5-78 所示;

$$\phi'_{11} = \tan^{-1} \frac{\omega_1 - \omega'_1}{\sigma_1 - \sigma'_1}$$

$$\phi'_{12} = \tan^{-1} \frac{\omega_1 - \omega'_2}{\sigma_1 - \sigma'_2}$$

$$\phi_{12} = \tan^{-1} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

类似地

$$\dot{c}_2 = \frac{-a_5(\lambda_2 - \lambda'_1)(\lambda_2 - \lambda'_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$= -a_5 \sqrt{\frac{[(\sigma_2 - \sigma'_1)^2 + (\omega_2 - \omega'_1)^2] \cdot [(\sigma_2 - \sigma'_2)^2 + (\omega_2 - \omega'_2)^2]}{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2}} e^{j(\phi'_{21} + \phi'_{22} - \phi_{21})}$$

这里

$$\phi'_{21} = \tan^{-1} \frac{\omega_2 - \omega'_1}{\sigma_2 - \sigma'_1}$$

$$\phi'_{22} = \tan^{-1} \frac{\omega_2 - \omega'_2}{\sigma_2 - \sigma'_2}$$

$$\phi_{21} = \tan^{-1} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

当然, 常数  $\dot{c}_1$  及  $\dot{c}_2$  也可在直角坐标中分解为实部与虚部之和, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_1 &= \dot{C}_{1,Re} + j\dot{C}_{1,Im} \\ \dot{C}_2 &= \dot{C}_{2,Re} + j\dot{C}_{2,Im} \end{aligned} \right\}$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{C}_{1,Re} &= |\dot{C}_1| \cdot \cos(\phi'_{11} + \phi'_{12} - \phi_{12}) \\ \dot{C}_{1,Im} &= |\dot{C}_1| \cdot \sin(\phi'_{11} + \phi'_{12} - \phi_{12}) \\ \dot{C}_{2,Re} &= |\dot{C}_2| \cdot \cos(\phi'_{21} + \phi'_{22} - \phi_{21}) \\ \dot{C}_{2,Im} &= |\dot{C}_2| \cdot \sin(\phi'_{21} + \phi'_{22} - \phi_{21}) \end{aligned}$$

对于式(5-5-142)中的第一部分  $\frac{\dot{C}_1}{p - \lambda_1}$ , 可以在  $\lambda_1$  的共轭位置上添加一个可消极点  $\bar{\lambda}_1$ , 从而可以把它看做是两个二阶振荡环节的并联, 即

$$\begin{aligned} \frac{\dot{C}_1}{(p - \lambda_1)} &= \frac{\dot{C}_1(p - \bar{\lambda}_1)}{(p - \lambda_1)(p - \bar{\lambda}_1)} \\ &= \frac{(\dot{C}_{1,Re} + j\dot{C}_{1,Im})(p - \sigma_1 + j\omega_1)}{p^2 - 2\sigma_1 p + \sigma_1^2 + \omega_1^2} \\ &= \dot{C}_{1,Re} \cdot W_{K,1,Re}^{\dot{C}} + j\dot{C}_{1,Im} \cdot W_{K,1,Im}^{\dot{C}} \end{aligned} \quad (5-5-143)$$

其中

$$\begin{aligned} W_{K,1,Re}^{\dot{C}} &= \frac{p - \sigma_1 - \omega_1 \tan(\phi'_{11} + \phi'_{12} - \phi_{12})}{p^2 - 2\sigma_1 p + \sigma_1^2 + \omega_1^2} \\ W_{K,1,Im}^{\dot{C}} &= \frac{p - \sigma_1 + \omega_1 \cot(\phi'_{11} + \phi'_{12} - \phi_{12})}{p^2 - 2\sigma_1 p + \sigma_1^2 + \omega_1^2} \end{aligned}$$

类似地, 对于式(5-5-142)中的第二部分可得

$$\begin{aligned} \frac{\dot{C}_2}{(p - \lambda_2)} &= \frac{\dot{C}_2(p - \bar{\lambda}_2)}{(p - \lambda_2)(p - \bar{\lambda}_2)} \\ &= \dot{C}_{2,Re} \cdot W_{K,2,Re}^{\dot{C}} + j\dot{C}_{2,Im} \cdot W_{K,2,Im}^{\dot{C}} \end{aligned} \quad (5-5-144)$$

其中

$$\begin{aligned} W_{K,2,Re}^{\dot{C}} &= \frac{p - \sigma_2 - \omega_2 \tan(\phi'_{21} + \phi'_{22} - \phi_{21})}{p^2 - 2\sigma_2 p + \sigma_2^2 + \omega_2^2} \\ W_{K,2,Im}^{\dot{C}} &= \frac{p - \sigma_2 + \omega_2 \cot(\phi'_{21} + \phi'_{22} - \phi_{21})}{p^2 - 2\sigma_2 p + \sigma_2^2 + \omega_2^2} \end{aligned}$$

于是, 式(5-5-142)可重写为

$$\begin{aligned} W_K^{\dot{C}}(p) &= -a_F \{ \dot{C}_{1,Re} W_{K,1,Re}^{\dot{C}} + \dot{C}_{2,Re} \cdot W_{K,2,Re}^{\dot{C}} \\ &\quad + j [ \dot{C}_{1,Im} W_{K,1,Im}^{\dot{C}} + \dot{C}_{2,Im} \cdot W_{K,2,Im}^{\dot{C}} ] \} \end{aligned} \quad (5-5-145)$$

这就是说, 以复数为系数的传递函数  $W_K^{\dot{C}}(p)$  实质上乃是由四个二阶振荡环节并联组成的(参见图 5-79), 而且其中有两个环节的输出超前  $90^\circ$ , 反映着弹体滚转引起的俯仰同偏航的交连效应。

式(5-5-145)是为了说明物理概念而导出的, 若是为了进行计算, 也可直接利用式(5-5-142)。

式(5-5-142)也有明显的物理意义。若对滚转导弹的弹体环节输入一个单位脉冲作用的指令, 即

$$K(t) = \delta(t)$$

于是导弹即被激起一个运动, 而有

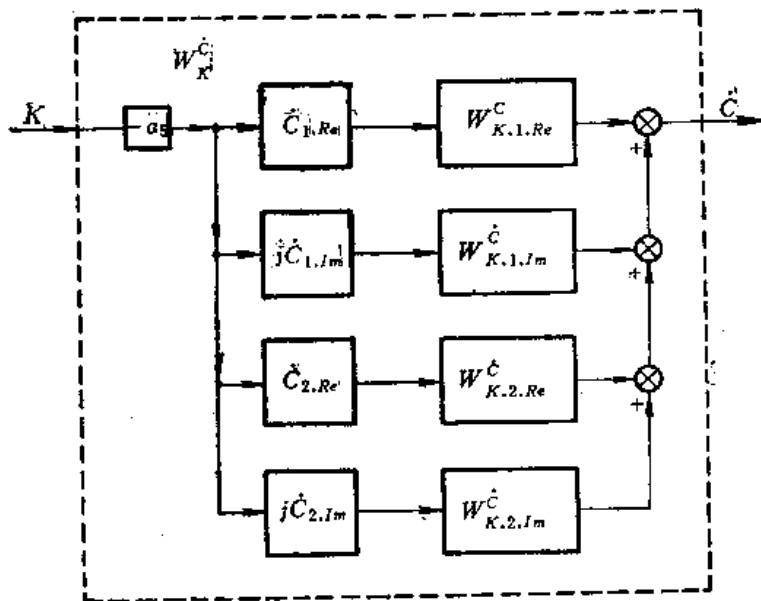


图5-79 把传递函数 $W_K^{\dot{c}}$ 分解为四个二阶振荡环节的并联

$$\dot{c}(p) = 1 \cdot W_K^{\dot{c}}(p) = \frac{\dot{C}_1}{p - \lambda_1} + \frac{\dot{C}_2}{p - \lambda_2}$$

进行拉氏反变换而有

$$\dot{c}(t) = \dot{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5-5-146)$$

显然，这不过就是在某种初始条件下的自由运动。对于复攻角 $B$ 的这种自由运动已在§5-5-4中研究过，它乃是两个旋转矢量的合成。对于复方向角变化率 $\dot{c}$ 的这种自由运动，其性状也大体如此。(5-5-146)式就是滚转导弹弹体环节的脉冲过渡函数，传递函数 $W_K^{\dot{c}}(p)$ 则是它的拉氏变换。

### 三、稳态的扰动控制运动

根据上面对滚转导弹弹体环节的分析，可以想象得到，如果对导弹施加一个其指令系数 $K$ 为阶跃变化的控制指令，那么导弹的响应运动在过渡过程中将是相当复杂的。导弹的复攻角 $B$ 及复方向角变化率 $\dot{c}$ 将在某个稳态矢量附近进行复杂的旋转。然后，在过渡过程充分阻尼后，它们将靠近该稳态矢量。

详尽地分析运动的过渡过程将是复杂和冗长的。从实用的角度考虑，可以着重地研究它的稳态运动。

滚转导弹在受到一个其指令系数 $K$ 的大小及方向都不变的稳恒控制指令的作用之后，其稳态响应运动将决定于弹体环节的放大系数

$$\dot{c}_{\text{稳}} = K \cdot k_K^{\dot{c}} \quad (5-5-147)$$

滚转导弹弹体环节的放大系数 $k_K^{\dot{c}}$ ，可由传递函数 $W_K^{\dot{c}}(p)$ ，令其中 $p \rightarrow 0$ 可得

$$k_K^{\dot{c}} = W_K^{\dot{c}}(p) \Big|_{p=0} = \frac{+a_5 \left[ \left( \frac{a_3 a_4}{a_5} - a_2 \right) - j \left( a_7 + \frac{a_3 a_8}{a_5} \right) \right]}{a_2 + a_1 a_4 - a_8 a_6 + j (a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)} \quad (5-5-148)$$



$$\text{或} \quad k_{\dot{K}} = \frac{-a_6 \lambda_3 \lambda_4}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (5-5-149)$$

而关于过载的放大系数则是

$$k_K^a = \frac{v}{g} k_{\dot{K}} \quad (5-5-150)$$

应注意, 放大系数  $k_{\dot{K}}$  是一个复数, 最好将它写成极坐标中的标准形式如下

$$k_{\dot{K}} = |k_{\dot{K}}| \cdot e^{j\gamma_K} \quad (5-5-151)$$

$$\text{其中} \quad |k_{\dot{K}}| = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8} \sqrt{\frac{1 + (a_5 a_7 + a_3 a_8)^2 / (a_3 a_4 - a_2 a_5)^2}{1 + (a_7 - a_4 a_8 - a_1 a_8) / (a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8)}} \quad (5-5-152)$$

$$\gamma_K = \tan^{-1} \frac{-(a_5 a_7 + a_3 a_8)}{a_3 a_4 - a_2 a_5} - \tan^{-1} \frac{a_7 - a_4 a_8 - a_1 a_8}{a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8} \quad (5-5-153)$$

可将滚转导弹弹体环节的放大系数同无滚转情况下的放大系数进行比较。通常情况下, 式 (5-5-152) 中的开方号内的部分很接近于 1, 并且  $a_2 \gg a_6 a_8$ 。从无滚转情况下的式 (5-1-84) 可以看出

$$|k_{\dot{K}}| \approx k_{\dot{K}}^0 \quad (5-5-154)$$

所以, 导弹滚转后, 弹体环节的放大系数模值同无滚转情况下相差不多 (只需注意其中的  $a_3$  及  $a_5$  定义不同)。

另一方面必须注意到, 由于相角  $\gamma_K$  的存在, 使得弹体的稳态响应运动的方向同输入的指令系数  $K$  的方向发生偏差。所以, 必须认真研究一下, 为了使弹体在某个预期的方向上进行稳态运动, 应该如何调整输入的指令。

由式 (5-5-147)、(5-5-151) 及 (5-5-110) 可得

$$\dot{c}_{\text{稳态}} = |K| \cdot |k_{\dot{K}}| \cdot e^{j(\gamma_K + \Gamma - \pi)} \quad (5-5-155)$$

下面以直流型式的指令信号为例来分析这个问题。在 § 5-5-6 所做的规定之下, 将式 (5-5-111) 代入式 (5-5-155) 之中, 于是

$$\dot{c}_{\text{稳态}} = |K| \cdot |k_{\dot{K}}| \cdot e^{j\left[\gamma_K + \omega_x(t_d + \tau_0) + \gamma_0 - \frac{\pi}{2}\right]} \quad (5-5-156)$$

在上式中, 若能使

$$\gamma_K + \omega_x \tau_0 + \gamma_0 - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (5-5-157)$$

则可得

$$\dot{c}_{\text{稳态}} = |K| \cdot |k_{\dot{K}}| \cdot e^{j\omega_x t_d} \quad (5-5-158)$$

在这种情况下, 导弹稳态运动  $\dot{c}_{\text{稳态}}$  的方向, 就可对应于直流指令信号的脉冲中心的相位角  $\omega_x t_d$ 。条件式 (5-5-157) 是可以实现的, 为此只需适当地调整陀螺安装角  $\gamma_0$ , 使得

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{2} - \omega_x \tau_0 - \gamma_K \quad (5-5-159)$$

即可。

在采用交流单脉冲指令的情况下, 可使

$$\gamma_0 = -\frac{\pi}{2} - \omega_x \left( \tau_0 + \frac{\tau}{2} \right) - \gamma_K^c \quad (5-5-160)$$

导弹的稳态响应运动是

$$\dot{c}_{\text{稳}} = |K| \cdot |k_K^c| \cdot e^{j\omega_x (T_0 + \frac{T_1}{2})} \quad (5-5-161)$$

稳态运动  $\dot{c}_{\text{稳}}$  的方向仍是对应于信号脉冲中心的相位角  $\omega_x (T_0 + \frac{T_1}{2})$ 。

在采用交流双脉冲指令的情况下, 仍可使

$$\gamma_0 = \pi - \omega_x \left( \tau_0 + \frac{\tau}{2} \right) - \gamma_K^c \quad (5-5-162)$$

即可使导弹的稳态响应运动是

$$\dot{c}_{\text{稳}} = |K| \cdot |k_K^c| e^{j\omega_x T_0} \quad (5-5-163)$$

可见, 这时, 稳态响应运动  $\dot{c}_{\text{稳}}$  的方向, 只决定于指令信号的初始相位角  $\omega_x T_0$ 。

### § 5-5-8 滚转导弹弹体环节的频率特性

在传统的自动调节理论中, 在研究环节的频率特性时, 总是宁愿以  $e^{j\omega t}$  做为输入信号, 而不以  $\cos \omega t$  或  $\sin \omega t$  做输入信号(尽管信号  $e^{j\omega t}$  的物理意义有些抽象, 不像  $\sin \omega t$  那样直观, 但这样运算方便)。

可是, 在研究滚转导弹弹体环节的频率特性时, 以  $e^{j\omega t}$  做为输入量, 却有非常直观的意义, 那就意味着, 把一个旋转的矢量做为输入。若使输入指令信号  $u(t)$  的相位 ( $T_0$  或  $T_0$ ) 以  $\omega$  的角频率变化, 于是, 所产生的平均舵控力矢量  $F_{-1}$ , 或指令系数  $K$ , 即成为一个以角速度  $\omega$  旋转的矢量。这样就给弹体环节输入了一个地地道道的  $e^{j\omega t}$  的控制信息。这时, 弹体环节的稳态响应运动同  $\omega$  的关系, 就是弹体环节的频率特性。

由弹体环节的传递函数 (5-5-131) ……等, 令其中的  $p = j\omega$ , 即得相应的频率特性。例如, 由 (5-5-137) 或 (5-5-141) 可得

$$W_K^c(j\omega) = \frac{-a_5 \left[ \omega^2 - a_6 \omega + \frac{a_3 a_4}{a_5} - a_2 + j \left( -a_1 \omega + a_7 + \frac{a_3 a_8}{a_5} \right) \right]}{\omega^2 - (a_6 + a_8) \omega + a_2 + a_1 a_4 - a_6 a_8 + j [-(a_1 + a_4) \omega + (a_7 - a_4 a_6 - a_1 a_8)]}$$

或者

$$W_K^c(j\omega) = \frac{-a_5 [-\sigma_3 + j(\omega - \omega_3)] [-\sigma_4 + j(\omega - \omega_4)]}{[-\sigma_1 + j(\omega - \omega_1)] [-\sigma_2 + j(\omega - \omega_2)]} \quad (5-5-164)$$

或者

$$W_K^c(j\omega) = -a_5 \sqrt{\frac{[\sigma_3^2 + (\omega - \omega_3)^2][\sigma_4^2 + (\omega - \omega_4)^2]}{[\sigma_1^2 + (\omega - \omega_1)^2][\sigma_2^2 + (\omega - \omega_2)^2]}} \cdot e^{j(\gamma_3 + \gamma_4 - \gamma_1 - \gamma_2)} \quad (5-5-165)$$

其中

$$\gamma_1 = \tan^{-1} \frac{\omega - \omega_1}{-\sigma_1}$$

$$\gamma_2 = \tan^{-1} \frac{\omega - \omega_2}{-\sigma_2}$$

$$\gamma_3 = \tan^{-1} \frac{\omega - \omega_3}{-\sigma_3}$$

$$\gamma_4 = \tan^{-1} \frac{\omega - \omega_4}{-\sigma_4}$$

由(5-5-165)式可知,在滚转弹体环节的幅频特性曲线上,将出现两个峰,它们位于 $\omega = \omega_1$ 及 $\omega = \omega_2$ 附近。因此,对于滚转弹体,应使输入信号的频率避开弹体快进动和慢进动的频率 $\omega_1$ 及 $\omega_2$ 。

利用滚转弹体的频率特性,可以分析和估计舵控力矢量中的诸旋转分量对于弹体运动的影响;还可以分析弹体质量分布不对称和空气动力外形不对称所造成的扰动力(力矩)对于弹体运动的影响。

### § 5-5-9 滚转导弹的转速选择

如前所说,滚转导弹的转速 $\omega_r$ ,对于弹体自由运动的特征以及平均舵控力矢量的形成,都有重要的影响。此外,滚转导弹的转速还涉及其他一些问题,在总体设计工作中必须全面地考虑。

下面首先分析转速太高或太低对于导弹性能的不利影响,从而为转速上限及转速下限的确定提供根据。然后,还要分析一下转速变化太剧烈将会带来的影响。

#### 一、转速太低的影响

##### (一) 抽样频率的考虑

如§ 5-4-2中所说,脉冲调宽式控制指令的脉冲每秒重复次数 $\frac{1}{T}$ 决定着导弹制导系统对于输入信息的抽样频率;同时,为了保证足够精确地复现输入的信息,抽样频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 应不小于输入信息的频谱的两倍。

在导弹滚转的情况下,控制指令的脉冲重复周期 $T$ 同导弹滚转一周的时间是一致的;所以抽样频率 $\omega_s$ 同导弹滚转角速率 $\omega_x$ 也是一致的。因此,必须保证导弹滚转角速度 $\omega_x$ 不小于误差信息的频谱的有效宽度 $\omega_T$ 的两倍

$$\omega_x > 2\omega_T \quad (5-5-166)$$

##### (二) 避免滚转共振的考虑

前面说过,弹体的自由运动中包含快进动和慢进动两个频率—— $\omega_1$ 及 $\omega_2$ ,在转速不太快的情况下,由(5-5-66)式

$$\omega_1 \approx \frac{J_x}{J_z} \cdot \frac{\omega_x}{2} + \omega_n \quad (5-5-167)$$

$$\omega_2 \approx \frac{J_x}{J_z} \cdot \frac{\omega_x}{2} - \omega_n \quad (5-5-168)$$

为了避免共振,不允许有任何扰动因素以靠近 $\omega_1$ 或 $\omega_2$ 的频率加在弹体上。

在舵控力矢量中含有频率 $\omega_x$ 的旋转矢量。此外,弹体的质量分布不对称及空气动力外形不对称,在导弹滚转过程中也将形成一些干扰力(力矩),以 $\omega_x$ 为频率作用于弹体。这些是最危险的干扰因素。为了避开这些因素的影响,应使

$$\omega_x \gg \omega_1$$

令

$$\omega_x \geq 3\omega_1$$

于是, 由 (5-5-167) 式可使

$$\omega_x \geq \frac{3}{1 - \frac{3}{2} \frac{J_x}{J_z}} \omega_n \quad (5-5-169)$$

在舵控力矢量的旋转分量中, 还含有以频率  $(-\omega_x)$  旋转的成分, 这也是比较危险的因素, 故应使

$$|-\omega_x| \gg |\omega_x|$$

即

$$\omega_x \gg \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{J_x}{J_z}} \omega_n$$

但当 (5-5-169) 满足时, 上式自然满足, 故可不再单独考虑。

## 二、转速太高的影响

### (一) 动态稳定性的考虑

前已说过, 对于具有一定的静稳定性的弹体, 主要由于滚转中的马格努斯力矩的影响, 在转速太高的情况下, 将出现动态不稳定性。为了保证弹体在运动中的动态稳定性, 在设计中必须满足条件式 (5-5-78), 即

$$\omega_x < \frac{\omega_n}{C} \quad (5-5-170)$$

式中  $C$ ——动稳定区边界的斜率, 按 (5-5-78) 式确定。

或者, 在弹翼的差偏角不变的情况下, 必须使

$$\omega_x < \omega_{\text{临界}} \quad (5-5-171)$$

其中  $\omega_{\text{临界}}$ ——按式 (5-5-82) 或 (5-5-83) 确定。

### (二) 制导精确性的考虑

要实现精确的制导, 首先必须按照导引规律的要求, 精确地产生平均舵控力  $F_{-1}$ 。然而, 如果导弹的转速太高, 则平均舵控力  $F_{-1}$  的精确程度在大小及方向两个方面都将受到影响。

先看  $\omega_x$  对于  $F_{-1}$  的方向影响。由式 (5-5-159)、(5-5-160) 及 (5-5-162) 可知, 为了在预期的方向上使导弹产生控制运动, 要适当地调整陀螺安装角  $\gamma_0$ , 而且  $\gamma_0$  一经调好即不再改变。这个  $\gamma_0$  的确定是同转速  $\omega_x$  有关的。但是, 在实际的飞行过程中,  $\omega_x$  是会发生变化的。在制造导弹的过程中, 只能根据某个额定的或平均的转速  $\omega_{x \cdot \text{平均}}$  来确定  $\gamma_0$ 。于是, 在  $\omega_x$  发生变化的情况下, 陀螺安装角  $\gamma_0$  的实际值同应有的准确值之间是有差别的, 可称之为陀螺安装角误差  $\Delta\gamma_0$ 。显然, 在直流信号时

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma_0 &= (\omega_x - \omega_{x \cdot \text{平均}}) \cdot \tau_0 \\ \Delta\gamma_0 &= (\omega_x - \omega_{x \cdot \text{平均}}) \left( \tau_0 + \frac{\tau}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-5-172)$$

在交流信号时

实际转速的变化，主要是由于导弹的速度变化而引起的；并且，在弹翼的差偏角已定的情况下，转速  $\omega_x$  大体上同导弹速度  $v$  成正比，即

$$\frac{\omega_{x \cdot \max}}{v_{\max}} = \frac{\omega_{x \cdot \text{平均}}}{v_{\text{平均}}} = \frac{\omega_{x \cdot \min}}{v_{\min}}$$

于是

$$\Delta\omega_x = \omega_{x \cdot \max} - \omega_{x \cdot \text{平均}} = \left( \frac{v_{\max} - v_{\text{平均}}}{v_{\max}} \right) \omega_{x \cdot \max} \quad (5-5-173)$$

但是，速度变化范围  $\Delta v = 2(v_{\max} - v_{\text{平均}})$  是有一定限度的；在此情况下，最大转速  $\omega_{x \cdot \max}$  愈大，转速的变化范围  $\Delta\omega_x$  也就愈大，陀螺安装角的误差  $\Delta\gamma_0$  也就愈大。这样一来，导弹的最大转速  $\omega_{x \cdot \max}$  愈大，导弹的平均舵控力的方向就愈不精确。

针对这种由于转速  $\omega_x$  的变化而引起的陀螺安装角误差，可以在制导系统中进行“动态补偿”。即根据基准信号脉冲的时间间隔，可以测出导弹滚转一周所需的时间  $T$ ，从而可测

算出导弹的实际转速  $\omega_x = \frac{2\pi}{T}$ ，以及应有的“动态补偿角”  $\Delta\gamma_0$ 。

$$\Delta\gamma_0 = \left( \frac{2\pi}{T} - \omega_{x \cdot \text{平均}} \right) \cdot (\tau_0) \quad (\text{直流信号})$$

或

$$\Delta\gamma_0 = \left( \frac{2\pi}{T} - \omega_{x \cdot \text{平均}} \right) \left( \tau_0 + \frac{\tau}{2} \right) \quad (\text{交流信号})$$

再通过适当的电路把这个算出的  $\Delta\gamma_0$  加在指令信号脉冲的初相位上。这些措施，增加了系统的复杂性，并由于元件性能、加工、装配等原因，在周期时间  $T$  的测算上总是有误差的；此外，在滞后时间  $\tau_0$ 、斜边时间  $\tau$  上也是有散布的。所以，完全补偿是不可能的。

再看转速  $\omega_x$  对于平均舵控力  $F_{\perp}$  的幅值精确性的影响。先讨论直流指令的情况。指令系数  $K$  的幅值决定于

$$|K| = \sin(\omega_x t_b)$$

精确的控制，大都是在小指令下进行的。脉冲宽度  $2t_b$  愈小，指令幅值  $|K|$  就愈小。但若  $2t_b < \tau$ ，则舵机动作不能到位，舵控力的波形不完整，于是，在  $0 \leq t_b < \frac{\tau}{2}$  的区间内，总有  $|K| \approx 0$ 。这种情况称为小指令丢失。可见，小指令丢失的范围是

$$|K| \leq \sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right)$$

因此，在斜边时间  $\tau$  已定的情况下，转速  $\omega_x$  愈大，小指令丢失的情况愈严重。例如，假若  $\tau = 10$  毫秒  $= 0.01$  秒，导弹转速为每秒 10 转，即  $\omega_x = 20\pi$  弧度/秒，则小指令丢失的范围将达  $|K| = \sin\left(\omega_x \frac{\tau}{2}\right) = 0.309$ 。

为了减轻小指令丢失问题，除了提高舵机的动作速度以减少斜边时间  $\tau$  之外，就是要限制导弹转速  $\omega_x$ 。

在每周只含有一个脉冲的交流指令情况下，也是转速  $\omega_x$  愈大时，小指令丢失问题愈严重。

在每周含有两个脉冲的交流指令情况下，小指令丢失问题不严重，只是在全指令附近，有一个指令变化不连续区。这一点可由分析式 (5-5-110) 而得知。这种情况可能也是

促使人们采用这种指令信号型式的一个原因，尽管这种信号型式比较复杂。

### 三、转速变化率 $\dot{\omega}_x$ 的影响

前面已经说过较大的转速  $\omega_x$  的变化将产生较大的陀螺安装角误差  $\Delta\gamma_0$ 。现在要说的，是转速  $\omega_x$  的变化太快也是不好的，特别在采用直流指令信号进行制导的情况中。

采用直流指令信号的制导系统的优点是简单，特别是，同采用交流指令信号的系统相比，前者只需要两根导线，后者却需要三根导线来传递指令。

在采用交流指令的系统中，三根导线的用处是：第一根是地线，第二根用来同地线一起构成从地面控制装置向飞行中的导弹发出控制指令的回路，第三根用来同地线一起构成从导弹向地面控制装置发回基准脉冲信号的回路。

但在采用直流指令的系统中，却能够减去一根导线。这是由于，直流指令信号中的控制信号脉冲或有或无，脉冲宽度时间  $2t_0$  最多只占去周期时间的一半，因此，有可能采用“时间分隔”的办法，利用周期中的另一半时间来传递基准脉冲信号。具体地讲，就是要在基准脉冲可能出现的时间区间内，使导线空出来准备传递基准脉冲信号，这一个时间区间称为“封锁区”。更确切地讲，常常是要求在弹体滚转角  $\gamma = \gamma_0$  附近的一定区间内，设置“封锁区”，就是说，把封锁区设在下面的滚转角区间之内：

$$\gamma_0 - \gamma_H \leq \gamma \leq \gamma_0 + \gamma_H$$

如果基准信号能够在封锁区内出现，那么，就能保证被地面控制装置接收到，而不会被控制指令所干扰。但是，如果基准脉冲信号在封锁区之外出现，那么，由于这时导线上可能正在传输控制指令信号，基准脉冲信号就被干扰了。有时，称这种现象为“丢码”。丢码之后，控制过程就会发生混乱。

在导弹弹体的转速  $\omega_x$  变化太剧烈的情况下就可能出现这种丢码现象。因为，在导弹转速  $\omega_x$  变化的情况下，弹上陀螺所发出的每个基准脉冲信号之间的时间间隔  $T$  是不一样的。根据连续测量到的几个周期  $T$  的值，即可推算出本周期内导弹转速  $\omega_x$  的可能值，并预测出下一个基准脉冲可能出现的时刻，从而在该时刻附近设置封锁区。但是，如果导弹的转速变化太剧烈，这种推算的结果将是不可靠的，于是可能产生基准脉冲越出封锁区的现象。

封锁区设置得宽一些，对于转速变化率的限制也可以宽一些。但是封锁区的存在，意味着在这一段时间内，弹上舵机不允许动作，从而丧失了一部分控制功能。为了不致影响对导弹的总的制导能力，总是在可能出现使导弹下降的控制信号的区间上设置封锁区；由于导弹在重力的作用下本身就具有以  $1g$  的加速度向下运动的能力，所以封锁掉一部分使导弹下降的控制信号并不会影响导弹的总控制性能。但是，超过这个范围，过分地扩大封锁区，当然就不合适了。所以在导弹的总体设计工作中应该使导弹的转速变化率  $\dot{\omega}_x$  同信号封锁区的宽度协调起来。

根据如上的分析，在具体设计滚转导弹的时候，可以绘出一个转速  $\omega_x(t)$  的变化曲线（如图 5-80 所示）。从启控点以后， $\omega_x(t)$  曲线的变化范围不应超出允许的上、下边界，同时曲线的斜率不应超出允许的转速变化率  $\dot{\omega}_x$ 。

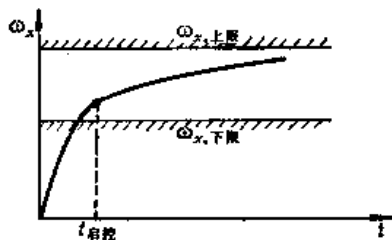


图5-80 导弹的转速  $\omega_x$  的允许变化范围示意图

## 第六章 自动导引反坦克导弹的设计问题

自动导引反坦克导弹是近年来新出现的一种导弹，其设计理论还不成熟。另一方面，在反飞机导弹上，自动导引却已经用得很普遍了，这方面的经验和理论是可以借鉴的。当然，这种借鉴也必须结合反坦克导弹的特点。

### § 6-1 自动导引反坦克导弹的基准弹道

#### § 6-1-1 自动导引反坦克导弹的弹道类型

目前已知的几种自动导引的反坦克导弹，其弹道可归纳为两种方案。

第一种弹道方案——抛射弹道加末段制导。弹道可分为两大段。第一段，用火炮、火箭或弹道式导弹把反坦克导弹抛射至目标上空，并且在预定的时刻启动自动导引头对目标进行搜索；第二段，自动导引头捕获目标后，按预定的导引规律对导弹进行制导。

第二种弹道方案——巡航弹道加末段制导。弹道也可分为两大段。第一段，导弹从发射器中射出后，以预定的高度及航向巡航飞行，到达目标上空，在巡航飞行中，可利用自动驾驶仪或遥控方法进行中程制导，导弹的高度及航向也可能有比较复杂的变化；第二段，末段制导。

不论那种类型的弹道，按长度说，第一段弹道都显著地长于第二段弹道。但按重要性说，第二段弹道是完成任务的关键阶段，显然是更重要的，并且整个系统的运动在末段制导过程中也最复杂。因此，第一段弹道的设计，应该以保证末段制导阶段能够顺利进行为前提。然而，第一段弹道也是重要的，因为，只有在弹上导引头捕获目标以后，才能开始对导弹进行末段制导；捕获目标时导弹的运动情况，就成为末段制导的初始条件。此外，由于第一段弹道很长，它的设计方案对于导弹系统的重量及能量消耗情况，是具有决定性影响的。

#### § 6-1-2 捕获目标的条件

导弹的自动导引头具有一定的作用距离和一定的视场。在导引系统正常工作的条件下，只要目标位于导引头的视场和有效作用距离之内，弹上导引头即可捕获目标。导弹同目标的位置关系见图 6-1 所示。

设目标位于地面上的  $O_T$  点，取此点为坐标系  $O_Txyz$  的原点。

若要求在目标上空高度为  $H$  的水平面（以后简称“ $H$ 平面”）上，弹上导引头应捕获目标。导弹在向地面降落过程中，达到  $H$  平面时具有某个弹道倾角  $\Theta_B$ ，并且在稳定的飞行过程中，弹体的俯仰角  $\beta_B$  应该同弹道倾角  $\Theta_B$  一致。 $\overline{BO_T}$  线同  $H$  平面之夹角即为  $(-\Theta_B)$ 。又若导弹导引头的视场角为  $2\alpha$ 。那么，以  $O_TB$  为轴线、以  $O_T$  为顶点、以  $2\alpha$  为锥顶角可做出一个圆锥体，它的表面同  $H$  平面相交，通常交线为一个椭圆。如果导弹以  $\Theta_B$  的弹道倾

角落入这个椭圆之内，导引头就有可能捕获目标。所以，可以把这个圆锥体的表面称为“捕获漏斗”，把它同 $H$ 平面相交而得的椭圆称为“捕获漏斗的入口”。利用解析几何，可以在 $O_Txyz$ 坐标系中用下面的方程式来描述这个捕获漏斗的界面

$$\begin{aligned} & (\sin^2\Theta_B - \cos^2\Theta_B \tan^2\alpha)x^2 \\ & + \sin 2\Theta_B(1 + \tan^2\alpha)xy \\ & + (\cos^2\Theta_B - \sin^2\Theta_B \tan^2\alpha)y^2 + z^2 = 0 \end{aligned} \quad (6-1-1)$$

为了求得捕获漏斗在 $H$ 平面上的入口，可将方程(6-1-1)同下式联立

$$y = H \quad (6-1-2)$$

即可得到

$$z^2 = ax^2 + bx + c \quad (6-1-3)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= -(\sin^2\Theta_B - \cos^2\Theta_B \tan^2\alpha) \\ b &= -\sin 2\Theta_B(1 + \tan^2\alpha)H \\ c &= (\sin^2\Theta_B \tan^2\alpha - \cos^2\Theta_B)H^2 \end{aligned}$$

当系数 $a < 0$ 时，(6-1-3)式表示椭圆；但当 $a = 0$ 时，为抛物线；当 $a > 0$ 时，为双曲线（只有一个分支有意义）。事实上，这三种情况相当于

椭圆： $a < 0$ ，或 $\alpha < \Theta_B$ ；

抛物线： $a = 0$ ，或 $\alpha = \Theta_B$ ；

双曲线： $a > 0$ ，或 $\alpha > \Theta_B$ 。

在捕获漏斗的入口为椭圆的情况下，椭圆中心的坐标是 $(-\frac{b}{2a}, H, 0)$ ，并且椭圆中心在 $O_Tx$ 轴上的坐标 $x_B$ 可以化为

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -H \frac{\tan\Theta_B(1 + \tan^2\alpha)}{\tan^2\Theta_B - \tan^2\alpha}$$

椭圆的半长轴则为

$$\overline{AB} = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = H \cdot \frac{\tan\alpha(1 + \tan^2\Theta_B)}{\tan^2\Theta_B - \tan^2\alpha}$$

椭圆的半短轴则为

$$\overline{BD} = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}} = H \cdot \frac{\tan\alpha \sqrt{(\tan^2\Theta_B + \tan^4\alpha)(1 + \tan^2\Theta_B)}}{\tan^2\Theta_B - \tan^2\alpha}$$

为了使捕获漏斗起作用，还必须保证此椭圆内的任何一点至 $O_T$ 的距离不大于导引头的有效作用距离 $R$ ；即位于以 $O_T$ 为中心， $R$ 为半径的球面之内，此球面之方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

这个球面同 $H$ 平面相交出一个圆曲线，可称为有效作用圆

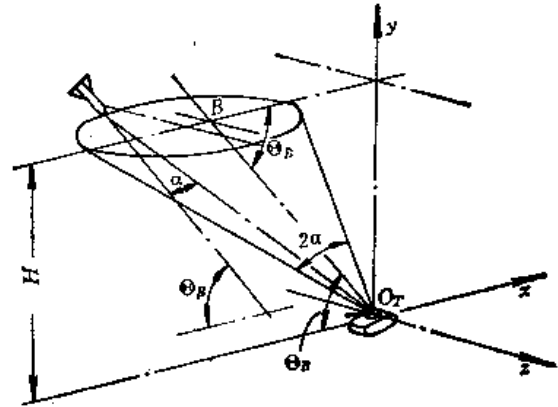


图6-1 捕获目标的条件



$$x^2 + z^2 = R^2 - H^2 \quad (6-1-4)$$

捕获漏斗的口部只有位于此圆的内部才是有效的。由此可知，增大 $H$ 平面的高度，虽然可以增大椭圆的长轴及短轴；但是，也将缩小有效作用圆的半径。因此存在着一个临界的 $H$ ，超过此高度将使捕获漏斗的口部椭圆不完整。为了使此捕获漏斗的口部椭圆完整，必须满足下式

$$H \leq \frac{R(\tan \Theta_R - \tan \alpha)}{\sqrt{(1 + \tan^2 \Theta_R)(1 + \tan^2 \alpha)}} \quad (6-1-5)$$

$H$ 平面的高度还受到气象条件的限制。在采用光学导引头的情况下，云层的存在对于导引头的工作是重要的干扰。云层高度是按某种概率分布的， $H$ 平面的高度愈低，受到云层干扰的概率就愈小。从这一方面说来，使 $H$ 平面高度较低是有利的。

在捕获漏斗的口部为抛物线或双曲线（一个分支）的情况下，这个口部曲线是不封闭的，但是考虑到导引头的有效作用圆的存在，漏斗的口部仍应是封闭的。因此，漏斗的有效口部应由式（6-1-3）及（6-1-4）所形成的两条曲线联合组成（见图6-2）。

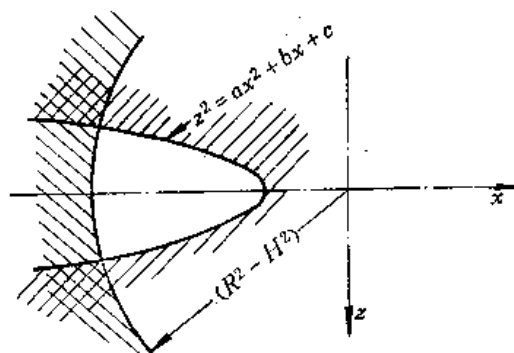


图6-2 捕获漏斗的非椭圆形入口

### § 6-1-3 基准弹道的分析

自动导引的反坦克导弹在末段制导段的弹道是变化多端的。首先，目标的运动和机动可能引起弹道的变化。其次，启控点位置及导弹速度方向的不同，也将使导引弹道有所不同。但是，下节将要指出，正确设计的导弹的导引弹道应能逼近于直线。所以，在多种多样的弹道情况中，选择直线弹道做为基准弹道是适当的。

在最简单的弹道情况中，若目标位于 $O_T$ 点静止不动（参图6-1），导弹在 $B$ 点捕获目标并随即启控，于是导弹在整个末段制导过程中能够实现直线飞行；这时，还应假定没有任何随机干扰，导弹的制导系统的作用就是补偿重力加速度在弹道法线方向上的分量的作用，以使导弹维持直线飞行。可把这样的直线弹道情况，做为基准弹道，并考察导弹沿此弹道运动时的速度变化规律。

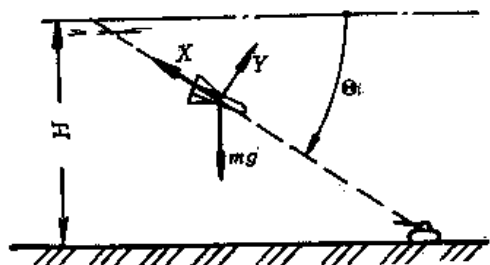


图6-3 末段制导的基准弹道

一般情况下，在末段制导阶段中，导弹是做无动力飞行的，这时，在弹道切线方向，只有空气阻力 $X$ 及重力分量的作用（参看图6-3），导弹沿直线弹道运动的方程为

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \Theta - \frac{C_x S \rho}{2m} v^2 \quad (6-1-6)$$

注意，由于导弹是俯冲运动，故 $\Theta < 0$ 。

在合理设计的末段制导弹道中，反坦克导弹应该以亚音速飞行，或者也可能以单纯的超音速飞行，应该极力避免导弹在制导阶段中以跨音速飞行。事实上，由于末段制导阶段的弹道长度有限，为了取得足够的制导时间，希望反坦克导弹的速度不要太高；因此，以亚音速进行制导飞行，将是较为合理的。

在亚音速飞行的情况下，方程(6-1-6)易于解出，这时可认为空气阻力系数 $C_x$ 是常数。式中的空气密度 $\rho$ 是随高度变化的。但在高度不大的情况下，可认为 $\rho$ 也是常数。

若初始条件为：当 $t = t_B$ 时， $v = v_B$ ；这里，下角标《B》代表导弹启控点或捕获点，于是，对方程(6-1-6)分离变量并进行积分，可得到下面的结果

$$\frac{v - v_G}{v + v_G} = \frac{v_B - v_G}{v_B + v_G} \cdot \exp\left[-\frac{2g \cdot |\sin\Theta|}{v_G}(t - t_B)\right] \quad (6-1-7)$$

式中 $v_G$ ——特征速度，即在倾角为 $\Theta$ 的弹道上，使重力分量同空气阻力达到平衡时的导弹速度，即

$$v_G = \sqrt{\frac{2mg \cdot |\sin\Theta|}{C_x S \rho}} \quad (6-1-8)$$

也可将(6-1-7)式改写为对于速度 $v$ 的显式

$$v(t) = v_G \frac{1 + \frac{v_B - v_G}{v_B + v_G} \cdot \exp\left[-\frac{2g \cdot |\sin\Theta|}{v_G}(t - t_B)\right]}{1 - \frac{v_B - v_G}{v_B + v_G} \cdot \exp\left[-\frac{2g \cdot |\sin\Theta|}{v_G}(t - t_B)\right]} \quad (6-1-9)$$

可见，按照 $v_B < v_G$ 、 $v_B = v_G$ 或 $v_B > v_G$ 三种不同情况，导弹在直线弹道上将做加速、等速或减速飞行，并以 $v_G$ 为飞行速度的极限。

对(6-1-9)式进行积分，可以获得导弹的行程随时间变化的规律。但是，从设计工作的角度考虑，更加希望了解导弹的飞行速度同导弹的高度 $y$ 之间的关系。为此，可对方程(6-1-6)进行变量变换。

考虑如下的变量关系

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{及} \quad \frac{dy}{ds} = \sin\Theta$$

式中 $s$ ——导弹的行程；

$y$ ——导弹的高度。

于是，方程(6-1-6)可变化为

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dy} = -g + 2 \frac{C_x S \rho}{2m |\sin\Theta|} \left(\frac{v^2}{2}\right) \quad (6-1-10)$$

上式是一个一阶的线性微分方程，其初始条件为：当 $y = H$ 时， $v = v_B$ 。于是，方程之解为

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_G^2}{2} + \left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_G^2}{2}\right) \cdot \exp\left[-\frac{2g}{v_G^2}(H - y)\right] \quad (6-1-11)$$

或者

$$v(y) = \sqrt{v_G^2 + (v_B^2 - v_G^2) \cdot \exp\left[-\frac{2g}{v_G^2}(H - y)\right]} \quad (6-1-12)$$

在上面的分析中，认为空气密度  $\rho$  是常数。事实上， $\rho$  是高度  $y$  的函数。一般认为，若高度  $y$  在 10 公里以下，可用下式表达

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp[-\beta y] \quad (6-1-13)$$

式中  $\rho_0$ ——地面标准的空气密度， $\rho_0 = 1.25$  千克/米<sup>3</sup>；

$\beta$ ——系数， $\beta = 1.059 \times 10^{-4}$  1/米。

若高度  $y$  更低，还可利用下式

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta y} \quad (6-1-14)$$

当  $y \leq 2000$  米时，此式误差不大于 2%。

考虑到空气密度随高度的变化之后，(6-1-10) 式可表为

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dy} - \frac{2g}{v_c^2} \left(\frac{1}{1 + \beta y}\right) \frac{v^2}{2} = -g \quad (6-1-15)$$

其中  $v_c$ ——按地面标准的空气密度  $\rho_0$  算出的特征速度。若初始条件仍为：当  $y = H$  时， $v = v_B$ ，则

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \left( \frac{1 + \beta y}{1 - \frac{\beta v_c^2}{2g}} \right) + \left[ \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_c^2}{2} \left( \frac{1 + \beta y}{1 - \frac{\beta v_c^2}{2g}} \right) \right] \cdot \left( \frac{1 + \beta y}{1 + \beta H} \right)^{\frac{2g}{\beta v_c^2}} \quad (6-1-16)$$

#### § 6-1-4 抛射弹道的分析

最简单的弹道方案就是用火炮把反坦克导弹抛射到捕获漏斗的入口处。当射程要求在 20 公里以下时，采用火炮抛射的弹道方案，没有特殊的困难，此外，火炮弹道具有良好的射击准确性，能以相当高的概率射入捕获漏斗。

火炮抛射的弹道方案的主要缺点是在发射时，导弹及弹上仪表要受到巨大的过载，必须进行特殊的设计来保证仪表工作的可靠性；此外，为了保证结构的强度，导弹可能较重。

为了利用火炮外弹道学的成果来设计自动导引反坦克导弹的抛射弹道，需要了解它的基本概念。

由火炮外弹道学可知，以抛物弹道在空气中飞行的弹体，其射程  $X$  决定于初速  $v_0$ 、射角  $\Theta_0$  及弹道系数  $C$ 。

弹道系数  $C$  是表明空气阻力使弹体在飞行中速度不断降低的剧烈程度的参量，定义为

$$C = \frac{iD^2 \times 10^3}{q} \quad (6-1-17)$$

式中  $i$ ——弹形系数，无量纲；

$D$ ——弹径，(米)；

$q$ ——弹重，(千克力)。

因此，弹道系数  $C$  是一个有量纲的物理量，其单位为米<sup>2</sup>/千克力。

弹形系数  $i$  定义为

$$i = \frac{C_x}{C_x^*} \quad (6-1-18)$$

其中  $C_x$ ——实际弹体的空气阻力系数；

$C_x^*$ ——某个标准弹丸的空气阻力系数。

对于各种标准弹丸，规定了它们的空气阻力系数随马赫数而变化的规律  $C_x^*(M)$ ，这些规律特称为“空气阻力定律”。常用的有三种规定——“西亚切定律”、“加尔涅定律”（或称“1930年定律”）及“1943年定律”。关于这三种空气阻力定律所规定的  $C_x^*(M)$  变化规律，参见下表。

$C_x^*$				$C_x^*$				$C_x^*$			
M	西亚切	加尔涅	1943年	M	西亚切	加尔涅	1943年	M	西亚切	加尔涅	1943年
	定律	定律	定律		定律	定律	定律		定律	定律	定律
0.1	0.255	0.185	0.157	1.1	0.639	0.360	0.378	2.1	0.681	0.274	0.309
0.2	0.255	0.185	0.158	1.2	0.690	0.356	0.385	2.2	0.667	0.267	0.303
0.3	0.256	0.185	0.158	1.3	0.718	0.348	0.381	2.3	0.653	0.258	0.297
0.4	0.256	0.185	0.158	1.4	0.731	0.339	0.371	2.4	0.639	0.250	0.292
0.5	0.257	0.185	0.157	1.5	0.734	0.328	0.361	2.5	0.625	0.243	0.287
0.6	0.259	0.185	0.157	1.6	0.734	0.315	0.351	2.6	0.611	0.236	0.283
0.7	0.266	0.185	0.158	1.7	0.728	0.303	0.342	2.7	0.597	0.229	0.279
0.8	0.285	0.185	0.160	1.8	0.718	0.293	0.332	2.8	0.585	0.223	0.277
0.9	0.405	0.208	0.190	1.9	0.707	0.286	0.324	2.9	0.572	0.217	0.273
1.0	0.546	0.358	0.325	2.0	0.694	0.280	0.316	3.0	0.559	0.211	0.270

显然，按照不同的空气阻力定律来计算任何一个实际弹体的弹形系数，将会得到不同的结果，而且在不同的马赫数  $M$  之下，按同一个空气阻力定律所算得的弹形系数也是不同的。因此，应该根据实际弹体的飞行马赫数变化区间，来选择同  $C_x(M)$  的变化规律比较相似的空气阻力定律，并在  $M$  数实际变化区间上取弹形系数的平均值。

例如，某个带尾翼的火箭弹，按三种空气阻力定律分别算出的弹形系数  $i$  的变化情况如下表。

M	弹形系数 $i$		
	按西亚切定律	按加尔涅定律	按1943年定律
0.1	0.980	1.350	1.600
0.5	0.975	1.350	1.600
1.0	0.805	1.230	1.355
1.5	0.595	1.325	1.205

由表可见，按照“加尔涅定律”，在  $M=0.1\sim 2$  的范围内，对于带有弹翼的弹体算出的弹形系数  $i$ ，变化比较平稳。对于反坦克导弹，按照“加尔涅定律”，大约可取其弹形系数为  $i=1.5\sim 2.0$ 。

根据各种标准弹形的空气阻力定律，已经计算出详尽的弹道表。在算出反坦克导弹的弹形系数  $i$  及弹道系数  $C$  之后，即可方便地利用这些弹道表。

在附录六中，列出了一部分按照“加尔涅定律”编出的弹道表。表中，在一系列的射角  $\Theta_0$  和初速  $v_0$  的条件下，给出了射程随弹道系数  $C$  而变化的数据。对于  $v_0$  及  $C$  已定的弹丸， $\Theta_0 = 45^\circ$  的条件可视为最大射程条件；在此条件下所获得的射程就是  $v_0$  及  $C$  已定的弹丸的最大射程。按照“西亚切定律”和“1943年定律”所编制的弹道表，可分别从参考文献〔7〕及〔8〕中找到。

在采用火箭做为抛射手段的情况下，也可以利用这些火炮弹道表来计算末段导引的反坦克导弹的射程。这时，只需把这个用火箭载运的反坦克导弹看做是一个“等效炮弹”。这个等效炮弹的炮口初速  $v_0$ ，就是该火箭的理想速度，可按第三章的公式 (3-2-10) 计算。同时，等效炮弹的弹道系数  $C$ ，就是该火箭在无动力飞行过程中的弹道系数。在最大射程为10公里左右时，利用这一方法计算火箭弹的射程，可以满足初步设计的精度要求。但在射程超过20公里以上时，最好进行一些修正计算〔7〕。

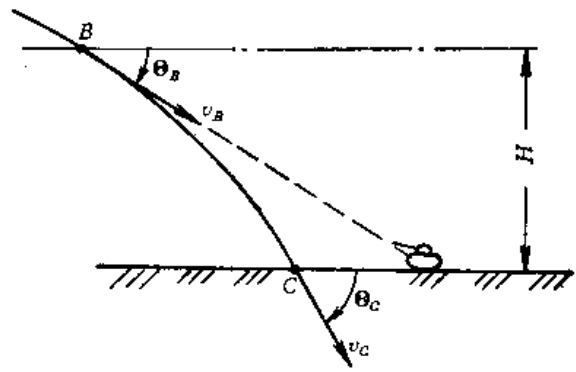


图6-4 根据  $v_C$  及  $\Theta_C$  反求  $v_B$  及  $\Theta_B$

若是把反坦克导弹做为一个炮弹，令其全程无控飞行，利用这些弹道表，还可以知道弹体在落点  $C$  处的末速  $v_C$  及倾角  $\Theta_C$  的大小。根据这些数据，可以反推出反坦克导弹在飞行高度为  $H$  的捕获漏斗入口处的速度  $v_B$  及弹道倾角  $\Theta_B$  (见图 6-4)。

可以利用级数法来进行这种反推计算。根据弹体沿抛射弹道运动的微分方程

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \sin \Theta - \frac{C_x S \rho}{2m} v^2 & (6-1-19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{-g \cos \Theta}{v} & (6-1-20) \end{cases}$$

利用导出 (6-1-10) 式时所采用的变量变换法，可将此方程组变化为

$$\begin{cases} \frac{dE}{dy} = -g - 2 \left( \frac{C_x S \rho}{2m} \right) \frac{E}{\sin \Theta} & (6-1-21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dy} = \frac{-g}{2} \cdot \frac{\cot \Theta}{E} & (6-1-22) \end{cases}$$

其中  $E$ ——单位质量的弹体所具有的动能，即

$$E = \frac{v^2}{2}$$

若已由弹道表查出弹体在抛射弹道的落点处所具有的末速  $v_C$  及落角  $\Theta_C$ ，即可按下面的台劳级数算出弹体在落地前某一高度  $y$  处的单位质量动能  $E(y)$  及弹道倾角  $\Theta(y)$

$$E(y) = E_C + \left( \frac{dE}{dy} \right)_C \cdot y + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 E}{dy^2} \right)_C \cdot y^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 E}{dy^3} \right)_C \cdot y^3 + \dots \quad (6-1-23)$$

$$\Theta(y) = \Theta_C + \left( \frac{d\Theta}{dy} \right)_C \cdot y + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 \Theta}{dy^2} \right)_C \cdot y^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 \Theta}{dy^3} \right)_C \cdot y^3 + \dots \quad (6-1-24)$$

其中  $E_C$ ——在弹体落地时，其单位质量的动能  $E_C = \frac{1}{2} v_C^2$

$\left(\frac{dE}{dy}\right)_c, \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c, \dots$ —— $E$  及  $\Theta$  的各阶导数在落点处 ( $y=0$ ) 之值, 可按方程 (6-1

-21)~(6-1-22) 递推求得如下:

$$\left(\frac{dE}{dy}\right)_c = -g - \left(\frac{C_x S \rho}{m}\right) \frac{E_c}{\sin \Theta_c},$$

$$\left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c = \frac{-g}{2} \cdot \frac{\cot \Theta_c}{E_c},$$

$$\left(\frac{d^2 E}{dy^2}\right)_c = \left(\frac{C_x S \rho}{m}\right) \left[ E_c \frac{\cos \Theta_c}{\sin^2 \Theta_c} \cdot \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c - \frac{1}{\sin \Theta_c} \left(\frac{dE}{dy}\right)_c \right],$$

$$\left(\frac{d^2 \Theta}{dy^2}\right)_c = \frac{g}{2} \left[ \frac{1}{E_c \sin^2 \Theta_c} \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c + \frac{\cos \Theta_c}{E_c^2 \sin \Theta_c} \left(\frac{dE}{dy}\right)_c \right],$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 E}{dy^3}\right)_c &= \left(\frac{C_x S \rho}{m}\right) \frac{1}{\sin \Theta_c} \left[ E_c \frac{\cos \Theta_c}{\sin \Theta_c} \left(\frac{d^2 \Theta}{dy^2}\right)_c - E_c \left[ \frac{2 \cos^2 \Theta_c}{\sin^2 \Theta_c} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 1 \right] \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c^2 - \left(\frac{d^2 E}{dy^2}\right)_c \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 \Theta}{dy^3}\right)_c &= \frac{g}{2} \left[ \frac{1}{E_c \sin^2 \Theta_c} \left(\frac{d^2 \Theta}{dy^2}\right)_c + \frac{2 \sin \Theta_c \cdot \cos \Theta_c}{E_c \sin^4 \Theta_c} \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{E_c^2 \sin^2 \Theta_c} \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c \left(\frac{dE}{dy}\right)_c + \frac{\cos \Theta_c}{E_c^2 \sin \Theta_c} \left(\frac{d^2 E}{dy^2}\right)_c \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \cos \Theta_c}{E_c^3 \sin \Theta_c} \left(\frac{dE}{dy}\right)_c^2 \right], \end{aligned}$$

.....。

当高度  $y$  增大时, 级数 (6-1-23) 等的收敛速度减慢。超过某一个  $y$  值的界限之后, 级数将成为发散的。这在物理上是可以解释的, 因为, 抛射弹道的顶点高度是确定的, 超过顶点高度的  $y$  值, 对于 (6-1-23) 式等是没有意义的。这种情况对于实际应用没有影响。

**例题 6-1** 某自动导引的反坦克导弹, 其参量  $\frac{C_x S \rho}{m} = 3.0 \times 10^{-4} \text{米}^{-1}$ , 在抛射弹道的落点  $C$ , 已知其速度  $v_c = 200 \text{米/秒}$ , 弹道倾角  $\Theta_c = -45^\circ$  (注意负号)。求此弹体在弹道的下落段上, 在  $y = 1000$  米处的速度及弹道倾角。

**解** 第一步, 求落点动能  $E_c$

$$E_c = \frac{v_c^2}{2} = \frac{1}{2} \times 200^2 = 2 \times 10^4 \text{米}^2/\text{秒}^2。$$

第二步, 求出各阶导数在  $C$  点之值

$$\left(\frac{dE}{dy}\right)_c = -9.8 - 3 \times 10^{-4} \times \frac{2 \times 10^4}{(-0.707)} = -1.315 \text{米/秒}^2,$$

$$\left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c = \frac{-9.8}{2} \times \frac{(-1)}{2 \times 10^4} = 2.45 \times 10^{-4} \text{米}^{-1},$$

以下直接给出结果

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2 E}{dy^2}\right)_c &= 15.2 \times 10^{-4} \text{ 秒}^{-2}, \\ \left(\frac{d^2 \Theta}{dy^2}\right)_c &= 13.6 \times 10^{-8} \text{ 米}^{-2}, \\ \left(\frac{d^3 E}{dy^3}\right)_c &= -3.33 \times 10^{-6} \text{ 米}^{-1} \text{ 秒}^{-2}, \\ \left(\frac{d^3 \Theta}{dy^3}\right)_c &= 7.2 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-3}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

第三步, 按式 (6-1-23) 计算  $E(y)|_{y=1000}$

$$\begin{aligned}E|_{y=1000} &= E_c + \left(\frac{dE}{dy}\right)_c \cdot y + \dots\dots = 2 \times 10^4 + (-1.315) \times 1000 + \frac{1}{2} (1.52 \times 10^{-4}) \\ &\quad \times 1000^2 + \frac{1}{6} (-3.33 \times 10^{-6}) \times 10^9 + \dots\dots \approx 18890 \text{ 米}^2/\text{秒}^2\end{aligned}$$

于是  $v|_{y=1000} = \sqrt{2E} = \sqrt{2 \times 18890} = 194 \text{ 米/秒}。$

第四步, 按式 (6-1-24) 计算  $\Theta(y)|_{y=1000}$

$$\begin{aligned}\Theta|_{y=1000} &= \Theta_c + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)_c \cdot y + \dots\dots = \left(-45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}\right) + (2.45 \times 10^{-4}) \times 1000 \\ &\quad + \frac{1}{2} (13.6 \times 10^{-8}) \times 1000^2 + \frac{1}{6} (7.2 \times 10^{-12}) \times 1000^3 + \dots\dots \\ &\approx -0.472 \text{ 弧度} = -27.05^\circ\end{aligned}$$

## § 6-2 自动导引的比例导航法

### § 6-2-1 导引规律和比例导航法

为了对导弹进行自动导引, 已经从理论上研究过多种导引规律, 如直接法、追踪法、前置角法、平行接近法、比例导航法等。近年来, 又根据各种最优化准则, 提出了许多新的导引规律。所有这些导引规律都包含两个要素: 第一, 获得一定种类的关于导弹同目标相对运动情况的信息; 第二, 根据这些信息, 按照一定的规律来控制导弹的运动。一般说来, 要想取得更圆满的制导效果, 必须获取更多的弹目相对运动信息, 并按更复杂的规律来处理这些信息。

目前, 在实践上被广泛采用的是比例导航法。比例导航法的导引规律就是使导弹的速度矢量的旋转角速度同弹目瞄准线的旋转角速度成正比。比例导航法在技术上容易实现, 并且可以获得相当满意的弹道性能, 因此, 能在实践中被广泛采用。

比例导航法在反飞机导弹上的应用已经取得了许多成功的经验。当应用于反坦克导弹时, 由于目标的机动性远较飞机为低, 所以, 理应不出现严重困难。不过, 也有一些特殊的问题, 例如, 怎样把目标从地面背景中识别分辨出来的问题, 在目前的技术水平上, 就比反飞机导弹更困难和复杂。

比例导航法在实践上的应用虽然是成功的；但在理论上，对于一些问题却常常出现误解和理解不一致的情况。例如，比例导航法是不是一定会导致脱靶量？按比例导航法进行制导的导弹系统是否一定是稳定的，或者一定是不稳定的？为了正确地设计导弹，从物理实质上弄清这些问题是必要的。

### § 6-2-2 对自动导引头的要求

导引头是实现反坦克导弹自动导引的技术关键。应对导引头提出如下的要求：

第一，能够在规定的距离上和规定的视场范围内发现并跟踪具有规定的物理特征的目标。值得注意的是，导引头的视场同探测距离是相矛盾的。在其他一切条件相同的情况下，导引头的视场愈大，探测距离就愈小。为了解决这个矛盾，通常把视场分为两个：一个是瞬间视场，是导引头的光学系统的实际视场，瞬间视场角一般是很小的；另一个是扫描视场，就是瞬间视场的扫描范围。这样就可以解决视场同探测距离的矛盾，但是系统的结构更复杂了。导引头的探测距离和扫描视场应该同捕获漏斗入口的条件相匹配。

第二，导引头应该有足够的抗干扰能力。对导引头的干扰，有自然干扰和人为干扰两种。对于自然干扰来说，导引头的瞬间视场愈小，杂散的辐射能量进入导引头视场的可能性就愈小。

第三，导引头探测目标的“盲区”应该尽可能小。盲区就是导引头探测距离的下限，通常在数十米或数百米之内。在导弹进入盲区之后，导引头的视场几乎被目标所充满，导引头即失去了准确跟踪目标的能力。因此，瞬间视场愈小，盲区就愈大。

第四，导引头应该能够准确地和及时地跟踪运动目标。然而，事实上，导引头在跟踪目标的过程中，总会有某些动态误差及起伏误差。如果跟踪误差太大，超过了导引头的瞬间视场，导引头就可能丢失目标。

### § 6-2-3 导引头的类型及动态特性

要实现比例导航法，导引头必须获得弹目瞄准线旋转角速度的信息。为此，导引头首先必须能够连续地跟踪目标，并确定弹目瞄准线对于某个基准方向的夹角，完成这一功能的组件称为“位标器”。

最简单的导引头是把位标器固定地装在弹头部。这种固联式的导引头，结构简单，但却很少被采用。这是由于，导弹弹体在制导飞行过程中是要摆动的，这样，为了能够连续地跟踪目标，导引头必须有很大的视场。然而，位标器固联于弹体的导引头，无法进行扫描，不可能把瞬间视场同扫描视场分开。这样就引起探测距离降低、干扰影响增大等等问题。此外，弹体的摆动运动也将做为一种噪声混入到导引头对弹目瞄准线运动的测量信息之中，很难滤除。因此，实际上绝大多数的导引头都采用位标器相对于弹体可动的方案。

位标器可动的导引头，也有很多种方案。采用最普遍的方案是把位标器装在三自由度的陀螺上。在这一方案中，位标器的光轴同陀螺转子的轴线保持一致（图 6-5）。在陀螺的内环同外环之间、外环同弹体之间装有两个校正电机。在导引头尚未捕获目标之前，校正电机使陀螺按一定的规律进动，带动位标器进行扫描。一旦目标进入导引头的瞬间视场，目标影象即投射到位标器的敏感元件上。通过适当的设计，位标器应该输出一个同误差角  $\varepsilon$



基本上成正比的电压信号  $u$  (见图 6-6 及图 6-7)。这个电压信号  $u$  有两个作用：第一，用它做为激励校正电机的信号，使陀螺产生进动运动，进动的方向是力图使误差角  $\varepsilon$  趋向于零；第二，用它做为激励导弹的自动驾驶仪和舵机的信号，进一步控制导弹的运动。通过电压信号  $u$  的第一个作用，在位标器、校正电机及陀螺之间就构成了一个闭合回路（称为小回路），如图 6-7 所示。通过电压信号  $u$  的第二个作用，在导引头、舵机及弹体之间又构成一个闭合回路（可称为大回路）。本节先对小回路进行分析。

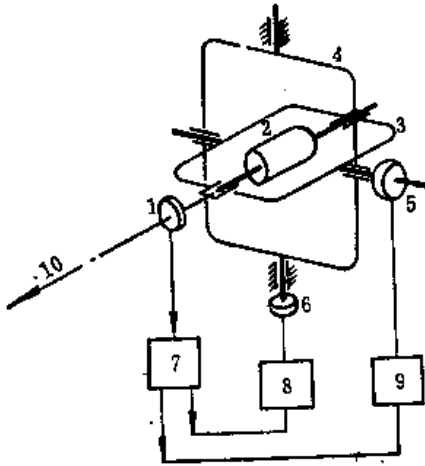


图6-5 陀螺稳定的导引头原理图  
1—位标器；2—转子；3—内环；4—外环；  
5—内环校正电机；6—外环校正电机；7—  
前置放大器；8及9—信号处理装置；10—  
光轴。

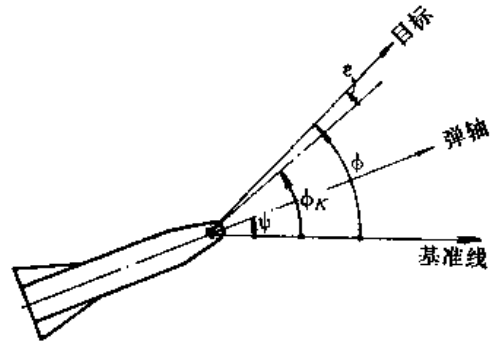


图6-6 导引头跟踪目标的几何关系

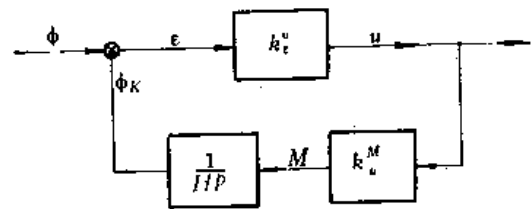


图6-7 导引头小回路简化结构图

导引头简化结构图 6-7 表示出导引头的作用过程，这个过程也可用下列的方程组来表示

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= \phi(t) - \phi_K(t) \\ u(t) &= k_{\varepsilon}^u \varepsilon(t) \\ M(t) &= k_u^M u(t) \\ \frac{d\phi_K(t)}{dt} &= \frac{M(t)}{H} \end{aligned} \right\} \quad (6-2-1)$$

式中  $M$ ——校正电机的输出力矩；  
 $H$ ——陀螺转子的动量矩；  
 $k_{\varepsilon}^u$ 、 $k_u^M$ ——放大系数。

从此方程组中消去各中间变量，可得导引头位标器光轴追随着弹目瞄准线而运动的方程式

$$T_{\star} \cdot \frac{d\phi_K(t)}{dt} + \phi_K(t) = \phi(t) \quad (6-2-2)$$

其中  $T_{\star}$ ——时间常数， $T_{\star} = H/k_u^M k_{\varepsilon}^u$ 。

或以传递函数表之

$$W_{\phi_K}^{\phi}(p) = \frac{\phi_K(p)}{\phi(p)} = \frac{1}{T_{\star} \cdot p + 1} \quad (6-2-3)$$

于是可知, 导引头是个一阶惯性环节, 在位标器光轴同弹目瞄准线之间将会出现动态误差。为了使位标器的光轴精确地追随瞄准线, 希望时间常数  $T_*$  愈小愈好。但是, 陀螺转子的动量矩  $H$  应足够大, 才能对位标器起稳定作用; 这样, 必须使光敏元件的前置放大器及校正电机具有较大的放大系数  $k_u^*$ , 才能使时间常数  $T_*$  减小。这样, 就要求增大校正电机的输出力矩, 并导致其重量的增加。

在导引头的输出信号电压  $u(t)$  同输入的瞄准线运动规律  $\phi(t)$  之间的关系, 也可由方程组 (6-2-1) 或结构图 6-7 求得, 即

$$T_* \frac{du(t)}{dt} + u(t) = k_\phi^* \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (6-2-4)$$

式中  $k_\phi^*$ ——从瞄准线转动角速度  $\dot{\phi}$  到输出信号电压  $u$  的放大系数, 或  $k_\phi^* = H/k_u^*$ 。或写成传递函数

$$W_\phi^*(p) = \frac{u(p)}{\dot{\phi}(p)} = \frac{k_\phi^*}{T_* p + 1} \quad (6-2-5)$$

由此可知, 在稳态情况下, 导引头的输出信号电压  $u$  是同瞄准线转动角速度  $\dot{\phi}$  成正比的。因此, 在把自动驾驶仪及弹体环节视为一个简单放大器的情况下, 用信号电压  $u$  来激励自动驾驶仪并控制导弹的运动时, 导弹的法向加速度或速度矢量的旋转角速度就会同瞄准线的旋转角速度  $\dot{\phi}$  成正比。这样就能实现比例导航的导引规律。

然而, 由于时间常数  $T_*$  的存在, 在动态的情况下, 上述的比例关系只能是近似的。此外, 在建立方程组 (6-2-1) 时已经进行了许多简化。原来, 在光敏元件、前置放大器和校正电机中, 都存在着机电惯性; 只是考虑到这些惯性相对来说比较小, 在近似分析中可以忽略不计。这样, 在方程组 (6-2-1) 的第二式和第三式中才得到了简单的比例关系。在考虑到这些次要因素之后, 在小回路中可能出现振荡的成分。

如果再考虑到自动驾驶仪及弹体环节的动态特性之后, 导弹显然是不可能严格地按照比例导航法的规律运动的。但是, 忽略次要因素, 抓住主要规律, 才能对自动导引导弹的运动过程的物理本质有所了解。下面先来讨论理想的简化情况; 然后, 再进一步考虑到制导系统的惯性, 进行动力学的分析。

## § 6-3 比例导航的理想弹道及其线性化

### § 6-3-1 比例导航的理想弹道

导弹在三维空间中的运动可分别投影在水平面和铅垂面上。假如没有重力的影响, 那么, 导弹在水平和铅垂投影面上的运动规律将没有本质区别。为了方便, 可首先研究导弹在水平投影面上的运动。然后, 再考虑到重力的影响, 即可对铅垂投影面上的运动进行研究。

在单独研究导弹在水平投影面上的运动时, 可简化地认为导弹同目标位于同一水平面上, 如图 6-8 所示。图中,  $\phi$  为瞄准角 (即

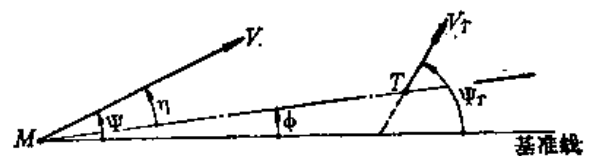


图6-8 自动导引导弹的运动学关系

弹目瞄准线对于基准线之夹角)； $\Psi$ 和 $\Psi_T$ 为方向角(即导弹和标的的速度矢量对于基准线之夹角)。

这时，导弹同目标的相对运动学关系是

$$\dot{r} = v_T \cos(\Psi_T - \phi) - v \cos(\Psi - \phi) \quad (6-3-1)$$

$$r\dot{\phi} = v_T \sin(\Psi_T - \phi) - v \sin(\Psi - \phi) \quad (6-3-2)$$

其中  $r$ ——导弹至目标的距离。

在给定目标的运动规律  $v_T(t)$  及  $\Psi_T(t)$  的情况下，上面的方程组中含有三个未知变量  $r(t)$ 、 $\Psi(t)$  及  $\phi(t)$ 。为使方程组封闭，还需补充一个方程，就是导引规律的方程。

在按比例导航法对导弹进行导引时，导引规律是

$$\dot{\psi} = k \dot{\phi} \quad (6-3-3)$$

其中  $k$ ——比例常数，或称“导航比”。

在执行此导引规律时，隐含的假定是导弹为一个理想的可控质点，即制导系统没有任何惯性及滞后；故导弹的法向加速度  $v\dot{\psi}$  能够准确地跟随着瞄准线转动角速度  $\dot{\phi}$  的变化而变化。

若给出运动的初始条件，如当  $t = 0$  时， $r = r_0$ 、 $\Psi = \Psi_0$  及  $\phi = \phi_0$ ，则由联立方程组 (6-3-1)~(6-3-3) 可解出导弹的导引运动过程  $r = r(t)$ 、 $\Psi = \Psi(t)$  及  $\phi = \phi(t)$ 。但是，一般情况下，不可能获得有限的解析表达式。只有在  $v$ 、 $v_T$  及  $\Psi_T$  皆为常值并且  $k = 2$  的特殊情况下，才可能获得有限形式的解析解<sup>[1]</sup>。

为了便于研究导引弹道的性质，可对方程组 (6-3-1)~(6-3-3) 在直线弹道附近进行线性化，这样就可能获得有限形式的解析解。

### § 6-3-2 比例导航的直线弹道

若目标沿直线运动，即

$$\Psi_T = \text{const} \quad (6-3-4)$$

并且，导弹及标的速度皆为常数，或更严密地说，导弹对标的速度比  $p = \frac{v}{v_T}$  为常数，即

$$p = \text{const} \quad (6-3-5)$$

在这两个前提之下，适当地选定运动的初始条件，即可获得直线的比例导航导引弹道。

由 (6-3-2) 式可知，若能使该式右端为零，则可使  $\dot{\phi} = 0$ ；于是，按 (6-3-3) 式，亦可使  $\dot{\psi} = 0$ ，这样，导弹就能维持原来的飞行方向不变。因此，如果适当地选定制导运动的初始条件  $\Psi_0$ ，使方程 (6-3-2) 的右端恰好为零，即

$$\Psi_0 = \phi_0 + \sin^{-1} \left[ \frac{1}{p} \sin(\Psi_T - \phi_0) \right] \quad (6-3-6)$$

那么，导弹就可能始终沿直线飞行。

在设计和使用导弹时，当然希望导弹尽可能地沿直线飞行。因此，总希望导弹在开始制导时的航向角  $\Psi_0$  具有如上式所示之值。但事实上，这经常是不可能准确办到的。实际的航向角初始值  $\Psi_0$  对于上式右端之差，可称为“瞄准误差”  $\Delta\Psi$ 。

$$\Delta \Psi_0 = \Psi_0 - \phi_0 - \sin^{-1} \left[ \frac{1}{p} \sin (\Psi_T - \phi_0) \right] \quad (6-3-7)$$

由于瞄准误差的存在，绝对实现直线飞行几乎是不可能的。但是，对于正确设计的导弹系统，应该能够尽快地消除瞄准误差造成的对于直线弹道的偏离，并逼近于直线弹道。

一般说来，导航比  $k$  愈大，导弹在导引过程中就能愈快地纠正初始瞄准误差的影响，愈快地逼近于直线弹道。这一规律可以从图 6-9 中看出。图中分别绘出了  $k=1$  及  $k=4$  两种情况的比例导航导引弹道的曲线；在导引开始时，前置角皆为零（瞄准误差却不为零），速度比皆为  $p = v/v_T = 2$ 。由图可见，导航比  $k$  较大的导弹，弹道的初始段曲率很大，但弹道末段却很直。但在  $k=1$  的条件下（相当于追踪法），情况恰好相反。

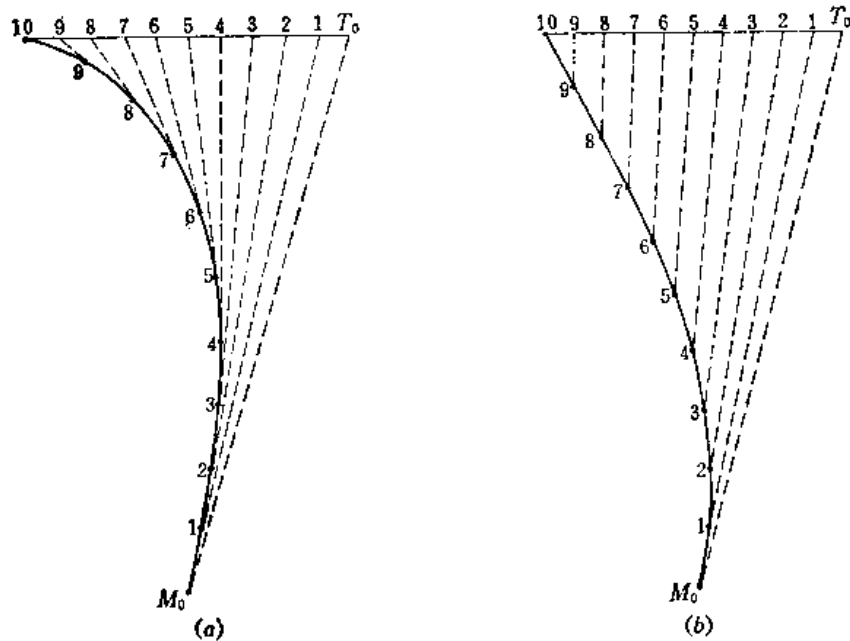


图 6-9 导航比  $k$  对于导引弹道的影响 ( $p = v/v_T = 2$ )  
(a)  $k=1$ , (b)  $k=4$ 。

在极端情况下，若  $k \rightarrow \infty$ ，则导弹几乎在瞬间之内就能纠正初始瞄准偏差（当然需要极大的法向过载），使导弹获得正确的航向角，然后以直线弹道飞过全程，最终同目标交会。这就相当于平行接近法的导引方法。

可见，追踪法及平行接近法不过是比例导航法的特殊情况。通过适当地选择导航比  $k$ ，可以使导弹获得全面的优良性能。一般说来，不难获得大体上近似于直线的弹道。

在导弹沿直线弹道进行导引的理想情况下，按 (6-3-1) 式可以求出弹目距离  $r$  的变化规律。由于  $\Psi$ 、 $\Psi_T$  及  $\phi$  皆为常数，并且弹速  $v$  及目标速度  $v_T$  也是常数，所以

$$\dot{r} = v_{T,c} - v_c = \text{const} \quad (6-3-8)$$

其中  $v_{T,c}$ ——目标速度  $v_T$  在弹目瞄准线上的投影  $v_{T,c} = v_T \cos(\Psi_T - \phi)$

$v_c$ ——导弹速度  $v$  在弹目瞄准线上的投影  $v_c = v \cos(\Psi - \phi)$

注意，在弹目距离  $r$  不断缩小的情况下，导弹才能最终同目标交会，这就必须使  $\dot{r} < 0$ 。于是，弹目距离  $r$  的变化规律应是

$$r(t) = r_0 + \dot{r} t \quad (6-3-9)$$

式中  $r_0$ ——在开始制导时刻的弹目距离。

当弹目距离  $r(t)$  精确地等于零时，导弹同目标发生“交会”。从开始制导到弹目交会所需的时间可如下计算

$$t_c = \frac{r_0}{- \dot{r}} = \frac{r_0}{v_{c \rightarrow r, c}} \quad (6-3-10)$$

式中  $t_c$ ——弹目交会所需时间，简称“交会时间”。

注意，以上的结果是在弹速  $v$  及目标速度  $v_r$  皆为常数，并且导弹沿正确的直线弹道导引的情况下获得的。在这种情况下，弹目交会点很容易确定（图 6-10）。

在目标机动并且弹速变化的情况下交会点将要改变，并且难于确定。但是，在所考虑的时刻  $t$ ，假想目标继续等速直线运动并且导弹仍保持当时的速度  $v$  不变，那么仍可以求出一个假想的交会点。显然，这个假想的交会点同所考虑的时刻  $t$  有关；故可称之为“瞬时交会点”。

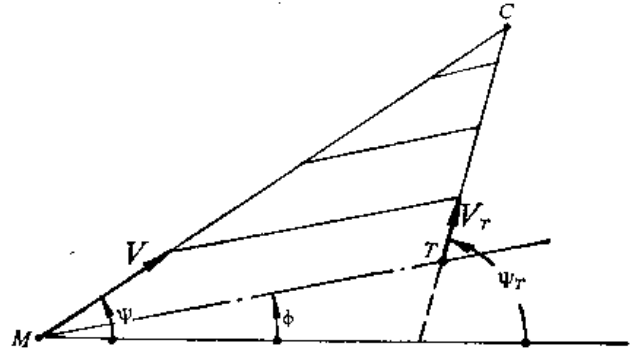


图 6-10 等速直线导引弹道及弹目交会点

利用瞬时交会点的概念，把所考虑的时刻做为时间原点，利用 (6-3-10) 式可计算出一个  $t_c$  值，可称之为“瞬时交会时间”，即从所考虑的时刻起，假想目标继续等速直线运动下去，导弹也沿直线弹道等速运动直到交会所需的时间。

### § 6-3-3 比例导航的导引弹道的线性化

实际情况中，导弹在开始制导时总有某些瞄准误差；并且在制导过程中，目标总有某些机动运动 ( $\psi_r \neq \text{const}$ )。所以，导引弹道总不可能绝对保持直线。但在瞄准误差和目标机动都不太大的情况下，导引弹道偏离直线弹道的程度也不会太大。这时，就可以在直线弹道附近对导引弹道进行线性化。

所谓线性化，就是在直线弹道附近，把导引运动学方程组 (6-3-1)~(6-3-3) 中的几个三角函数近似地用线性函数来处理。这些三角函数的存在，是求解这个方程组的主要困难所在。

为明确起见，以角标《\*》来标明做为线性化基准的某个直线弹道的角度参量。这个直线弹道的运动学方程即是

$$\dot{r} = v_r \cos(\psi_r^* - \phi^*) - v \cos(\psi^* - \phi^*) \quad (6-3-11)$$

$$r \dot{\phi}^* = v_r \sin(\psi_r^* - \phi^*) - v \sin(\psi^* - \phi^*) \quad (6-3-12)$$

$$\text{及} \quad \dot{\psi}^* = k \dot{\phi}^* = 0 \quad (6-3-13)$$

其中，弹目距离  $r$  不是线性化的对象。

按 (6-3-13) 式，应有

$$\psi^* = \text{const} \quad (6-3-14)$$

$$\phi^* = \text{const} \quad (6-3-15)$$

此外，按目标没有机动运动的前提，可引出

$$\Psi_T^* = \text{const} \quad (6-3-16)$$

在导弹具有初始瞄准误差和目标具有机动的情况下，导引弹道将偏离直线弹道，相应的运动参量应表为

$$\Psi = \Psi^* + \Delta\Psi \quad (6-3-17)$$

$$\phi = \phi^* + \Delta\phi \quad (6-3-18)$$

$$\Psi_T = \Psi_T^* + \Delta\Psi_T \quad (6-3-19)$$

将上面三式首先代入到方程 (6-3-2) 展开，并认为  $\Delta\Psi$ 、 $\Delta\phi$  及  $\Delta\Psi_T$  都是小量，即

$$\cos(\Delta\Psi - \Delta\phi) \approx 1, \dots\dots$$

及

$$\sin(\Delta\Psi - \Delta\phi) \approx (\Delta\Psi - \Delta\phi), \dots\dots$$

于是可得

$$\begin{aligned} r(\dot{\phi}^* + \Delta\dot{\phi}) = & v_T[\sin(\Psi_T^* - \phi^*) + (\Delta\Psi_T - \Delta\phi) \cdot \cos(\Psi_T^* - \phi^*)] \\ & - v[\sin(\Psi^* - \phi^*) + (\Delta\Psi - \Delta\phi) \cdot \cos(\Psi^* - \phi^*)] \dots\dots \end{aligned}$$

从上式中减去方程 (6-3-12)，并考虑到方程 (6-3-11) 即可得到线性化的方程

$$r \cdot \Delta\dot{\phi} + \dot{r} \cdot \Delta\phi = v_{T,c} \cdot \Delta\Psi_T - v_c \cdot \Delta\Psi \quad (6-3-20)$$

用同样方法对方程 (6-3-3) 进行处理，

可得

$$\Delta\dot{\psi} = k \Delta\dot{\phi} \quad (6-3-21)$$

将方程 (6-3-20) 及 (6-3-21) 联立，消去中间变量  $\Delta\Psi$ ，可得到一个关于  $(\Delta\dot{\phi})$  的方程。

$$r(\Delta\ddot{\phi}) + (kv_c + 2\dot{r}) \cdot (\Delta\dot{\phi}) = v_{T,c} \cdot \Delta\dot{\psi}_T \quad (6-3-22)$$

其中，待求量  $(\Delta\dot{\phi})$ ，实际上就是瞄准线旋转角速度  $\dot{\phi}$  (因为  $\dot{\phi}^* = 0$ )；输入量  $\Delta\dot{\psi}_T$  实际上就是目标的转弯角速度  $\dot{\psi}_T$  (因为  $\dot{\psi}_T^* = 0$ )。系数中含有的  $r$ 、 $\dot{r}$  及  $v_c$ ，应按基准的直线弹道情况算出，如 (6-3-8) 及 (6-3-9) 式，可认为是已知的时间函数。

为明显起见，不妨以新变量  $\omega$  来表示  $\Delta\dot{\phi}$

$$\omega = \Delta\dot{\phi} = \dot{\phi} \quad (6-3-23)$$

并将方程 (6-3-22) 表为

$$\frac{d\omega}{dt} + \left( \frac{kv_c + 2\dot{r}}{r} \right) \omega = \frac{v_{T,c}}{r} \cdot \dot{\psi}_T \quad (6-3-24)$$

方程的初始条件应是：当  $t = 0$  时， $\omega = \omega_0 = \dot{\phi}_0$ ；并且，按照方程 (6-3-20)，可知

$$\omega_0 = \dot{\phi}_0 = \Delta\dot{\phi}_0 = -\frac{1}{r} (v_{T,c} \cdot \Delta\Psi_T - v_c \cdot \Delta\Psi - \dot{r} \Delta\phi) |_{t=0}$$

注意，在开始制导时刻  $t = 0$ ，有  $\Psi_{T,0} = \Psi_T^*$  且  $\phi_0 = \phi^*$ ，故  $\Delta\Psi_{T,0} = 0$  且  $\Delta\phi_0 = 0$  故应有

$$\omega_0 = -\frac{v_c}{r_0} (\Delta\Psi_0) \quad (6-3-25)$$

这里的  $\Delta\Psi_0$  即瞄准误差，由式 (6-3-7) 决定。

于是，方程 (6-3-24) 可解出为

$$\omega(t) = \exp\left[-\int_0^t \frac{kv_c + \dot{r}}{r} dt\right] \cdot \left\{ \omega_0 + \int_0^t \frac{v_{T,c} \cdot \dot{\psi}_T}{r} \exp\left[\int_0^t \frac{kv_c + \dot{r}}{r} dt\right] dt \right\} \quad (6-3-26)$$

注意到关系式 (6-3-8) 及 (6-3-9), 则可将上式积分出来, 成为

$$\omega(t) = \omega_0 \left[ \frac{r(t)}{r_0} \right]^{N-2} + \frac{\dot{\Psi}_T}{N-2} \cdot \frac{v_{T,C}}{v_C - v_{T,C}} \left\{ 1 - \left[ \frac{r(t)}{r_0} \right]^{N-2} \right\} \quad (6-3-27)$$

式中  $N$ ——特称为“有效导航比”或“相对导引常数”,  $N = \frac{kv_C}{v_C - v_{T,C}}$ 。

式 (6-3-27) 中, 第一项是由于瞄准误差  $\Delta\Psi_0$  所引起的导弹偏离于直线弹道的扰动效应; 第二项则是由于目标机动  $\dot{\Psi}_T$  所引起的扰动效应。

特别注意, 若  $N < 2$ , 则当  $t \rightarrow t_c$  时,  $r \rightarrow 0$ , 于是两项扰动效应皆趋于无限大; 在这种情况下, 导引弹道将不可能稳定在某个直线弹道附近。

反之, 若  $N > 2$ , 则当  $t \rightarrow t_c$ , 且  $r \rightarrow 0$  时, 第一项扰动趋于零, 第二项扰动趋于常值。这说明, 在目标为直线运动的情况下, 导引弹道将趋近于一个直线弹道, 或者说, 稳定在直线弹道附近; 而在目标进行机动转弯时, 导弹也将进行有限的机动转弯。

因此, 在设计中应保证有效导航比  $N > 2$ ; 或者说, 应保证导航比  $k > 2 \frac{v_C - v_{T,C}}{v_C}$ 。

由式 (6-3-27) 还可看出, 若有效导航比  $N$  愈大, 则在导引运动中, 由于瞄准误差和目标机动所引起的瞄准线旋转角速度  $\omega$  将愈小, 弹道就能更加接近直线。但是, 事实上, 若是考虑到导弹系统中不可避免地要存在着惯性, 那么, 对这个简单的结论还要做出重要的修正。后面即将说明, 若  $N$  太大, 在导弹逼近目标时, 实际的系统将要过早地出现不稳定。因此, 实际系统的  $N$  值 (相应的还有  $k$  值) 不应取得太大。经验上使  $N = 3 \sim 6$  为宜。

利用式 (6-3-27) 还可简略估算导弹在理想弹道上的需用过载, 即按下式

$$n_x = \frac{v}{g} \dot{\Psi} \approx \frac{v}{g} k \dot{\phi} = \frac{v}{g} k \omega \quad (6-3-28)$$

## § 6-4 比例导航的导弹系统的动力学分析

### § 6-4-1 比例导航的导弹系统的动态特性

在上节的运动学分析中, 既未考虑导引头的惯性, 也未考虑到弹体环节的动力学特性。但事实上, 由于惯性的存在将使比例导航的实际弹道显著地区别于运动学理想弹道。

在考虑到导引头及弹体的动力学之后, 导弹系统的大回路应具有如下的结构 (见图 6-11)。

在导弹系统的大回路中, 含有一个变参数环节 (导引运动学环节), 因而不便利用通常的传递函数来进行分析, 最好直接研究其运动微分方程。

1. 导引头方程。将 (6-2-4) 式在基准直线弹道附近线性化后, 得到

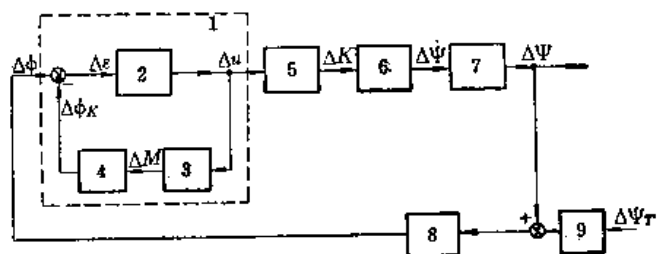


图6-11 比例导航的导弹系统的大回路结构图

1—导引头小回路; 2—位标器,  $k_c^u$ ; 3—校正电机,  $k_a^M$ ; 4—稳定陀螺,  $\frac{1}{H_p}$ ; 5—自动驾驶仪,  $k_a^K$ ; 6—弹体环节,  $\frac{kK}{T_a^2 p^2 + 2\zeta T_a p + 1}$ ; 7—弹体运动学环节,  $\frac{1}{p}$ ; 8—导引运动学环节,  $W_\psi^\phi(p, t)$ ; 9—目标运动学环节,  $-\frac{v_{T,C}}{v_C}$ 。

$$T_{\dot{\phi}} \frac{d(\Delta u)}{dt} + (\Delta u) = k_{\dot{\phi}}^u \cdot \Delta \dot{\phi} \quad (6-4-1)$$

2. 自动驾驶仪方程。简化认为自动驾驶仪是一个理想的放大器，输入信号电压  $\Delta u$ ，输出指令系数  $\Delta K$

$$\Delta K = k_{\dot{\phi}}^K \cdot (\Delta u) \quad (6-4-2)$$

3. 弹体动力学方程。输入指令系数  $\Delta K$ ，输出弹体速度矢量旋转角速度  $\Delta \dot{\psi}$

$$T_{\dot{\psi}}^2 \frac{d^2(\Delta \dot{\psi})}{dt^2} + 2 \xi T_{\dot{\psi}} \frac{d(\Delta \dot{\psi})}{dt} + (\Delta \dot{\psi}) = k_{\dot{\psi}}^K \cdot (\Delta K)$$

在近似分析中，可暂时略去弹体的惯性，而简单地认为

$$\Delta \dot{\psi} = k_{\dot{\psi}}^K \cdot (\Delta K) \quad (6-4-3)$$

其中  $k_{\dot{\psi}}^K$ ——弹体环节的放大系数。

4. 弹体的运动学环节。输入为  $\Delta \dot{\psi}$ ，输出为  $\Delta \Psi$ ，

$$\frac{d}{dt}(\Delta \Psi) = (\Delta \dot{\psi}) \quad (6-4-4)$$

5. 导引运动学环节。按 (6-3-20) 式，输入为  $\Delta \Psi$ ，输出为瞄准角扰动量  $\Delta \phi$

$$\frac{r}{\dot{r}} \frac{d}{dt}(\Delta \phi) + (\Delta \phi) = -\frac{v_c}{\dot{r}} \left[ (\Delta \Psi) - \frac{v_{T,c}}{v_c} (\Delta \Psi_T) \right] \quad (6-4-5)$$

注意，把方程 (6-4-1)~(6-4-3) 联立起来，就体现着比例导航法的导引规律 (6-3-3)，但已考虑到了导引头的惯性。

将方程组 (6-4-1)~(6-4-5) 联立起来，消去中间变量  $\Delta u$ 、 $\Delta K$ 、 $\Delta \dot{\psi}$  及  $\Delta \Psi$ ，就可得到一个以  $\Delta \Psi_T$  为输入量并以  $\dot{\omega} = \Delta \dot{\phi}$  为输出量的方程

$$r T_{\dot{\phi}} \dot{\omega} + (r + 3 \dot{r} T_{\dot{\phi}}) \dot{\omega} + (k v_c + 2 \dot{r}) \omega = v_{T,c} [T_{\dot{\phi}} \cdot (\Delta \dot{\Psi}_T) + (\Delta \dot{\Psi}_T)] \quad (6-4-6)$$

式中  $k = k_{\dot{\phi}}^u \cdot k_{\dot{\phi}}^K \cdot k_{\dot{\psi}}^K$ ，

其初始条件是：当  $t = 0$  时， $\omega = \omega_0$  且  $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$ 。这些初始条件的具体计算方法同方程 (6-3-24) 的初始条件式 (6-3-25) 类似。由式 (6-3-20)，并考虑到当  $t = 0$  时， $\Delta \Psi_{T,0} = 0$  且  $\Delta \phi_0 = 0$ ，故有

$$\omega_0 = \Delta \dot{\phi}_0 = -\frac{v_c}{r_0} (\Delta \Psi_0) \quad (6-4-7)$$

再将式 (6-3-20) 微分一次，并补充假设当  $t = 0$  时， $\Delta \Psi_{T,0} = 0$ ，则可得

$$\dot{\omega}_0 = \Delta \ddot{\phi}_0 = -\frac{v_c \Delta \dot{\Psi}_0 + 2 \dot{r} \Delta \dot{\phi}_0}{r_0} = -\frac{v_c}{r_0} \Delta \dot{\Psi}_0 + \frac{2 \dot{r} v_c}{r_0^2} \Delta \Psi_0 \quad (6-4-8)$$

为了求解方便，对方程 (6-4-6) 进行变量变换，引入新的无量纲时间  $\tau$  做为自变量

$$\tau = \frac{r}{-\dot{r} T_{\dot{\phi}}} = \frac{r_0 + \dot{r} t}{-\dot{r} T_{\dot{\phi}}} = \frac{t_c}{T_{\dot{\phi}}} - \frac{t}{T_{\dot{\phi}}} \quad (6-4-9)$$

注意， $\tau$  的变化同弹目距离  $r$  的变化是一致的；当  $t = 0$  时  $\tau = \frac{t_c}{T_{\dot{\phi}}}$ ，当  $t = t_c$  时， $\tau = 0$ 。并有

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{T_{\dot{\phi}}}$$



$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{-1}{T_{\phi}} \cdot \frac{d\omega}{d\tau}$$

及

$$\ddot{\omega} = \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{1}{T_{\phi}^2} \cdot \frac{d^2\omega}{d\tau^2}$$

于是, 方程 (6-4-6) 可化为

$$\tau \frac{d^2\omega}{d\tau^2} + (3 - \tau) \frac{d\omega}{d\tau} + \left( \frac{kv_c}{v_c - v_{r,c}} - 2 \right) \omega = \frac{v_{r,c}}{v_c - v_{r,c}} [(\Delta\dot{\psi}_r) - T_{\phi}(\Delta\ddot{\psi}_r)]$$

通常可以认为目标是以定常的转弯角速度进行机动的, 则  $\Delta\dot{\psi}_r = \text{const}$  并且  $\Delta\ddot{\psi}_r = 0$ 。此外, 记得有效导航比  $N = \frac{kv_c}{v_c - v_{r,c}}$ 。于是上式又可简化为

$$\tau \frac{d^2\omega}{d\tau^2} + (3 - \tau) \frac{d\omega}{d\tau} + n\omega = \frac{v_{r,c}}{v_c - v_{r,c}} (\Delta\dot{\psi}_r) \quad (6-4-10)$$

其中  $n = N - 2$ 。

这个方程的初始条件是: 当  $\tau = \tau_0 = \frac{t_c}{T_{\phi}}$  时,  $\omega = \omega_0$  且  $\frac{d\omega}{d\tau} = \omega'_0 = -T_{\phi}\dot{\omega}_0$ ,  $\omega_0$  及  $\dot{\omega}_0$  仍由 (6-4-7) 及 (6-4-8) 二式确定。

变系数微分方程 (6-4-10) 的解, 不能用有限的初等函数来表达, 实用上可用电子计算机求解。其解的一般形式为

$$\omega(\tau) = \omega_0 \cdot \Omega_1(\tau, \tau_0) + \omega'_0 \Omega_2(\tau, \tau_0) + (\Delta\dot{\psi}_r) \cdot \frac{v_{r,c}}{n(v_c - v_{r,c})} [1 - \Omega_1(\tau, \tau_0)] \quad (6-4-11)$$

式中  $\Omega_1$  及  $\Omega_2$  —— 单位初始扰动  $\omega_0$  及  $\omega'_0$  所引起的过渡过程。

在图 6-12~图 6-14 中, 对于不同的  $n$  值绘出了  $\Omega_1(\tau, \tau_0)$  的曲线, 图中曲线是以  $\alpha = \frac{1}{\tau_0} = \frac{T_{\phi}}{t_c}$  为参数绘制的。利用这些图线可以研究有效导航比  $N$  和导引头时间常数  $T_{\phi}$  对于比例导航的导弹系统的过渡过程的影响。从这些图线可以看出决定导弹系统的过渡过程特征的因素, 与其说是导引头的时间常数  $T_{\phi}$ , 不如说是  $T_{\phi}$  对于交会时间  $t_c$  的比值。这一比值  $\alpha = \frac{T_{\phi}}{t_c}$  愈小, 导弹受到扰动之后就能愈快地稳定下来; 反之,  $\alpha = \frac{T_{\phi}}{t_c}$  增大之后, 将导致导弹的实际弹道发生剧烈振荡。

特别值得注意的是, 在考虑到导弹的惯性之后, 当导弹逼近目标的时候,  $r \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , 瞄准线旋转角速度将趋于无限地增长, 系统事实上是不稳定的。问题只是在于, 这种趋于不稳定的时刻何时出现。适当地选取导弹系统的参数, 可使系统趋于不稳定的时刻推迟。在系统趋于不稳定的时刻, 若导弹已非常逼近目标, 那

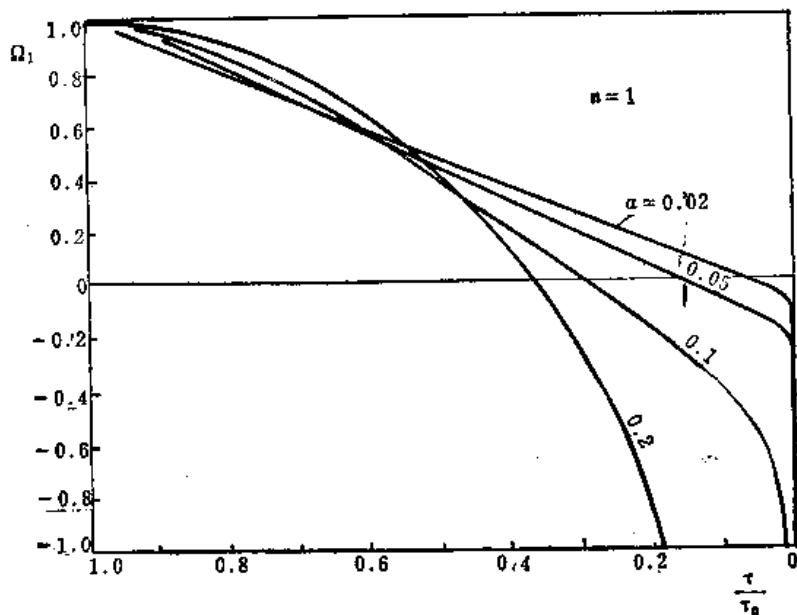


图6-12 比例导航的导弹系统中的过渡过程 ( $n = N - 2 = 1$ )

么，导弹仍然能以很高的精确度命中目标。

研究图 6-12~图 6-14 的曲线后可以看出，如果能把参量  $\alpha = \frac{T_4}{t_c}$  取为很小的数值，例如，使  $\alpha \leq 0.05$ ，那么，就能使导弹系统趋于不稳定的时刻显著推迟。这就意味着，在时间常数  $T_4$  已定的条件下，应该使导弹从启控到交会所需的时间  $t_c$  相当大。例如，若  $T_4 = 0.2$  秒，则应使  $t_c \geq 4$  秒。为此，就必须保证导弹系统的末端制导弹道具有足够的长度。同时也可看出，过分地提高导弹的速度对于制导准确度是不利的。

由这些曲线还可以看出有效导航比  $N$  对于导弹系统过渡过程的影响。首先，在  $N$  (或  $n = N - 2$ ) 提高之后，在导引过程中能更快地消除初始瞄准误差。此外，还可以把系统趋于不稳定的时刻向后推迟。但是，另一方面，在  $N$  同  $\alpha$  之间应有适当的配合关系；在  $\alpha$  值已定之后，若有效导航比  $N$  值太大，将使系统出现振荡，并提前趋于不稳定。因此， $N$  值也不宜取得太大。

关于有效导航比  $N$  值的选取，还有两个限制因素。第一，增大有效导航比  $N$  之后，导弹的需用过载也将增

大；这是由于  $N$  同导航比  $k$  成正比，而按 (6-3-28) 式，导弹的需用过载又同  $k$  成正比；第二，增大有效导航比  $N$  之后，随机噪声引起的制导误差将急剧增大。

所以，考虑到以上全部因素之后，有效导航比  $N$  应有一个最优值，实践中通常在  $N = 3 \sim 6$  的范围内选取。

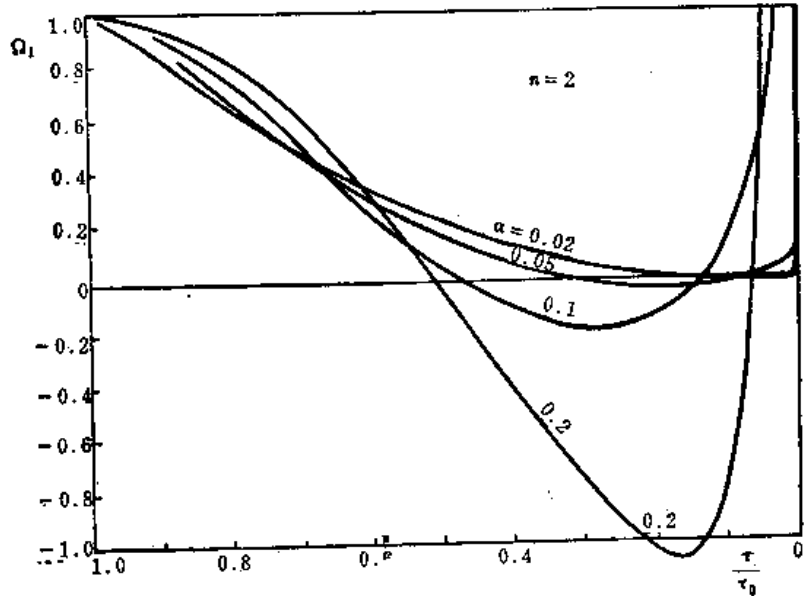


图6-13 比例导航的导弹系统中的过渡过程 ( $n = N - 2 = 2$ )

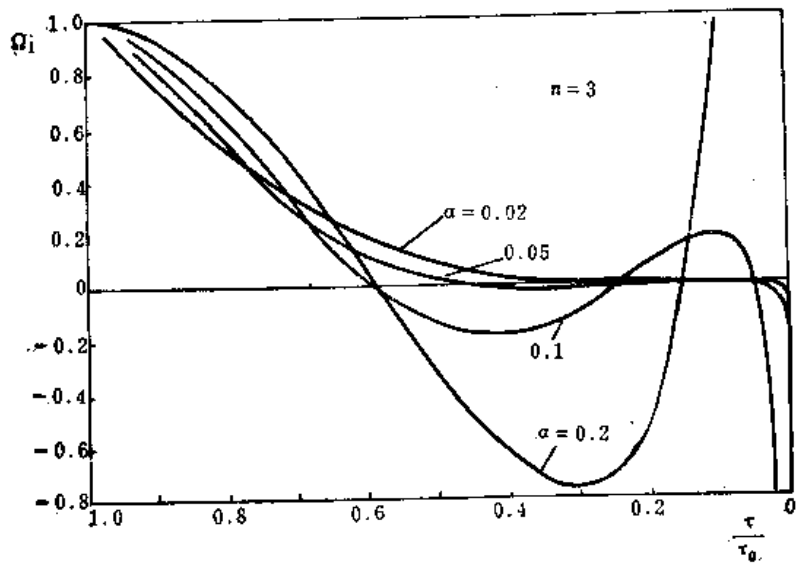


图6-14 比例导航的导弹系统中的过渡过程 ( $n = N - 2 = 3$ )

#### § 6-4-2 比例导航的导引过程的分段

由前所述，按比例导航法对导弹进行自动导引的过程，是由几个阶段组成的，在每个阶段之内，导弹有不同的运动特点 (图 6-15)。

在弹上导引头捕获目标之后, 经过适当的准备时间, 即应使导弹启控, 这就是第一阶段开始。由于瞄准误差  $\Delta\Psi_0$  的存在, 按式 (6-3-25) 或式 (6-4-7), 瞄准线应具有初始的旋转角速度  $\Delta\dot{\phi}_0$  即  $\dot{\phi}_0$ 。这个初始误差引起的过渡过程经过一定的时间即应趋于消失, 这就是第一阶段的结束。

在第二阶段中, 导弹按照比例导航的规律继续向目标逼近, 在理想情况下, 应使  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ 。但是由于目标的机动、弹速的变化、系统的动态滞后, 以及各种噪声干扰的影响, 瞄准线转动角速度  $\dot{\phi}$  不可能为零。然而, 在正常情况下  $\dot{\phi}$  只能在很小的范围内平缓变化, 这时, 弹道比较平直。

最后, 随着导弹逼近目标, 在某个弹道点上, 系统好像失去稳定性, 瞄准线转动角速度  $\dot{\phi}$  猛然增大并且不再减小。这就是进入了第三阶段。在导引头输出信号  $u$  的作用下, 导弹的法向过载也不断增大, 最终可使制导系统达到饱和; 或者, 在此之前, 导弹即进入盲区。这就是第三阶段的结束。在此之后, 导弹制导系统即不能再按比例导航法正常工作。因此, 可将第三阶段结束时的弹道点称为“停控点”。在停控点处, 瞄准线的旋转角速度  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_D$ 。

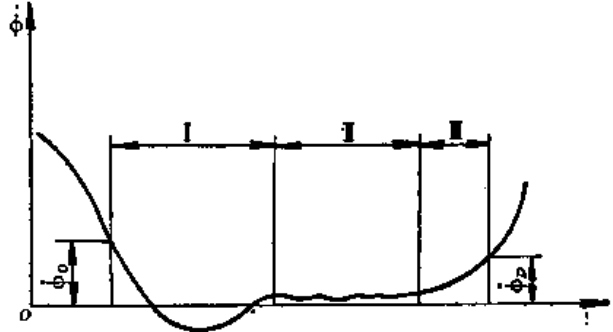


图6-15 比例导航的导引过程的分段  
I—修正初始瞄准误差阶段; II—正常导引段; III—不稳定运动段。

## § 6-5 自动导引反坦克导弹的脱靶量

### § 6-5-1 脱靶量及其产生原因

所谓“脱靶量”, 就是在导弹同目标的相对运动过程中, 弹目距离  $r(t)$  的极小值  $r_{min}$ , 或以专门符号  $h$  表之。

当弹目距离  $r(t)$  达到极小值  $r_{min}$  时的弹道点, 可称为“脱靶点”, 超过这一点之后, 弹目距离  $r(t)$  急剧增大, 导弹将脱靶而去。

在按比例导航法进行导引的理想弹道中, 导弹同目标能够精确地交会, 这时, 脱靶量  $h$  为零。

但在实际情况中, 一般总要产生脱靶量。这是由于以下的原因:

第一, 导引头具有盲区。在进入盲区之后, 导弹只能以一定的法向过载运动, 失去随机应变的能力; 这时, 如果目标进行机动, 导弹必将产生脱靶量。

第二, 在实际的制导系统中, 在导弹十分逼近目标的某个弹道点上, 导弹系统将趋向于不稳定。最后使制导系统的工作达到饱和; 这以后, 导弹不能再按比例导航法进行导引。

以上两个因素, 可能同时发生, 也可能一先一后发生, 其效果都是破坏了制导系统正常工作的条件, 从而导致脱靶量。

为了研究脱靶量, 就要研究导弹同目标在停控点之后、脱靶点之前的相对运动。这一运动本质上是无控运动。可由运动学方程 (6-3-1) 及 (6-3-2) 联立求解而得。求解时, 待求变量是  $r = r(t)$  及  $\phi = \phi(t)$ 。输入变量是  $\Psi_r(t)$  及  $\Psi(t)$ 。初始条件是: 当

$t = t_D$  时,  $r = r_D$  及  $\phi = \phi_D$ 。

在一般情况下, 这一方程组只能用数值方法解出, 当弹目距离  $r(t)$  达到其极小值  $r_{\min}$  之后, 积分过程即可结束, 脱靶量即是

$$h = r_{\min}$$

### § 6-5-2 瞬间脱靶量

在最简单的情况下, 或在停控以后, 导弹及目标都继续维持等速直线运动, 如图 6-16 所示。在这一假定之下所算得的脱靶量, 可称为“瞬间脱靶量”, 以符号  $h_0$  表之。瞬间脱靶量同脱靶量的概念, 可以和瞬间交会点同交会点的概念相对比。如果在停控以后, 导弹及目标的法向加速度都不太大, 瞬间脱靶量  $h_0$  将成为脱靶量  $h$  的主要部分。

图 6-16 表示停控点之后的某个瞬时, 导弹  $M$  同目标  $T$  的相对运动关系。  $r$  仍为弹目距离,  $V_R$  为弹目相对运动速度的矢量,  $\mu$  为  $V_R$  对于瞄准线的夹角。

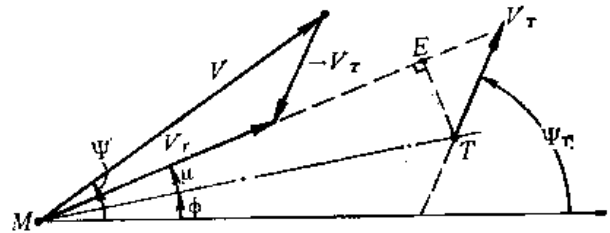


图 6-16 瞬间脱靶量  $h_0$  的推算

显然, 在导弹和目标沿直线等速运动的情况下, 弹目距离的最小值相当于图 6-16 中  $\overline{TE}$  的长度,  $E$  点可称为瞬间脱靶点, 故瞬间脱靶量可用下式表示

$$h_0 = r \sin \mu \quad (6-5-1)$$

可见, 若在停控点处, 能使弹目相对运动速度矢量  $V_R$  精确地重合于瞄准线, 即精确地使  $\mu = 0$ , 则可使瞬间脱靶量  $h_0$  为零。但是, 只要角度  $\mu$  略微地不为零, 那么, 在导弹逼近目标的过程中, 它就要急剧增大, 并在  $\mu = \frac{\pi}{2}$  时, 使导弹脱靶。

在  $\mu \approx 0$  的情况下, 瞄准线将具有旋转角速度  $\dot{\phi}$ , 并有以下关系式

$$r\dot{\phi} = v_R \sin \mu \quad (6-5-2)$$

其中  $v_R$  —— 导弹对目标的相对速度

$$v_R = \sqrt{v^2 + v_T^2 - 2vv_T \cos(\Psi_T - \Psi)}$$

于是, 可得

$$h_0 = \frac{r^2 \dot{\phi}}{v_R} \quad (6-5-3)$$

在停控点及其后不太久的时刻,  $\mu$  角很小, 则有  $\dot{r} = -v_R \cos \mu \approx -v_R$ ; 这时, 又可将上式表为

$$h_0 \approx -\frac{r^2}{\dot{r}} \dot{\phi} \quad (6-5-4)$$

将停控点处的运动条件代入 (6-5-4) 式中, 可得

$$h_0 \approx \frac{-r_D^2 \dot{\phi}_D}{\dot{r}_D} \quad (6-5-5)$$

注意, 在临近脱靶点时,  $\mu \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , 近似式 (6-5-4) 及 (6-5-5) 不能再用。

从停控到脱靶所需之时间  $t_D$ , 可如下计算

$$t_D = \frac{r_D \cdot \cos \mu}{v_R} \approx \frac{r_D}{\dot{r}_D} \quad (6-5-6)$$

故, (6-5-5) 式又可写为

$$h_0 \approx -\dot{r}_D \dot{\phi}_D \cdot t_D^2 \quad (6-5-7)$$

根据式 (6-5-5) 及 (6-5-7) 可以看出, 为了减小脱靶量, 主要应减小停控点处的瞄准线旋转角速度  $\dot{\phi}_D$ 。此外, 在弹目相对速度一定的情况下, 缩短停控时的弹目距离  $r_D$  也是有效的办法。在  $r_D$  一定的条件下, 若能提高弹目相对速度  $v_R \approx -\dot{r}_D$ , 当然也有效, 但是, 这样往往会导致制导段的交会时间  $t_c$  减小, 因而停控点提前到来, 并不一定是有利的。

式 (6-5-5) 或 (6-5-7) 中的  $\dot{\phi}_D$  可由式 (6-4-11) 及图 6-12~图 6-14 中之曲线算出。事实上, 初始条件  $\omega_0$  及输入变量  $\Delta\Psi_T$  都应是具有一定统计特征的随机变量。所以, 这样算得的  $\dot{\phi}_D$  及  $h_0$  也应是具有一定统计特征的随机量, 一般可用标准偏差来表达它们的统计特征。

## 第七章 反坦克导弹的外形设计

### § 7-1 反坦克导弹的可用攻角确定

#### § 7-1-1 可用攻角及其确定原则

反坦克导弹在机动飞行中，其法向过载是随着攻角的增加而增大的。若是法向过载(稳态的)达到可用过载，则相应的攻角就是可用攻角。

在反坦克导弹的设计工作刚开始时，就应确定可用攻角  $\alpha_{\text{可用}}$ 。其前提是：

- 第一，使导弹在机动飞行中具有较高的升阻比；
- 第二，确保导弹的操纵性和稳定性。

#### § 7-1-2 升力及阻力随攻角的变化

导弹在飞行过程中，随着攻角  $\alpha$  的变化，弹体上的升力与阻力也发生变化。

若攻角  $\alpha = 0$ ，则在弹体上没有升力的作用（对于轴对称的弹体），只有阻力的作用，这个阻力称为“零升阻力”，以  $X_0$  表之；相应的阻力系数称为“零升阻力系数”，以  $C_{x_0}$  表之

$$X_0 = C_{x_0} S \frac{\rho v^2}{2} \quad (7-1-1)$$

若攻角  $\alpha \neq 0$ ，则有升力作用在弹体上。在  $\alpha$  的变化范围不太大的情况下，升力  $Y$  随攻角  $\alpha$  线性变化，并可表为

$$Y = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^0 \alpha \quad (7-1-2)$$

但随着  $\alpha$  的增大，非线性逐渐明显（图 7-1）。实际的  $Y-\alpha$  或  $C_y-\alpha$  曲线具有极大值，当  $C_y = C_{y,\text{max}}$  时，相应的攻角称为临界攻角  $\alpha_{\text{临界}}$ 。在导弹设计工作中，必须保证导弹的飞行攻角  $\alpha$  总是小于临界攻角。

在攻角  $\alpha$  增大的情况下，随着升力  $Y$  的增大，阻力  $X$  也要增大。增大的这部分阻力称为“诱导阻力”，以  $X_i$  表之；相应的诱导阻力系数以  $C_{x_i}$  表之

$$X_i = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_{x_i} \quad (7-1-3)$$

诱导阻力  $X_i$  的大小是同攻角  $\alpha$  有关的，因此，也是同升力  $Y$  有关的。根据空气动力学的理论及实验研究，可以获得如下的近似关系

$$C_{x_i} = A C_y^2 \approx A (C_y^0)^2 \cdot \alpha^2 \quad (7-1-4)$$

关于系数  $A$  的计算，在亚音速和超音速情况中各有不同。在一般情况下，弹翼所引起的诱导阻力比弹身的诱导阻力大得多。若只考虑弹翼的诱导阻力，那么在亚音速情况下：

$$A \approx \frac{1 + \delta}{\pi \lambda_w} \cdot \frac{S_w}{S} \quad (7-1-5)$$

式中  $\lambda_w$ ——孤立弹翼的展弦比；

$\delta$ ——考虑弹翼形状的修正系数，对于椭圆形弹翼  $\delta = 0$ ，对于矩形弹翼  $\delta = 0.05$ ；

$S_w$ ——孤立弹翼（一对）的面积；

$S$ ——参考面积，在这里取为弹身的横截面积。

在有弹身的情况下，上式有些误差，但在分析问题的时候，上式仍是可用的。

于是总的阻力  $X$  就是

$$X = X_0 + X_f \quad (7-1-6)$$

相应的总阻力系数  $C_x$  是

$$C_x = C_{x,0} + C_{x,f} = C_{x,0} + AC_y^2 \quad (7-1-7)$$

或

$$C_x = C_{x,0} + A(C_y^\alpha)^2 \alpha^2 \quad (7-1-8)$$

### § 7-1-3 升阻比及最有利攻角

在操纵导弹飞行的过程中，升力是用来进行机动所需的积极因素，而阻力却是有碍飞行的消极因素，这是一对矛盾。在设计导弹时，要想办法尽量发挥积极因素的作用，并削弱消极因素的作用。在解决这个矛盾的实践过程中，在空气动力学中形成了“升阻比”的概念。升阻比  $R$  即定义为升力系数  $C_y$  与阻力系数  $C_x$  之比值，即

$$R = \frac{C_y}{C_x} \quad (7-1-9)$$

它反映着导弹的空气动力特性中的积极因素（升力）同消极因素（阻力）之间的矛盾对比关系。显然，升阻比愈大愈好。但是，在实践中，它总会有一定的限度。对于亚音速飞行器，升阻比  $R$  主要决定于机翼的展弦比，展弦比愈大，升阻比也愈大。对于反坦克导弹来说，弹翼的展弦比受到各种因素的限制，不可能很大，所以升阻比  $R$  也不可能很大。由式 (7-1-7)~(7-1-9) 可知

$$R = \frac{C_y}{C_{x,0} + AC_y^2} \approx \frac{C_y^\alpha \cdot \alpha}{C_{x,0} + [A(C_y^\alpha)^2] \cdot \alpha^2} \quad (7-1-10)$$

由上式可知，随着攻角  $\alpha$  的变化，导弹的升阻比  $R$  也是变化的。当攻角  $\alpha$  从零开始逐渐增加的时候，升阻比  $R$  先是增大，随之达到一个极大值  $R_{max}$ ，然后再减小下来，如图 7-2 所示。式 (7-1-10) 是简化的近似公式，并未考虑到弹身等因素的影响，所以实际情况同按式 (7-1-10) 算出的情况略

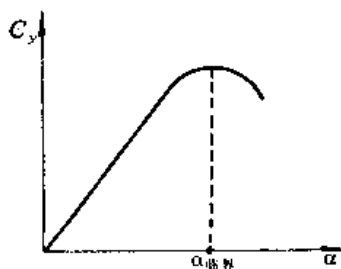


图7-1  $C_y$ - $\alpha$  曲线

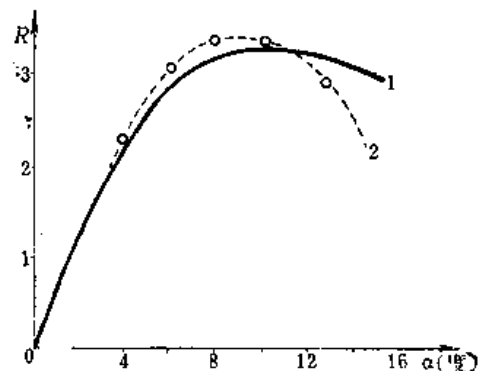


图7-2 反坦克导弹的升阻比同攻角的关系  
1—理论曲线；2—实验曲线。

有差别。特别是在攻角  $\alpha$  接近和超过临界攻角  $\alpha_{\text{临界}}$  的情况下，由于非线性的影响，实际的升阻比  $R$  将急剧下降（如图 7-2 中虚线所示），这是线性理论的公式 (7-1-10) 所表达不出来的。然而，对于攻角  $\alpha$  比较小的区域，公式 (7-1-10) 仍然能表达出升阻比  $R$  的实际变化趋势。

在怎样的条件下，升阻比  $R$  达到最大值  $R_{\text{max}}$ ，这是在设计工作中感兴趣的问题。按式 (7-1-10)，对攻角  $\alpha$  取导数，并令

$$\frac{dR}{d\alpha} = 0$$

即可得此条件为

$$C_{x,0} - [A(C_y^a)^2] \alpha^2 = 0 \quad (7-1-11)$$

然后由式 (7-1-4) 可得

$$C_{x,0} = C_{x,i} \quad (7-1-12)$$

就是说，在升力  $Y$  随  $\alpha$  线性增加的假定情况之下，为了获得最大的升阻比，应该使导弹的诱导阻力恰好等于零升阻力。若将条件式 (7-1-12) 代回式 (7-1-10)，并利用式 (7-1-4) 即可得

$$R_{\text{max}} = \frac{1}{2 \sqrt{AC_{x,0}}} \quad (7-1-13)$$

当升阻比  $R = R_{\text{max}}$  之时，导弹的攻角  $\alpha$  即为最有利攻角  $\alpha_{op}$ 。在升力随攻角  $\alpha$  线性变化的假定之下，由式 (7-1-11) 可得

$$\alpha_{op} = \frac{1}{C_y^a} \sqrt{-\frac{C_{x,0}}{A}} \quad (7-1-14)$$

这个理论式 (7-1-14) 同实验数据处理所得的结果相比，是相当接近的，如图 7-2 所示。

#### § 7-1-4 可用攻角的选定

从设计的观点看来，似乎应该使导弹尽可能在最有利攻角的条件下飞行，这样，只需付出较小的推力来克服阻力，就能够获得足够的升力来使导弹进行机动。但是由于导弹在机动飞行中，所需的升力是根据指令而变化的，故相应的弹体攻角也是变化的，不可能总保持在最有利条件下飞行。

在计算基准弹道时，我们选取了直线平飞做为典型条件，那么能不能使导弹在直线平飞时的攻角保持为最有利攻角呢？这不一定是恰当的。因为事实上导弹总应有一定的机动性，在绝大部分弹道上，导弹的攻角（或攻角与侧滑角的向量和  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ）必将超过水平飞行所需的攻角；若我们使  $\alpha_{\text{平飞}} = \alpha_{\text{有利}}$ ，那么在绝大部分弹道上，飞行条件并不是最好的。此外，更重要的是存在着一种危险，就是若导弹以可用过载进行最大程度的机动飞行，则导弹的实际攻角就可能接近或超过临界攻角，而使导弹的操纵性及稳定性变坏。

因此，不能把平飞条件下的攻角  $\alpha_{\text{平飞}}$  取为最有利攻角；而应把机动飞行中法向过载达最大时的攻角（即可用攻角  $\alpha_{\text{可用}}$ ）取为最有利攻角，或者顶多略大于最有利攻角。这样就能保证导弹在以可用过载飞行时，即要求导弹发挥最大的机动性时，其升阻比是等于或接



近于最大升阻比  $R_{\max}$ 。此外，这样才能较有把握地避免使导弹的攻角超过临界值，特别是考虑到反坦克导弹在过渡过程中总有比较大的超调量。

举例说，假如导弹的升阻比  $R$  同攻角  $\alpha$  的关系如图 7-2 所示，最有利攻角  $\alpha = 8.5^\circ$  那么即可取  $\alpha_{\text{可用}} = 10^\circ = 0.1745$  弧度。这时的升阻比  $R = 3.3$ ，同最大升阻比  $R_{\max} = 3.45$  相差无几。此外，一般的反坦克导弹，其可用过载并不太大，在第一代反坦克导弹的情况下，其可用过载大约为  $n \approx 2$ ；那么，为了维持平飞所需的攻角就应是  $\alpha_{\text{平飞}} \approx \frac{1}{2} \alpha_{\text{可用}} \approx 5^\circ = 0.087$  弧度。由图 7-2 可知，这时的升阻比为  $R = 2.75$ ，降低不大。因此，可望这个导弹在整个弹道上都具有较大的升阻比。

附带看一看平飞条件下的阻力系数  $C_x$  是多大，由式 (7-1-8)

$$C_x = C_{x,0} + C_{x,f} = C_{x,0} + A(C_y^a)^2 \cdot \alpha^2$$

又由式 (7-1-14) 可知

$$C_y^a = \frac{1}{\alpha_{op}} \sqrt{\frac{C_{x,0}}{A}}$$

从上二式可得

$$C_x = C_{x,0} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{\alpha_{op}} \right)^2 \right] \quad (7-1-15)$$

在上面所举的  $\alpha_{op} = 8^\circ$ ， $\alpha_{\text{平飞}} = 5^\circ$  的典型条件之下，即有

$$C_{x,\text{平飞}} = \left[ 1 + \left( \frac{5}{8.5} \right)^2 \right] = 1.35 C_{x,0}$$

在 § 3-7-3 中曾提到，在选取导弹设计参数时，应按  $C_x \approx 1.5 C_{x,0}$  来估计阻力系数，这个乘数 1.5 就是根据这样的分析得到的。考虑到机动飞行的不可避免，在乘数 1.35 之上增加约 10% 的储备量是必要的。

可用攻角的选取，还应考虑到导弹在机动飞行中的实际攻角  $\alpha$  不会超过临界攻角  $\alpha_{\text{临界}}$ 。

临界攻角  $\alpha_{\text{临界}}$  就是在  $C_y$ - $\alpha$  图线上 (见图 7-1)， $C_y$  达到最大值处的攻角值。如果，攻角  $\alpha$  超过了临界攻角  $\alpha_{\text{临界}}$ ，那么，

在气流流过弹翼时，在翼的上表面处的附面层将有绝大部分与翼面分离，并造成大量的涡流，于是使升力急剧降低 (图 7-3)。这种情况如果发生在飞机的飞行过程中，就要造成飞行事故，一般叫做“失速”；如果发生在导弹的飞行过程中，就将使导弹的操纵性与稳定性变坏，甚至完全丧失。

临界攻角  $\alpha_{\text{临界}}$  究竟是多大？这个问题还没有可靠的理论计算方法，影响  $\alpha_{\text{临界}}$  的因素是颇为复杂的，例如，翼剖面厚度、弯度和形状、气流的附面层状态，翼的展弦比及平面形状等都有影响。一般说来，若是翼的前缘圆钝，附面层为紊流及翼的展弦比小时，临界攻角可以大一些。在导弹上经常采用小展弦比弹翼，在这种情况下，展弦比  $\lambda_w$  对于临界攻角的影响十分显著，实验结果可参看图 7-4。

为了保证导弹在飞行过程中的实际攻角绝对不会超过临界攻角，必须使导弹的可用攻角  $\alpha_{\text{可用}}$  远小于  $\alpha_{\text{临界}}$ 。尤其是考虑到，一般的反坦克导弹的弹身很短、弹翼不大。因此，相

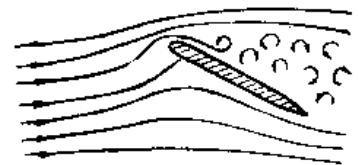


图 7-3 攻角  $\alpha$  超过临界攻角时在翼面上出现涡流

对阻尼系数 $\zeta$ 比较小,在操纵指令剧烈变化的情况下,导弹运动的过渡过程的超调量比较大。因此,在初步估算中,可以选取

$$\alpha_{\text{可用}} \leq \frac{1}{2} \alpha_{\text{临界}}$$

并且,在导弹初步设计的适当阶段上,应该通过对于导弹过渡过程的仔细验算,来证实实际攻角的最大可能值 $\alpha_{\text{max}}$ 不会超过临界攻角。

如果实际攻角最大可能值 $\alpha_{\text{max}}$ 确实远小于临界攻角,那么,也可以考虑适当地增大可用攻角 $\alpha_{\text{可用}}$ ,以便增大导弹的可用过载;或者,在保持可用过载不变的条件下减小弹翼的面积。

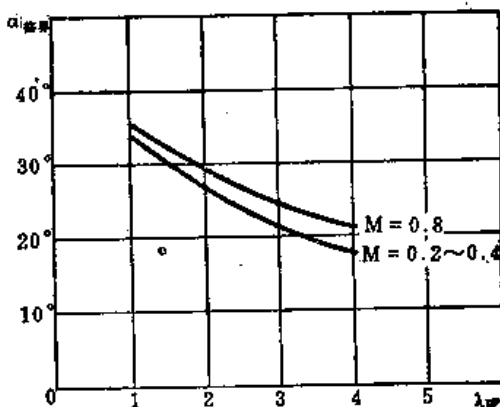


图7-4 展弦比 $\lambda_w$ 对临界攻角 $\alpha_{\text{临界}}$ 的影响

## § 7-2 弹翼形状及弹翼面积的设计

### § 7-2-1 弹翼设计的基本问题

在本书中,主要针对无尾式气动外形布局的方案来讨论弹翼的设计问题。这是由于,绝大多数的反坦克导弹都是采用这种气动外形布局方案。在明瞭设计的思路之后,对于其他的气动外形布局的设计问题,也是不难解决的。

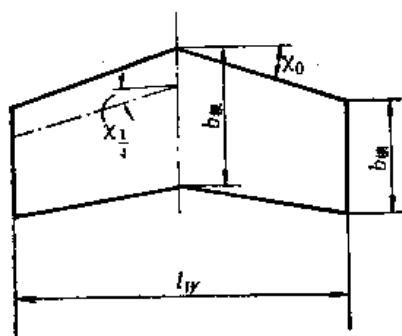


图7-5 弹翼形状及几何参数

弹翼设计的原则是:

第一,使导弹得到所需要的过载;

第二,使导弹得到所需要的静稳定度;

第三,在滚转导弹的情况下,提供一定的空气动力滚转力矩;

第四,使阻力尽可能小;

第五,使结构的刚度和强度为最佳;

第六,把翼展限制在一定的范围内,以便于导弹的贮存和运输。

上述诸原则是全面的要求,但轻重缓急各有不同。

在初步设计时,首先是要确定弹翼的形状及面积。这时,设计的基本问题是保证导弹具有一定的可用过载;同时,也要照顾到其他方面问题的解决。

孤立弹翼的平面形状,可由三个参数来规定(图7-5),即展弦比 $\lambda_w$ 、根梢比 $\eta_w$ 及后掠角 $\chi$ ,它们定义为

$$\lambda_w = \frac{l_w}{b_p} = \frac{2l_w}{b_m + b_p} = \frac{l_w^2}{S_w} = \frac{S_w}{b_p^2} \quad (7-2-1)$$

$$\eta_w = \frac{b_m}{b_p} \quad (7-2-2)$$

$\chi_0$ ——弹翼前缘的后掠角;

$\chi_{1/4}$ ——弹翼剖面距前缘 $\frac{1}{4}$ 弦长各点连线的后掠角。

式中  $b_p$ ——平均弦长；  
 $l_w$ ——一对孤立弹翼的翼展；  
 $S_w$ ——一对孤立弹翼的面积；  
 $b_{\text{根}}$ ——根弦长；  
 $b_{\text{梢}}$ ——梢弦长。

对于大多数反坦克导弹来说，飞行速度在绝大部分弹道上变化比较平缓，并且都是在亚音速范围内，这种情况中的弹翼形状的选择问题比较简单。

实际上的反坦克导弹，其后掠角都不大，根梢比  $\eta_w$  接近于 1；也就是说，基本上都是矩形弹翼。从弹翼的气动性能来看，在亚音速范围内，在展弦比相等的条件下，矩形弹翼同其他形状的弹翼相比，气动特性相差不大。然而，从设计与工艺的观点看来，矩形弹翼的构造简单，最容易设计与制造。因此，在反坦克导弹中，大多优先采用矩形的弹翼。

但是，也可看到，有些反坦克导弹采用了具有一定后掠角的梯形弹翼。这往往是出于多方面的设计考虑。例如，在弹翼的位置已经无法变动的情况下，可以通过弹翼的后掠而使压力中心向后移动，来适合重心位置的变化（这种变化在研制过程中是经常发生的）。此外，从强度方面来说，梯形弹翼是较为有利的；等等。还有的导弹，如“柯布拉”，其弹翼具有一定的前掠角（参看图 2-12），这是由于这种导弹是直接以弹翼支放在地面上进行发射的，适当的前掠角可使弹翼梢弦前端点位于导弹重心的前方，以保证支放的稳定性。

所以，在初步设计中，开始时完全可以按矩形弹翼来设计；必要时，再视实际情况对弹翼形状进行调整。

若按矩形弹翼来考虑，那么，与形状有关的参数只有一个展弦比  $\lambda_w$  是可变的了。在实际的反坦克导弹中，展弦比  $\lambda_w$  的差别范围相当大，所以，应该着重研究一下它的确定问题，而这个问题又是同弹翼面积的确定问题紧密相关联的。

首先考察一个不与弹身联结的孤立弹翼。若展弦比  $\lambda_w$  增大，这个孤立弹翼的升力系数斜率  $C_{L\alpha}$  也将随之增大。因此，在可用攻角  $\alpha_{\text{可用}}$  不变的前提下，采用较小的弹翼面积  $S_w$  就可提供一定的升力。从这一点上说来，采用较大的展弦比是有利的。

但是，随着展弦比  $\lambda_w$  的增大，临界攻角将要减小，为了避免失速，导弹的可用攻角  $\alpha_{\text{可用}}$  可能不得不适当减小。这一因素也应考虑在内。

此外，展弦比  $\lambda_w$  愈大，弹翼结构的刚度就愈不好；为了保持一定的刚度及强度，弹翼的厚度及重量将会增大。还有，展弦比  $\lambda_w$  增大时，弹翼的翼展也增大，导弹的外形不紧凑，给运输、贮存等工作增加了困难。这些都是不利的因素。

因此，在较大的与较小的展弦比之间，必定有一个适当的中间值，是设计工作感兴趣的。

展弦比  $\lambda_w$  的确定问题，还应同翼体气动干扰效应联系起来考虑。在把弹翼装在弹体上之后，由于弹体的存在，使弹翼上的升力增加；同时，由于弹翼的存在，使弹体上也产生了一部分升力；故总起来说，装在弹体上的弹翼比原来的孤立弹翼要产生更大的升力，这就是翼体干扰效应。在展弦比  $\lambda_w$  较小的情况下，翼体干扰效应较大。这个因素也将影响展弦比  $\lambda_w$  的确定。

要恰当地解决弹翼形状及面积的设计问题，必须综合地考虑上述各方面的因素。为此，

应该首先把弹翼弹身组合体的几何参数同导弹的升力（或同法向可用过载  $n_{\text{可用}}$ ）之间的关系分析清楚。

### § 7-2-2 导弹的可用过载同弹体外形的关系

在最大指令的作用下，导弹所获得的稳态过载就是可用过载。由 § 5-1 中 (5-1-117) 式已知

$$n_{\text{可用}} = k_K^n \cdot K_{\text{max}} \quad (7-2-3)$$

式中  $K_{\text{max}}$ ——最大的指令系数，一般有  $K_{\text{max}} = 1$ ，

$k_K^n$ ——弹体环节关于法向过载的放大系数，

$$k_K^n = \frac{v}{g} \left( \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_2 + a_1 a_4} \right)。$$

此外，又由 (5-1-84) 式可知，弹体环节关于攻角  $\alpha$  的放大系数  $k_K^\alpha$  是

$$k_K^\alpha = \frac{a_3 + a_1 a_6}{a_2 + a_1 a_4}$$

于是 (7-2-3) 式可改写成

$$n_{\text{可用}} = \frac{v}{g} \left( \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_2 + a_1 a_4} \right) K_{\text{max}} = \frac{v}{g} (a_4 \cdot k_K^n - a_5) K_{\text{max}} \quad (7-2-4)$$

若注意到在最大指令作用之下，弹体的稳态攻角就是可用攻角  $\alpha_{\text{可用}}$ ，即

$$\alpha_{\text{可用}} = k_K^\alpha \cdot K_{\text{max}} \quad (7-2-5)$$

则 (7-2-4) 式可改写为

$$n_{\text{可用}} = \frac{v}{g} (a_4 \cdot \alpha_{\text{可用}} - a_5 \cdot K_{\text{max}}) \quad (7-2-6)$$

将 (7-2-6) 式中的  $a_4$  及  $a_5$  写出，可表示为

$$n_{\text{可用}} = \frac{1}{mg} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^\alpha + F \right) \alpha_{\text{可用}} - F_{K, \text{max}} \right] \quad (7-2-7)$$

注意，在采用脉冲调宽式指令及继电器舵机的情况下，上式中的  $F_{K, \text{max}}$  是指平均舵控力的最大值。

公式 (7-2-7) 也可以根据过载的定义，直接由第四章的 (4-1-37) 式导出（请读者自行推导，并从物理意义上考虑清楚式中各项因素的作用）。

若导弹已设计好，那么可按 (7-2-7) 式计算  $n_{\text{可用}}$ ，这就是解决正面问题。

但目前的问题恰好相反， $n_{\text{可用}}$  已由导弹的机动性要求所规定

$$n_{\text{可用}} = n_{\text{需用}} + \Delta n_{\text{需}} \quad (7-2-8)$$

现在的任务是要设计弹翼来保证这个导弹恰好具有预先规定的可用过载  $n_{\text{可用}}$ ，这就是解决反面问题。这时，可把 (7-2-7) 式看做是方程式，从中解出未知量  $C_y^\alpha$ ，这样的  $C_y^\alpha$  就能恰好保证导弹具有预先规定的可用过载  $n_{\text{可用}}$ 。这样的  $C_y^\alpha$  乃是我们所要设计的导弹应该具有的升力系数斜率，可以把它叫做  $C_y^\alpha$  的设计目标值，并以  $[C_y^\alpha]$  来表示它，于是有

$$[C_y^\alpha] = \frac{n_{\text{可用}} mg - F \alpha_{\text{可用}} + F_{K, \text{max}}}{\frac{1}{2} \rho v^2 S \alpha_{\text{可用}}} \quad (7-2-9)$$

为了保证导弹恰好具有所规定的可用过载  $n_{\text{可用}}$ ，关键就在于适当地设计弹翼，使全导弹的升力系数斜率  $C_y^*$  恰好等于按上式算出的设计目标值，即应使

$$C_y^* = [C_y^*] \quad (7-2-10)$$

现在，应设法把  $C_y^*$  用导弹外形的一切有关参数来表达。要想准确地做到这一点，将建立起非常复杂的表达式。但是，如果想要说明解决问题的思路，最好还是抓住主要的影响因素，并建立起简单的近似关系式。尤其是在初步设计的开始阶段，单独地追求个别数据的高度准确性，是没有太大意义的。只是在设计工作的后期，在导弹的构造、外形等参数都已大体确定以后，再进行精益求精的准确计算才是有意义的。

现在考虑全弹升力系数斜率  $C_y^*$  的计算公式。注意到参考面积  $S$  规定为弹身的横截面积， $S = \frac{\pi}{4} D^2$ ，于是全弹的举力系数斜率  $C_y^*$  应按下式计算

$$C_y^* = (C_y^*)_B + \frac{S_w}{S} (C_y^*)_w K_{wB} \quad (7-2-11)$$

式中  $(C_y^*)_B$ ——孤立弹身的升力系数斜率；

$(C_y^*)_w$ ——孤立弹翼的升力系数斜率；

$K_{wB}$ ——考虑弹身弹翼干扰效应的修正系数。

关于孤立弹身的升力系数斜率可近似取为

$$(C_y^*)_B = 2 \quad (7-2-12)$$

关于孤立弹翼的升力系数斜率，在亚音速且弹翼展弦比  $\lambda_w$  较小的情况下，可如下近似计算

$$(C_y^*)_w = \left[ \frac{1.8 \pi \cos(\chi_{1/4})}{\frac{1.8}{\lambda_w} \cos(\chi_{1/4}) + \sqrt{1 + \left(\frac{1.8}{\lambda_w}\right)^2 \cos^2(\chi_{1/4})}} \right] \sqrt{\frac{1}{1 - M^2}} \quad (7-2-13)$$

其中  $\chi_{1/4}$ —— $\frac{1}{4}$  翼弦处诸点连线之后掠角（参看图 7-5），对于矩形弹翼  $\chi_{1/4} = 0$ 。

于是，对于矩形弹翼有

$$(C_y^*)_w = \left[ \frac{\pi \lambda_w}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}} \right] \sqrt{\frac{1}{1 - M^2}} \quad (7-2-14)$$

关于弹身与弹翼之干扰效应的修正系数  $K_{wB}$ ，根据气体动力学的研究，可如下计算

$$K_{wB} = \left[ 1 + \frac{D}{l} \left( 1.2 - \frac{0.2}{\eta_w} \right) \right]^2 \quad (7-2-15)$$

其中  $l$  是弹翼之翼展，即  $l = D + l_w$ 。对于矩形弹翼，其根梢比  $\eta_w = 1$ ，故上式简化为

$$K_{wB} = \left( 1 + \frac{D}{l} \right)^2 \quad (7-2-16)$$

将式 (7-2-11)、(7-2-12)、(7-2-14) 及 (7-2-16) 代入到式 (7-2-10) 之中，就可得到一个关于导弹外形各参数的方程式

$$2 + \frac{S_w}{S} \left( 1 + \frac{D}{l} \right)^2 \left( \frac{\pi \lambda_w}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}} \right) \sqrt{\frac{1}{1 - M^2}} = [C_y^*] \quad (7-2-17)$$

按照 (7-2-9) 式, 在规定了导弹的可用过载  $n_{w\max}$ 、可用攻角  $\alpha_{w\max}$ 、导弹重量  $mg$ 、有效推力  $F$ 、(平均) 舵控力最大值  $F_{K\max}$  之后, 设计的目标值  $[C_y^a]$  即被确定。于是方程式 (7-2-17) 的右端即为已知常数。然而, 方程式的左端则包含三个待定量:  $S_w$ 、 $\lambda_w$  及  $l$ ; 但事实上, 其间还自然地存在着一个几何制约关系, 即

$$S_w = bl_w = \frac{(l_w)^2}{\lambda_w} = \frac{1}{\lambda_w} (1-D)^2 = \frac{l^2}{\lambda_w} \left(1 - \frac{D}{l}\right)^2 \quad (7-2-18)$$

把上式代入到 (7-2-17) 的左端, 消去  $S_w$ , 并记得  $S = \frac{\pi}{4} D^2$ , 即得

$$2 + \frac{\frac{l^2}{\lambda_w} \left(1 - \frac{D}{l}\right)^2}{\frac{\pi}{4} D^2} \left(1 + \frac{D}{l}\right)^2 \left[ \frac{\pi \lambda_w}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} = [C_y^a] \quad (7-2-19)$$

进行整理, 即可得到

$$\frac{\left[\left(\frac{l}{D}\right)^2 - 1\right]^2}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{l}{D}\right)^2} \left[ \frac{\pi}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} = [C_y^a] - 2 \quad (7-2-20)$$

这个方程式的右端仍为常数, 而左端则含有两个待定量:  $\lambda_w$  及  $\left(\frac{l}{D}\right)$ 。只要给定一个展弦比  $\lambda_w$ , 就能从方程中解出一个  $\left(\frac{l}{D}\right)$  值, 从而就能按 (7-2-18) 式计算出弹翼面积  $S_w$ 。这样定下来的弹翼形状及面积, 将能恰好满足所规定的设计条件及设计目标。

方程 (7-2-20) 的具体解法很多, 为简便起见, 可利用图解法。为此, 应先将式 (7-2-20) 改写为

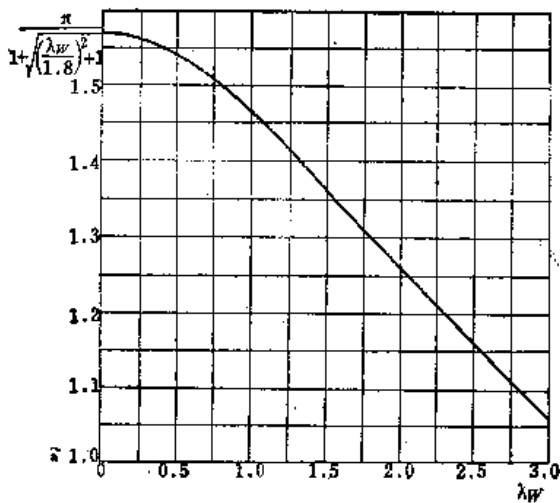


图7-6 亚音速矩形弹翼设计用曲线

$$\frac{[C_y^a]_{M=0}}{\lambda_w} = \frac{\pi}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}}$$

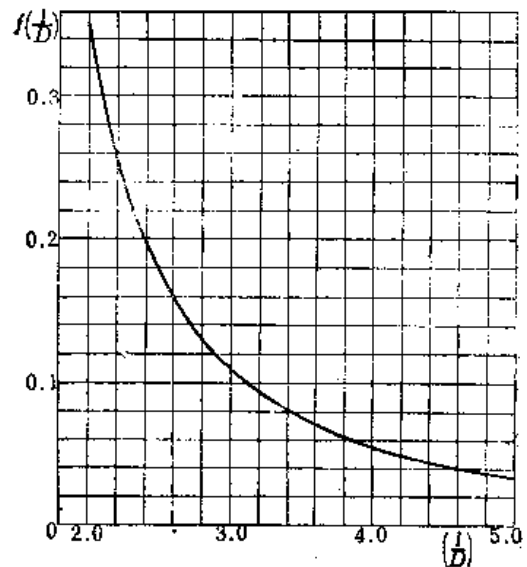


图7-7 矩形弹翼设计用曲线

$$f\left(\frac{l}{D}\right) = \frac{\pi}{4} \frac{\left(\frac{l}{D}\right)^2}{\left[\left(\frac{l}{D}\right)^2 - 1\right]}$$

$$\frac{\pi}{4} \frac{\left(\frac{l}{D}\right)^2}{\left[\left(\frac{l}{D}\right)^2 - 1\right]^2} = \frac{\frac{\pi}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}}}{\{[C_y^0] - 2\} \sqrt{1 - M^2}} \quad (7-2-21)$$

上式右边的分子只是展弦比  $\lambda_w$  的函数；而左边是无量纲外形参数  $\left(\frac{l}{D}\right)$  的函数。于是，利用图 7-6 及图 7-7 的曲线，并按图 7-8 所示之图解法，即可很快地根据给出的展弦比  $\lambda_w$  来确定出符合于方程 (7-2-21) 的  $\left(\frac{l}{D}\right)$  之值。关于图 7-8 所示的计算过程，已不需另做说明，或可参看后面的例题 7-1。

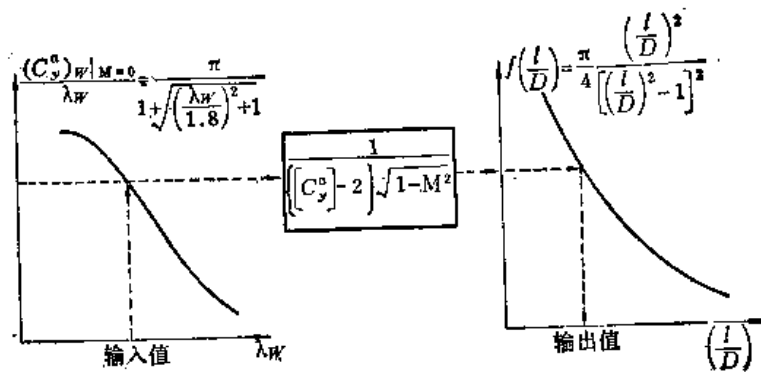


图7-8 弹翼设计方程 (7-2-21) 的图解法

### § 7-2-3 在可用攻角已定的情况下设计弹翼

如果根据经验，已经初步确定了导弹的可用攻角  $\alpha_{可用}$ ，那么，弹翼的设计问题是比较容易解决的。因为，已知可用攻角  $\alpha_{可用}$ ，即可由式 (7-2-9) 确定导弹的升力系数斜率的设计目标值  $[C_y^0]$ ，在  $[C_y^0]$  为常数的情况下，对方程式 (7-2-20) 或 (7-2-21) 的求解是毫无困难的。

我们可以给出一系列的展弦比  $\lambda_w$  值，并从方程 (7-2-20) 或 (7-2-21) 解出一系列相应的  $\left(\frac{l}{D}\right)$  之值，再从式 (7-2-18) 即可算出一系列相应的弹翼面积  $S_w$ 。这样，就获得了一组可能方案，便于比较选优。

下面给出一个计算例子。

**例题 7-1** 若导弹飞行速度  $v = 100$  米/秒，弹径  $D = 0.12$  米，导弹质量  $m = 10$  千克；选定可用攻角  $\alpha_{可用} = 10^\circ = 0.1745$  弧度；预定导弹的可用过载应是  $n_{可用} = 1.9$ ；导弹的有效推力  $F = 98.1$  牛顿，导弹的舵上控制力的幅值是  $F_{K,max} = 25.7$  牛顿（舵机位于重心后方）。

要求根据以上条件，设计导弹弹翼的面积及形状。

**解法** 先确定方程 (7-2-21) 中的常数

$$\begin{aligned} [C_y^0] &= -\frac{n_{可用}mg - F \cdot \alpha_{可用} + F_{K,max}}{\frac{1}{2} \rho v^2 S \alpha_{可用}} = \frac{1.9 \times 10 \times 9.81 - 9.81 \times 0.1745 + 25.7}{\frac{1}{2} \times 1.23 \times 100^2 \times 0.01131 \times 0.1745} \\ &= 16.06 (1/\text{弧度}) \end{aligned}$$

$$\{(C_x^0) - 2\} \sqrt{1 - M^2} = \{16.06 - 2\} \sqrt{1 - \left(\frac{100}{340}\right)^2} = 13.44$$

然后, 给定一系列的展弦比  $\lambda_w$  之可能值, 并按下面的表 7-1 所列步骤进行计算。表中最后一栏列出了同展弦比  $\lambda_w$  相应的最优攻角  $\alpha_{op}$  之计算值 (假定零升阻力  $C_{x,0} = 0.4$ )。可以看出所选的可用攻角  $\alpha_{可用} = 0.1745$  弧度, 在展弦比  $\lambda_w = 0.5 \sim 3.0$  的范围内, 同最优攻角  $\alpha_{op}$  相差不多。因此, 可以认为表中算出的数据基本上是合理的; 但尚可根据最优攻角  $\alpha_{op}$  来调整可用攻角  $\alpha_{可用}$ , 并再次进行计算。

表 7-1 例题 7-1 的计算步骤

步骤	计算方法	展弦比 $\lambda_w$	0.5	1.0	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0
(1)	由图 7-6 查出 $\frac{\pi}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}}$		1.542	1.466	1.364	1.310	1.260	1.160	1.066
(2)	$\frac{1}{13.44} \times \frac{\pi}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_w}{1.8}\right)^2 + 1}}$		0.1147	0.1091	0.1015	0.09747	0.09375	0.08631	0.07932
(3)	由图 6-7 以 (2) 中数据为纵坐标, 从横坐标查出 $(l/D)$		2.95	3.02	3.11	3.16	3.21	3.32	3.44
(4)	$l = \left(\frac{l}{D}\right) \times 0.12$ (米)		0.354	0.362	0.373	0.379	0.385	0.398	0.413
(5)	$l_w = l - 0.12$ (米)		0.234	0.242	0.253	0.259	0.265	0.278	0.293
(6)	$b = l_w / \lambda_w$ (米)		0.468	0.242	0.1687	0.148	0.1325	0.1112	0.0977
(7)	$S_w = b \cdot l_w$ (米 <sup>2</sup> )		0.1095	0.05856	0.04268	0.03833	0.03511	0.03091	0.02863
(8)	$\alpha_{op} = 0.6405 \sqrt{\lambda_w \cdot S_w}$ (弧度)		0.1499	0.1550	0.1621	0.1659	0.1697	0.1780	0.1877

按照表 7-1 中算得的数据, 将各种可能的弹翼方案绘在图上, 如图 7-9 所示。由图可以看出, 当展弦比  $\lambda_w$  很小时, 弹翼弦长  $b$  太大, 且弹翼面积  $S_w$  太大。增加展弦比  $\lambda_w$  时, 可使弹翼面积减小, 但翼展  $l$  将要增加。综合看来, 取中间数值可能较为适宜; 例如, 初步考虑可在  $\lambda_w = 1.5 \sim 2.0$  的范围内选择。进一步还应考虑到弹翼同弹身联结处的具体结构条件, 尽可能不使弹翼跨在两个弹身仓段之间, 故应对弹翼的弦长加以限制等。总之, 应根据具体条件来最后决定弹翼的平面形状。

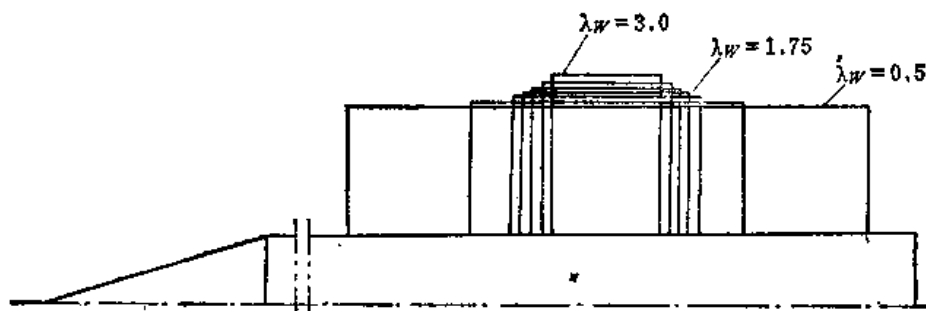


图 7-9 例题 7-1 中弹翼外形设计的可能方案



#### § 7-2-4 在可用攻角 $\alpha_{可用}$ 随展弦比 $\lambda_w$ 变化的情况下设计弹翼

在 § 7-2-3 中, 包含着一个矛盾, 就是事前规定了可用攻角  $\alpha_{可用}$ , 但是, 展弦比  $\lambda_w$  却是可变的。这种做法可能是不太合理的。因为, 可用攻角  $\alpha_{可用}$  的合理数值同展弦比  $\lambda_w$  之间具有一定的关系。

如果以最有利攻角  $\alpha_{o,p}$  为准来确定可用攻角  $\alpha_{可用}$ , 即  $\alpha_{可用} \approx \alpha_{o,p}$ , 那么, 由于  $\lambda_w$  对于最有利攻角  $\alpha_{o,p}$  具有明显关系 (由式 (7-1-5) 及 (7-1-14) 可以看出),  $\lambda_w$  的改变必将影响可用攻角  $\alpha_{可用}$  的合理数值。

另一方面, 可用攻角的上界限是由临界攻角决定的。但是, 当展弦比  $\lambda_w$  减小的时候, 临界攻角  $\alpha_{临界}$  将会增大 (图 7-4)。例如, 当  $\lambda_w = 1$  时, 可以达到  $\alpha_{临界} = 30^\circ$ , 在这种情况下, 若是仍取很小的可用攻角 (如取  $\alpha_{可用} = 10^\circ$ ), 那么, 显然不能充分发挥弹翼的潜力。在这种情况下, 若能把可用攻角取大一点, 在产生同样大小的可用过载的前提下, 弹翼的面积将会减小, 于是全弹的零升阻力  $C_{x_0}$  也将有所减小, 这对于升阻比是有好影响的。考虑到这些因素, 采用较小的展弦比, 可能是更可取的。

但是, 可用攻角  $\alpha_{可用}$  到底应增加到多大? 这个问题却不太容易简单地确定。我们只能大体上讲, 可用攻角  $\alpha_{可用}$  应该小于临界攻角  $\alpha_{临界}$ , 并应保证导弹在响应阶跃指令的过渡过程中, 其实际攻角的峰值也不会超过临界攻角。这样, 就应该根据超调量的计算来确定可用攻角; 但是在弹翼未设计好之前, 相对阻尼系数  $\zeta$  是不可能知道的, 因此超调量  $\sigma\%$  也是不可能准确算出的。不过, 反坦克导弹的相对阻尼系数  $\zeta$  一般都比较小, 故其超调量都很大; 在初步计算时, 为了保险起见, 可以大体限定可用攻角  $\alpha_{可用}$  为临界攻角  $\alpha_{临界}$  的一半左右为宜。

在攻角  $\alpha$  很大时, 导弹的俯仰力矩并不是线性的; 即  $\alpha$  愈大  $|m_z^a|$  就愈小; 在  $\alpha = \alpha_{临界}$  的条件下,  $m_z^a = 0$ 。所以, 也许应该把可用攻角  $\alpha_{可用}$  取得比临界攻角的一半还要小才行。对这一问题进行准确的理论分析是很困难的, 主要应通过试验来决定。此外, 在附录二中, 提到威基兰特反坦克导弹的可用攻角达  $30^\circ$ , 据估计其临界攻角为  $40^\circ$ , 即  $\alpha_{可用} \approx 0.75\alpha_{临界}$ 。但是, 该弹装有自动驾驶仪, 因此可能获得一定的人工阻尼, 从而使弹体在过渡过程中的超调量大为减小, 才能把可用攻角取得那样大。

无论如何, 可根据不同的弹翼展弦比  $\lambda_w$  来确定其临界攻角, 并相应地来限定可用攻角。这时, 应该采用理论与实践相结合的方法, 例如, 开始可以取  $\alpha_{可用} = 0.5\alpha_{临界}$ , 据此设计弹翼, 然后进行试验, 再进一步调整  $\alpha_{可用}$  的数值, 如此多次循环, 直到求得最合适的  $\alpha_{可用}$  数据。

所以, 不管怎样, 总能够按  $\lambda_w$  的变化而对  $\alpha_{可用}$  取不同的值。于是按 (7-2-9) 式确定的导弹升力系数斜率之设计值  $[C_y^a]$  也应是随  $\lambda_w$  而变的。这样, 只要把  $[C_y^a]$  看做是  $\lambda_w$  的函数, 仍旧可以利用 (7-2-21) 式及相应的图解法来解决弹翼的设计问题。具体的计算过程可参看下面的例题 7-2。只是由于没有考虑在大攻角条件下  $C_y - \alpha$  之间的非线性关系, 这种计算是粗略的, 必须在最后进行更精确的演算和调整。

**例题 7-2** 仍为例题 7-1 之导弹, 只是其可用攻角取决于展弦比  $\lambda_w$  (令  $\alpha_{可用} = 0.5\alpha_{临界}$ ), 即按下表

展弦比 $\lambda_W$	0.5	1.0	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0
临界攻角 $\alpha_{临界}$	40°	35°	31°	29°	27°	24°	22°
可用攻角	20°	17.5°	15.5°	14.5°	13.5°	12°	11°

**要求** 设计弹翼的面积及形状。

**解法** 先算出

$$n_{可用} \cdot mg + F_{K, \max} = 1.9 \times 10 \times 9.81 + 25.7 = 212.1 \text{ 牛顿}$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 S = \frac{1}{2} \times 1.23 \times (100)^2 \times 0.01131 = 69.56 \text{ 牛顿}$$

然后, 按下面表格进行计算。表中最后两栏算出了最有利攻角  $\alpha_{op}$  (假定  $C_{x,0} = 0.4$ ) 及  $\frac{\alpha_{可用}}{\alpha_{op}}$  之值, 可做参考。可以看出 (图 7-10), 按这种方法设计出来的弹翼同例题 7-1 相比, 具有更小的弹翼面积。这主要是由于把可用攻角  $\alpha_{可用}$  取得大了一点, 只要在过渡过程中超调量最大的情况下也能保证导弹的攻角不超过临界攻角, 这个方案可能是可取的。

展弦比 $\lambda_W$	0.5	1.0	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0
可用攻角 $\alpha_{可用}$ (弧度)	0.345	0.305	0.271	0.253	0.236	0.210	0.192
$F \cdot \alpha_{可用}$ (牛顿)	33.84	29.92	26.58	24.82	23.15	20.60	18.84
$212.1 - F \cdot \alpha_{可用}$	178.26	182.18	185.52	187.28	188.95	191.50	193.26
$\frac{1}{2} \rho v^2 S \alpha_{可用}$ (牛顿)	23.998	21.22	18.85	17.60	16.42	14.61	13.36
$(C_y^a)$	7.428	8.585	9.842	10.64	11.51	13.11	14.47
$\{(C_y^a) - 2\} \sqrt{1 - M^2}$	5.17	6.25	7.44	8.06	9.01	10.52	11.85
$\pi / \left[ 1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_W}{1.8}\right)^2 + 1} \right]$	1.542	1.466	1.364	1.310	1.260	1.160	1.066
$\frac{\pi / \left[ 1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_W}{1.8}\right)^2 + 1} \right]}{\{(C_y^a) - 2\} \sqrt{1 - M^2}}$	0.298	0.234	0.183	0.162	0.140	0.110	0.090
$\left(\frac{l}{D}\right)$ 由图 7-7 曲线查出	2.1	2.28	2.48	2.59	2.74	3.0	3.27
$l = 0.12 \times \left(\frac{l}{D}\right)$ (米)	0.252	0.274	0.298	0.310	0.328	0.360	0.392
$l_W = l - 0.12$ (米)	0.132	0.154	0.178	0.190	0.208	0.240	0.272
$b = \frac{l_W}{\lambda_W}$ (米)	0.264	0.154	0.1187	0.1088	0.104	0.096	0.091
$S_W = b \cdot l_W$ (米 <sup>2</sup> )	0.0349	0.0238	0.0211	0.0207	0.0217	0.0230	0.0247
$\frac{S_W}{S}$	3.086	2.104	1.866	1.830	1.919	2.034	2.184
$A = \frac{1.05}{\pi \lambda_W} \cdot \frac{S}{S_W}$	0.2169	0.1594	0.1193	0.1047	0.0874	0.0656	0.0511
$\alpha_{op}$ (弧度)	0.1828	0.1845	0.1860	0.1837	0.1859	0.1884	0.1933
$\alpha_{可用} / \alpha_{op}$	1.89	1.65	1.46	1.38	1.27	1.11	0.99

必须注意：为了确保导弹在飞行中的攻角不会超过临界攻角，一定要根据具体的设计条件，通过风洞实验获得导弹的临界攻角数据以及各空气动力系数随攻角 $\alpha$ 而变化的可靠数据，并通过仔细的计算来校核。

为了实现这些方案，需要注意一个前提，就是舵机及操纵装置应较强大，以便提供更大的舵控力（力矩），使导弹在受到最大指令时，确能达到所规定的可用攻角。这一问题，在本章第四节中还要研究。

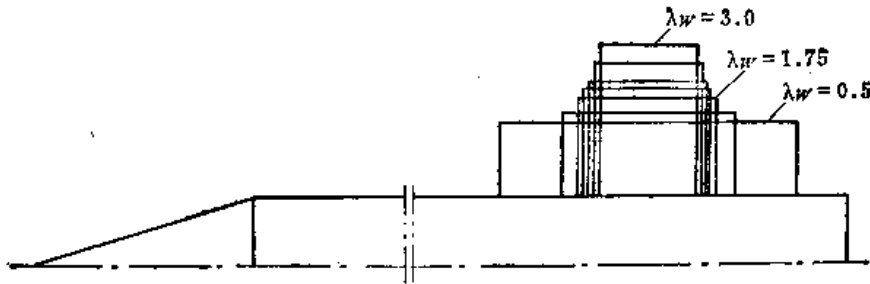


图7-10 例题7-2中的弹翼外形设计的可能方案

### § 7-3 弹翼位置的确定

导弹在飞行过程中应具有适当的稳定性和特定的动态特性——在无控飞行中应具有适当的偏航波长、在有控飞行中应具有适当的固有摆动频率 $\omega_n$ 。为此，必须适当地设计弹翼的位置，以使全弹的压力中心位于重心之后，并有一定的裕量。

从第五章的讨论可知，弹体的固有摆动频率 $\omega_n$ 是比较重要的总体参数。导弹的空气动力设计应该保证导弹的固有摆动频率 $\omega_n$ 在适当的范围内。由第五章知

$$\omega_n = \sqrt{a_2 + a_1 a_4} \approx \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{-m_z^a \rho v^2 S L}{2J_x}} \quad (7-3-1)$$

其中，俯仰力矩系数斜率 $m_z^a$ 可通过升力系数斜率 $C_y^a$ 来表示：

$$m_z^a = - (C_y^a) \frac{x_p - x_G}{L} \quad (7-3-2)$$

式中  $x_p$ ——从弹顶至全弹压心的距离；

$x_G$ ——从弹顶至全弹质心的距离。

所以

$$x_p - x_G = \frac{2J_x \omega_n^2}{\rho v^2 S C_y^a} \quad (7-3-3)$$

如果已经规定了弹体摆动的固有频率 $\omega_n$ 的下限值，那么就可由这个式子来确定全弹压力中心位置的“前限”，即

$$x_p = \frac{2J_x \omega_n^2}{\rho v^2 S C_y^a} + x_G \quad (7-3-4)$$

注意，(7-3-4)式中的各参量都不是固定不变的。首先，飞行速度 $v$ 是可能变化的，这就影响到压力中心位置的变化。一般说来，在亚音速下，随着飞行速度 $v$ 的增加，压力

中心将略为向后移动；在超音速下，随着飞行速度  $v$  的增加，压力中心将显著地向前移动。

此外，在飞行过程中，导弹的转动惯量  $J_x$  及重心位置  $x_G$  也都是变化的。

对于绝大多数的第一代和第二代的反坦克导弹，续航段速度  $v$  是亚音速的，并且是随时间而增大的。此外，在一般的弹体布局情况下，全弹重心位置在续航段上是逐渐前移的。

在上述常见的情况下，在续航段开始时刻，压力中心将位于“压心前限”，而重心将位于“重心后限”，如图 7-11 所示。因此，从保证飞行稳定性的观点上来看，关键的问题是要在续航段开始的时刻，保证压心前限同重心后限之间具有足够的距离。随着续航段飞行时间的延续，这个距离将愈来愈大，飞行的稳定性也将愈来愈大。所以，在一般情况下，可以根据续航段开始时刻的数据为准，来计算 (7-3-4) 式。

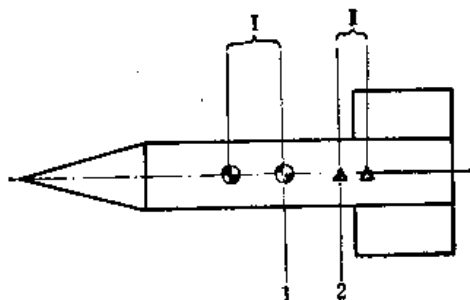


图7-11 重心和压心的变化

I—重心变化范围；II—压心变化范围；

1—重心后限；2—压心前限。

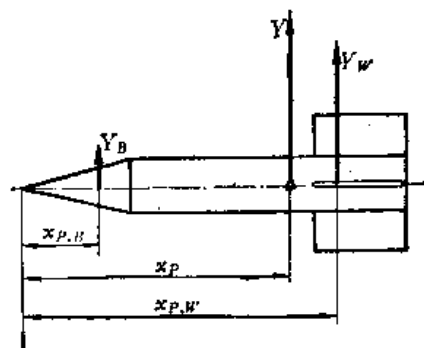


图7-12 压力中心的位置关系

为了保证整个弹体压心位置为规定值，必须适当地安排弹翼的位置。问题的中心是确定弹翼这一部件的压力中心应该在什么位置上。计算的出发点，是认为全弹压心位置乃是弹体各部件的空气动力合力的作用点。

在第一次近似计算中，可暂不考虑弹身中段及弹尾部的影响，即认为（图7-12）

$$Y \cdot x_P = (Y_W K_{WB}) x_{P,W} + Y_B x_{P,B} \quad (7-3-5)$$

其中， $Y$ 、 $Y_W$  及  $Y_B$ ——分别为全弹、弹翼及弹身上的升力；

$x_P$ 、 $x_{P,W}$  及  $x_{P,B}$ ——分别为弹顶至全弹的、弹翼的及弹身的压力中心的距离。

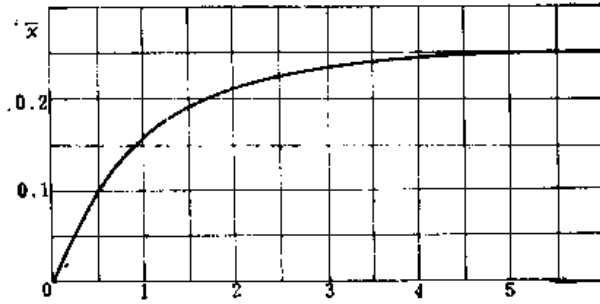
从上式可解出弹翼的压力中心位置  $x_{P,W}$

$$x_{P,W} = \frac{Y x_P - Y_B x_{P,B}}{Y_W \cdot K_{WB}} \quad (7-3-6)$$

或

$$x_{P,W} = \frac{C_y^a \cdot x_P - (C_y^a)_B x_{P,B}}{\frac{S_W}{S} (C_y^a)_W K_{WB}}$$

下面应具体确定弹翼位置，以保证弹翼压心确能落在按 (7-3-6) 所算出的位置上。为此，只需按照图 7-13 中的曲线，求出孤立弹翼的压力中心距前缘之距离即可。图 7-13 之

图7-13 矩形弹翼的压力中心距前缘的距离  $\bar{x}$ 

曲线只适用于亚音速。可以认为,在亚音速范围内由于翼身干扰而引起的升力之压力中心,同孤立弹翼之压力中心位置是一致的,这样,计算就很简单。

### § 7-4 操纵器位置的确定

在第五章中已指出,导弹的操纵性和稳定性之间的关系是矛盾的,又是必须协调一致的。在导弹弹翼的面积及形状确定以后,导弹弹翼的位置应根据稳定性的要求来决定。这一节要讨论的是,应根据操纵性的要求来适当地决定操纵器的位置,这样才能全面地解决操纵性和稳定性的关系。

#### § 7-4-1 根据可用攻角来计算操纵器位置

为了保证导弹具有一定的操纵性,首先就要保证导弹在受到最大指令的时候,能够以规定的可用过载  $n_{可用}$  进行机动飞行。为此,在受到最大指令的时候,导弹的攻角的稳态值,应该恰好达到规定的可用攻角  $\alpha_{可用}$  值。注意,是恰好达到。如果达不到规定的可用攻角,那么当然也就达不到规定的可用过载,操纵性就不能保证。但是,如果超过了规定的可用攻角,在摆动运动的过渡过程中,若超调量较大,就有可能超过临界攻角,这也是不行的。

事实上,不可能在整个弹道的任何一点上都使导弹最大稳态攻角恰好达到规定的可用攻角。通常,只能在若干特定的弹道点上,使上述条件恰好满足;而在弹道的其它部分,只能使实际的稳态攻角小于可用攻角。这一问题稍后再谈。

导弹的稳态攻角可通过弹体环节的放大系数算出

$$\alpha_{稳} = k_k^a \cdot K \quad (7-4-1)$$

当以全指令进行操纵时,指令系数  $K = 1$ 。于是,为了保证导弹在指定的弹道点上的最大稳态攻角恰好等于规定的可用攻角,只需满足下式

$$\alpha_{稳max} = k_k^a \cdot K = \alpha_{可用} \quad (7-4-2)$$

然而

$$k_k^a = \frac{a_3 + a_1 a_5}{a_2 + a_1 a_4} = \frac{\frac{-L_k}{J_z} \cdot F_{K,max} + \left( \frac{-\rho v S L^2 m_z^{\omega z}}{2J_z} \right) \left( \frac{F_{K,max}}{mv} \right)}{\frac{-\rho v^2 S L m_z^a}{2J_z} + \left( \frac{-\rho v S L^2 m_z^{\omega z}}{2J_z} \right) \left( \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a + F}{mv} \right)} \quad (7-4-3)$$

由式 (7-4-2) 及 (7-4-3), 可解出

$$-L_K \cdot F_{K, \max} = \alpha_{\text{可用}} \left( -\frac{\rho v^2 S L m_z^a}{2} \right) + \left( -\frac{\rho v S L^2 m_z^{a^2}}{2} \right) \cdot \left[ \alpha_{\text{可用}} \left( -\frac{1}{2} \frac{\rho v^2 S C_y^a + F}{m v} \right) - \frac{F_{K, \max}}{m v} \right] \quad (7-4-4)$$

上式具有明显的物理意义；(7-4-4)式左边表示由最大的舵控力产生的相对于弹体重心的力矩，即舵控力矩，式子右边第一项代表着在可用攻角  $\alpha_{\text{可用}}$  情况下弹体的空气动力俯仰力矩；式子右边方括弧内的部分代表着在升力、推力及舵控力作用下导弹的弹道倾角变化率的稳态值  $\dot{\theta}_{\text{稳态, max}}$ ，于是右边第二项就代表着由于导弹稳态转弯所引起的空气动力阻尼力矩。显然，上面三个力矩是要平衡的。

阻尼力矩总是比较小的，因此上式可简化为

$$-L_K \cdot F_{K, \max} \approx \alpha_{\text{可用}} \left( -\frac{\rho v^2 S L m_z^a}{2} \right) \quad (7-4-5)$$

于是，由上式即可根据规定的可用攻角，在指定的弹道点上，计算所需的舵控力矩。最大舵控力  $F_{K, \max}$  是由操纵机构类型及特征所决定的。在  $F_{K, \max}$  已确定之后，即可确定其力臂  $|L_K|$ 。当然，根据具体情况，也可能在最大舵控力  $F_{K, \max}$  及其力臂  $|L_K|$  之间进行一些调整。

上面说的是对舵控力矩进行设计的问题。反过来，如果舵控力矩  $-L_K F_{K, \max}$  已经确定，我们也可以考察导弹在不同的弹道点上的最大稳态攻角的变化。这时，可将 (7-4-5) 进行改写如下：

$$\alpha_{\text{稳态, max}} \approx \frac{-L_K \cdot F_{K, \max}}{-\frac{\rho}{2} v^2 S L m_z^a} \quad (7-4-6)$$

若注意到

$$L_K = x_G - x_K$$

式中  $x_K$ ——弹顶至舵控力作用点之距离。

此外，并考虑到式 (7-3-2)，则可将式 (7-4-6) 改写为

$$\alpha_{\text{稳态, max}} \approx \frac{F_{K, \max} (x_K - x_G)}{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a (x_P - x_G)} \quad (7-4-7)$$

分析上式可以看出，在最大指令时，导弹攻角的稳态值在弹道上的变化情况，主要决定于导弹重心位置  $x_G$  的变化及导弹速度  $v$  的变化。

如果，导弹的续航发动机推进剂及导线是安放在导弹重心之后的部位上，那么，随着飞行时间的延续，导弹的重心必将逐渐向前移动。注意

$$\frac{x_K - x_G}{x_P - x_G} = 1 + \frac{x_K - x_P}{x_P - x_G}$$

假若，导弹的舵控力作用点位于压力中心之后，即  $x_K > x_P$ ，那么，在重心逐渐向前移动从而使  $x_m$  愈来愈小的过程中，因子  $(x_K - x_P)/(x_P - x_G)$  也愈来愈小。于是， $(x_K - x_G)/(x_P - x_G)$  也就愈来愈小。这就是说，如果其它一切条件都不变，随着导弹重心的前移，导弹的最大

稳态攻角  $\alpha_{s, \max}$  是愈来愈小的。

对于通常的舵机装于弹尾部的导弹，总能满足  $x_K > x_P$  的条件。因此，上述的情况是经常能够遇到的。在这种情况下，如果根据续航段开始时的条件来决定导弹的舵控力矩  $-L_K \cdot F_{K, \max}$ ，那么，在以后的飞行过程中，导弹的最大稳态攻角将处处不会超过可用攻角。这种情况是符合设计意图的。

### § 7-4-2 根据可用过载来设计操纵器位置

一般可根据可用攻角来设计操纵器位置，然后再计算导弹所具有的可用过载。但也可以直接根据可用过载来设计操纵器位置，然后再来验算可用攻角。

现在来看，可用过载  $n_{\text{可用}}$  同什么因素有关。将 (7-4-7) 式代入到 (7-2-7) 式中取代  $\alpha_{\text{可用}}$ ，即得

$$n_{\text{可用}} = \frac{F_{K, \max}}{mg} \left[ \left( \frac{x_K - x_G}{x_P - x_G} \right) \cdot \left( 1 + \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a} \right) - 1 \right] \quad (7-4-8)$$

这个式子表明，在操纵器位置  $x_K$  及最大舵控力  $F_{K, \max}$  已定的情况下，导弹的可用过载  $n_{\text{可用}}$  在不同的弹道点处是不同的。出乎一般所料，速度  $v$  的变化对于可用过载  $n_{\text{可用}}$  的影响常常是不大的，这是由于  $F / \left( \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a \right)$  通常只有百分之几的原故。

然而，导弹重心位置  $x_G$  的变化对于可用过载  $n_{\text{可用}}$  却有显著的影响。在很多情况中， $x_K - x_G \gg x_P - x_G$ ，这时，重心位置向前移动后，将导致可用过载  $n_{\text{可用}}$  显著地下降。

在飞行过程中，随着重心前移而导致可用过载减小的现象，并不是不好的。因为，只是在续航段开始前后，即在导入段上，导弹的需用过载最大。而在导弹进入瞄准线之后，需用过载就比较小了，这时，导弹的可用过载下降并没有坏处。

如果，根据导弹导入段的要求及导弹的速度图，确定了导弹的需用过载随时间而变化的情况(如图 7-14)，那么就能够如图所示选定一个设计点。根据这个设计点时刻的导弹重心位置及飞行速度等条件，来确定导弹的舵控力矩；这样构造出来的导弹，一般说来，在整个飞行过程中，都能保证  $n_{\text{可用}} > n_{\text{需用}}$ 。这时可将式 (7-4-8) 改写成

$$\frac{x_K - x_G}{x_P - x_G} = \frac{\frac{n_{\text{需用}} \cdot mg}{F_{K, \max}} + 1}{1 + \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a}} \quad (7-4-9)$$

即可根据式 (7-4-9)，代入设计点的条件，来确定操纵机构的位置。

**例题 7-3** 若导弹弹径为  $D = 0.12$  米，在导入段结束时刻，导弹的速度为 120 米/秒，导

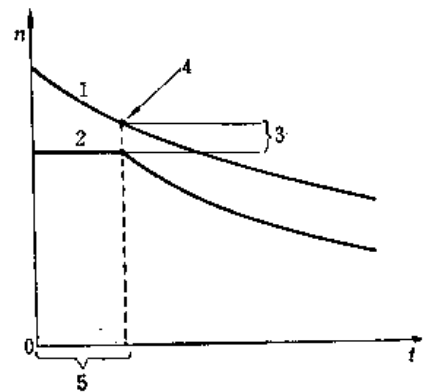


图 7-14 导弹过载随时间而变化  
1—可用过载  $n_{\text{可用}}$ ；2—需用过载  $n_{\text{需用}}$ ；3—过载储备量  $\Delta n_{\text{储备}}$ ；4—设计点；5—导入段。

弹质量为 9 千克，导弹质心位置（从弹顶算起）为  $x_G = 0.490$  米，全弹压心位置为  $x_P = 0.530$  米，升力系数斜率  $C_y^a = 16.4$  1/弧度，推力  $F = 98.1$  牛顿，最大舵控力  $F_{K,max} = 25.7$  牛顿。并规定导弹在此时刻应具有的可用过载  $n_{可用} = 1.9$ 。

要求确定导弹操纵装置的位置。

**解法** 按式 (7-4-9) 可得

$$x_K = (x_P - x_G) \frac{\frac{n_{可用}mg}{F_{K,max}} + 1}{1 + \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a} - x_G$$

$$= (0.53 - 0.490) \frac{\frac{1.9 \times 9 \times 9.81}{25.7} + 1}{1 + \frac{1}{2} \times 1.23 \times 120^2 \times 0.01131 \times 16.4} + 0.490 = 0.774 \text{ 米}$$

还应演算一下，在此条件下，若受到全指令的操纵作用，弹体的攻角将为多大？这时，弹体环节关于攻角的放大系数是

$$k_K^a = \frac{a_3 + a_1 a_3}{a_2 + a_1 a_4} \approx \frac{a_3}{a_2} = \frac{(x_K - x_G) F_{K,max}}{\frac{1}{2} \rho v^2 S (x_P - x_m) C_y^a}$$

$$= \frac{(0.774 - 0.490) \times 25.7}{\frac{1}{2} \times 1.23 \times 120^2 \times 0.01131 \times (0.530 - 0.490) \times 16.4} = 0.1111$$

在全指令下的稳态攻角即为

$$\alpha_{\text{稳,max}} = k_K^a \cdot 1 = 0.1111 \text{ 弧度} = 6.37^\circ$$

我们再来验算一下，若在续航段开始点，导弹的速度为 100 米/秒，导弹质量为 10 千克，导弹重心位置为  $x_G = 0.500$  米，这时，在全指令操纵作用下，导弹的攻角将是多大？

这时，弹体环节的放大系数是

$$k_K^a = \frac{(x_K - x_G) F_{K,max}}{\frac{1}{2} \rho v^2 S (x_P - x_G) C_y^a} = \frac{(0.774 - 0.500) \times 25.7}{\frac{1}{2} \times 1.23 \times 100^2 \times 0.01131 \times (0.530 - 0.500) \times 16.4}$$

$$= 0.2058$$

故，在全指令作用下的稳态攻角为

$$\alpha_{\text{稳,max}} = 0.2058 \text{ 弧度} = 11.79^\circ$$

这个攻角还不算大，是允许的。假如这一攻角太大，以致接近于临界攻角；那么，可能就需要对射手的操作要领做出特殊的规定，例如，不准许射手在续航刚开始的时候发出阶跃的全指令等等。

## § 7-5 滚转导弹的空气动力设计问题

滚转导弹同不滚转导弹的空气动力设计问题是有所不同的。



对于不滚转的导弹，需要一个倾斜稳定系统，依靠弹上陀螺来敏感弹体的倾斜角，并通过适当的装置产生倾斜控制力矩，使弹体在干扰作用下仍保持倾斜稳定。产生倾斜控制力矩的办法可能是多种多样的，然而，大多是利用空气动力装置（如尾舵、全动翼、扰流片、副翼……等等）。这是由于空气动力装置容易布置在远离弹体轴线的地方，从而能提供较大的倾斜控制力矩（相反地，利用燃气流产生控制力的装置来提供倾斜控制力矩的效率就比较低）。对于这一类导弹，其倾斜稳定系统和提供倾斜控制力矩的装置的设计问题，可以参照一般的飞机和导弹的设计方法，在本书中不再叙述。

弹体滚转的反坦克导弹，不需要倾斜稳定系统，但却必须对导弹的转速变化范围及转速变化率提出一定的要求。因此，对于这种类型的导弹，需要从空气动力、推进和发射等多方面采取措施来保证其转速按预定规律变化。

在本节中，将分析滚转导弹的转速变化规律，并且要研究如何实现预定的转速变化规律的问题。

### § 7-5-1 导旋方式及滚转力矩

为了使导弹在飞行中以适当的转速旋转，必须把适当的滚转力矩施加给导弹。对导弹施加主动的滚转力矩的技术措施，称为导旋方式。导旋方式可以大体上分为发射导旋、燃气导旋和空气动力导旋三类。在导弹的设计工作中，常需根据具体情况，把几种导旋方式配合起来，才能保证导弹的转速按预定规律变化。

#### 一、发射导旋

对于筒式发射的导弹，可以采用发射导旋，即在发射筒中制出螺旋导槽，使导弹在离开发射筒时即具有一定的出口转速  $\omega_{x,0}$ ，出口转速决定于螺旋导槽的螺距  $h_r$  及出口速度  $v_0$ ：

$$\omega_{x,0} = 2\pi \frac{v_0}{h_r} \quad (\text{弧度/秒}) \quad (7-5-1)$$

筒式发射的导弹若具有适当的出口转速还可以有效地改进导弹的启控点散布。但若无其他导旋方式相配合，在飞行中转速将迅速衰减。

#### 二、燃气导旋

为了在启控点处使导弹达到预定的转速，必须在很短的起飞段上赋予导弹以相当大的滚转力矩。燃气导旋正是提供这一力矩的有效方法。在滚转的反坦克导弹的设计工作中经常采用这种导旋方法。其中又有许多具体办法，分述如下：

##### （一）倾斜安置发动机喷管

如图 7-15 所示，将发动机喷管组中的各喷管，安排在距导弹轴线有一定距离的位置上，并且相对于弹体倾斜一个角度  $\delta_p$ ；这样，由于燃气喷流的动量具有切向分量，就会产生一个滚转力矩  $M_{x,p}$ ，可近似计算如下

$$M_{x,p} = R_p \cdot F \sin \delta_p \quad (7-5-2)$$

式中  $F$ ——若喷管不倾斜时，发动机的总推力；

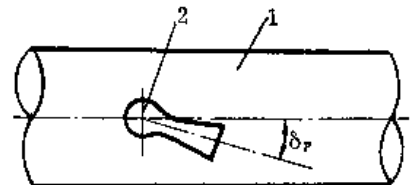


图7-15 倾斜喷管  
1—弹体；2—喷管。

$R_p$ ——喷管组中各喷管喉部中心距弹轴的距离；

$\delta_p$ ——喷管组中各喷管扩张段轴线，在通过弹轴且垂直于  $R_p$  的平面上之投影，同弹轴之间的夹角（图 7-15）。

在采用这种方法提供滚转力矩的同时，将造成一部分推力损失，即有效推力将是  $F \cos \delta_p$ 。然而，通常只需很小的  $\delta_p$  角度，就能提供可观的滚转力矩，相应的推力损失往往是微不足道的。因此，这是一种效率很高的导旋方式。此外，这种方法本身的设计计算是很简单的。所以，这是最常用的导旋方法之一。

### （二）导流片

在燃气流场中安装斜置的导流片，相当于固定的燃气舵。导流片上受有燃气的压力，若压力中心距导弹轴线有相当的距离，就产生了滚转力矩。燃气流作用于导流片上将产生沿弹轴的阻力分量，相应地也引起推力损失。

### （三）燃气的后体效应

若发动机喷管组位于弹翼的前方，那么，当高速燃气向后喷射的时候，由于引射作用，附近的空气也将以相当高的速度向后流动并不断同燃气混合，有时还有二次燃烧现象。因此，在弹翼附近的流场的物理性质有所变化。若弹翼具有差动偏斜安装角，或为卷弧形弹翼，则将产生附加的滚转力矩  $\Delta M_{x,p}$ 。这个力矩同角度  $\gamma_p$ （图 7-16）、喷口至弹翼的距离以及导弹的飞行速度等因素都有密切的关系（它们只能通过试验测出）。

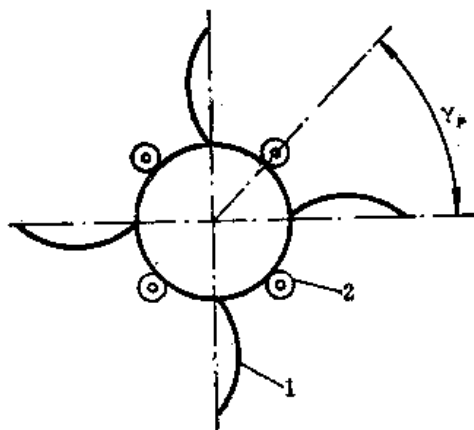


图7-16 弹体后视图

## 三、空气动力导旋

在续航段弹道上，要求导弹的速度及转速都不要有剧烈的变化。这时，只需提供比较小的滚转力矩，用来抵消导弹的空气动力滚转阻尼力矩，使导弹的转速不致衰减就可以了。这时，经常采用空气动力导旋方式。

使弹翼具有适当的差动偏斜安装角  $\delta$ ，就可提供适当的空气动力滚转力矩  $M_{x,a}$ 。这是经常采用的方法，不论对于平板弹翼或卷弧形弹翼，都可通过这一方法获得空气动力滚转力矩。在差偏角  $\delta$  不太大的情况下，这个滚转力矩  $M_{x,a}$  同差偏角  $\delta$  成正比，

$$M_{x,a} = -\frac{1}{2} \rho v^2 S l m_x^a \delta \quad (7-5-3)$$

式中  $m_x^a$ ——由弹翼差偏角  $\delta$  而造成的空气动力滚转力矩系数对于  $\delta$  的导数  $\frac{\partial m_x}{\partial \delta}$ 。

关于 (7-5-3) 式，以下两点必须特别注意：

第一，式中的参考长度  $l$  乃是包括弹体在内的弹翼全翼展；

第二，通常规定滚转力矩  $M_x$  右旋（从弹底向弹顶看顺时针）为正，并规定从翼梢向翼根看去弹翼差偏角  $\delta$  逆时针为正。因此，为了形成正的空气动力滚转力矩  $M_{x,a}$ ，必须使  $\delta$  为负值（如图 7-17）。所以，为了使 (7-5-3) 式正确，必须定义  $m_x^a$  永为负值。

在弹体具有四片十字形布置的弹翼的情况下，可如下计算其  $m_x^a$

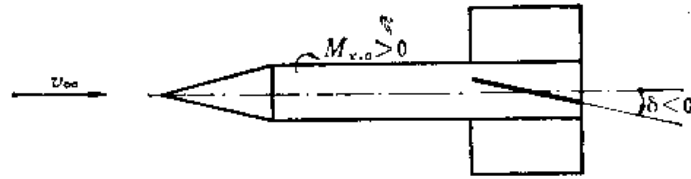


图7-17 负的  $\delta$  产生正的  $M_{x,a}$

$$m_x^{\delta} = 2 \times \alpha_1 \times \alpha_2 \times (C_y^{\alpha})_{w(b)} \times 57.3 \times \left( \frac{m_x^{\delta}}{C_y^{\alpha}} \right)_w \times \frac{S_{w(b)}}{S} \quad (7-5-4)$$

式中  $\alpha_1$ ——考虑弹身影响的修正系数，由图 7-18 查得；

$\alpha_2$ ——考虑弹翼之间互相影响的修正系数，可由图 7-19 查得；

$(C_y^{\alpha})_{w(b)}$ ——通过弹身的一对假想弹翼的升力系数导数，此假想弹翼按图 7-20 确定，

$(C_y^{\alpha})_{w(b)}$  的计算按式 (7-2-13) 或 (7-2-14) 进行，单位是 [1/弧度]；

$S_{w(b)}$ ——通过弹身的一对假想弹翼的面积；

$\left( \frac{m_x^{\delta}}{C_y^{\alpha}} \right)_w$ ——由参量  $\lambda \sqrt{1-M^2}$  决定的一个函数，由图 7-21 查得，其中  $\lambda$  仍是指通过弹身的假想弹翼的展弦比；注意图 7-21 中的曲线是以“度”为单位

计量  $\delta$  的，在式(7-5-4)中引入了乘数 57.3，故计算中应以弧度计量  $\delta$  角。

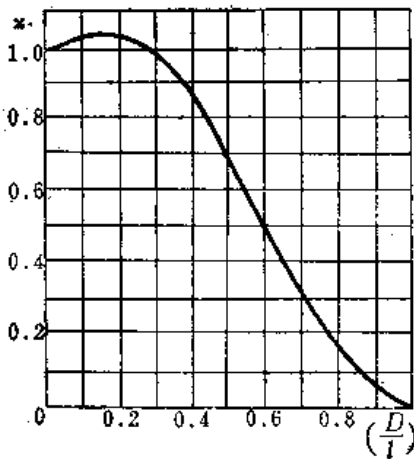


图7-18 修正系数  $\alpha_1$

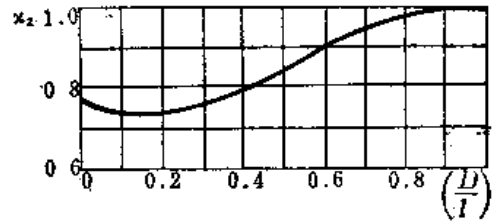


图7-19 修正系数  $\alpha_2$

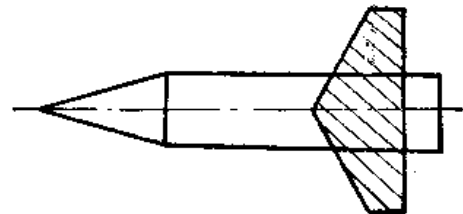


图7-20 通过弹身的假想弹翼

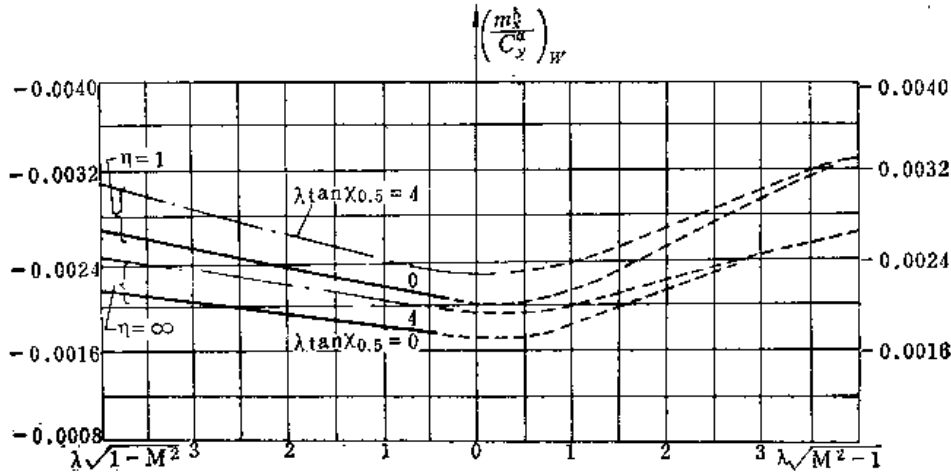


图7-21 计算  $m_x^{\delta}$  的专用函数  $\left( \frac{m_x^{\delta}}{C_y^{\alpha}} \right)_w$  ——适用于亚音速及超音速

#### 四、滚转阻尼力矩

在导弹滚转的情况下，导弹的弹翼相对于迎面气流具有附加的攻角，从而产生附加的升力。各片弹翼上的附加升力相对于弹轴将构成弹翼的滚转阻尼力矩  $M_{x,d}$ 。此外，弹体在滚转中同空气摩擦；导线在放出的过程中同弹体也有摩擦；它们构成了摩擦阻尼力矩，但其量值很小，同弹翼的滚转阻尼力矩相比可略而不计。故计算滚转阻尼力矩时，可以只考虑弹翼的作用，即

$$M_{x,d} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l \cdot \bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x \quad (7-5-5)$$

式中  $\bar{\omega}_x$ ——无量纲滚转角速度  $\bar{\omega}_x = \omega_x \frac{l}{2v}$ ；

$\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x}$ ——滚转阻尼力矩系数导数。

在式 (7-5-5) 中应注意以下两点：

第一，参考长度  $l$  为包括弹体在内的弹翼全翼展；

第二，空气动力阻尼力矩  $M_{x,d}$  的方向总是同弹体旋转角速度  $\omega_x$  的方向相反，因此，滚转阻尼力矩系数导数  $\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x}$  永远为负值。

在导弹具有四片十字形布置的平板弹翼的情况下， $\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x}$  可按下式计算

$$\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x} = 2 \times \kappa_3 \times (C_y^a)_{w(B)} \times 0.01745 \times \left( \frac{\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x}}{C_y^a} \right)_w \times \frac{S_{w(B)}}{S} \quad (7-5-6)$$

式中  $\kappa_3$ ——考虑弹翼之间相互影响的修正系数，可由图 7-22 曲线查得

$(C_y^a)_{w(B)}$  及  $S_{w(B)}$ ——同 (7-5-4) 式者；

$\left( \frac{\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x}}{C_y^a} \right)_w$ ——由参量  $\lambda \sqrt{1-M^2}$  决定的一个函数，按图 7-23 查得，其中  $\lambda$  仍

为通过弹身的假想弹翼的展弦比。

注意，图 7-23 中曲线是以“1/度”为单位计量  $(C_y^a)_{w(B)}$  而获得的，在式 (7-5-6) 中的乘数 0.01745 即是为了按“1/弧度”计量  $(C_y^a)_{w(B)}$  而引入的。

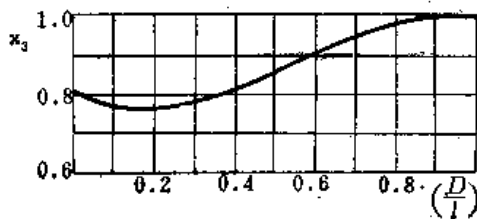


图7-22 修正系数  $\kappa_3$

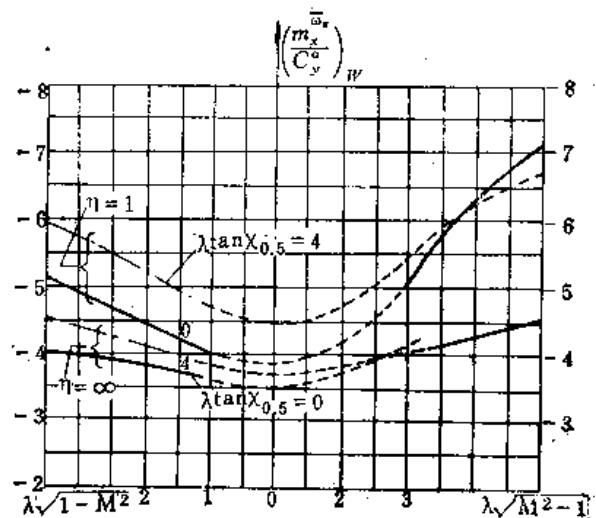


图7-23 计算  $\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x}$  的专用函数  $\left( \frac{\bar{m}_{x^*}^{\bar{\omega}_x}}{C_y^a} \right)_w$

### 五、同导线释脱过程有关的滚转力矩

在飞行过程中，传输指令的导线不断地从导弹的线轴上释脱下来。这时，导线上受有一定的张力  $T$ ，它沿切向作用于线轴，从而给导弹一个滚转力矩  $M_{x,T}$ 。

假定导线固定于无穷远处的地面上，在该处导线是完全静止的。同时导弹以一定的速度  $v$  飞行，导线的释脱过程是稳恒的。于是，由第二章 (2-2-1) 式可知，导线在静止固定点处所受之张力为

$$T = \rho_T v^2$$

这里  $\rho_T$ ——导线的线密度 (千克/米)。

又假定，在放线过程中，导线的长度没有变化；并假定导线同弹体和线轴之间没有摩擦力作用。那么，张力  $T$  在已释脱的导线上应是处处一致的。所以，在导线从线轴上释脱之处，导线的张力仍是  $T = \rho_T v^2$ 。因此，由于导线的张力而使导弹受到的一个滚转力矩  $M_{x,T}$  就是

$$M_{x,T} = \frac{D_T}{2} \rho_T \cdot v^2 \quad (7-5-7)$$

其中  $D_T$ ——导线线轴的直径。

显然这个力矩的方向，同导线在线轴上的缠绕方向是有关的。通常，应使这个力矩的方向同导弹滚转的方向一致。

经过计算之后，往往不难发现，在一般的反坦克导弹的速度及转速情况下，将有

$$M_{x,T} \ll M_{x,a}$$

所以，在初步设计过程中，可将导线释脱所引起的滚转力矩略而不计。

### § 7-5-2 导弹的稳态滚转运动

#### 一、滚转运动方程及其解

在各种同滚转有关的因素综合作用之下，导弹的滚转运动方程式将是

$$\frac{d\omega_x}{dt} + A\omega_x = Bv^2 + C \quad (7-5-8)$$

其中

$$A = -\frac{m_x^0 S l^2 \rho}{4J_x} \quad [\text{米}^{-1}],$$

$$B = \frac{\rho S l m_x^0 \delta + D_T \rho_T}{2J_x} \approx \frac{\rho S l m_x^0 \delta}{2J_x} \quad [\text{米}^{-2}],$$

$$C = \frac{M_{x,p}}{J_x} \quad [\text{秒}^{-2}].$$

这个方程式的初始条件是：当  $t = 0$  时， $\omega_x = \omega_{x,0}$ ；这里， $\omega_{x,0}$  乃是由发射定向器赋予的出口转速。

如果，导弹在续航段上的飞行速度  $v$  为常数，则上式可视为常系数的一阶线性微分方程，其通解为

$$\omega_x(t) = \omega_{x,0} e^{-At} + \omega_{x,B} + \omega_{x,C} \quad (7-5-9)$$

这里，第一项是由初始条件引起的基本解。第二项  $\omega_{x,B}$  是由非齐次项  $Bv^2$  所引起的特解。第三项  $\omega_{x,C}$  是由非齐次项  $C$  引起的特解。如下计算

$$\omega_{x,B} = \frac{Bv}{A} [1 - e^{-At}] \quad (7-5-10)$$

$$\omega_{x,C} = \frac{C}{Av} [1 - e^{-At}] \quad (7-5-11)$$

在续航段弹道上，在绝大多数情况下，不利用燃气流来产生滚转力矩，这时  $C = 0$ ，故  $\omega_{x,C} = 0$ 。于是 (7-5-9) 式成为

$$\omega_x(t) = \left( \omega_{x,0} - \frac{Bv}{A} \right) e^{-At} + \frac{Bv}{A} \quad (7-5-12)$$

## 二、稳态转速

考察导弹在续航段上的转速变化规律  $\omega_x(t)$ ，按式 (7-5-12) 做出  $\omega_x-t$  曲线，如图 7-24 所示。由图可知，不论初始转速  $\omega_{x,0}$  大小如何，当时间  $t \rightarrow \infty$ ，总有  $\omega_x \rightarrow \frac{Bv}{A}$ 。这就是稳态转速  $\omega_{x,\infty}$

$$\omega_{x,\infty} = \frac{Bv}{A} = \frac{2(m_x^{\delta} \delta S l \rho + D_T \rho_T)}{-m_x^{\omega} S l^2 \rho} \approx \frac{2m_x^{\delta} \delta v}{-m_x^{\omega} l} \quad (7-5-13)$$

由 (7-5-13) 式可知，若导弹的气动外形参数已定，则其稳态转速  $\omega_{x,\infty}$  正比于弹翼的差偏角  $\delta$ ；反之，为了获得某个预定的稳态转速  $\omega_{x,\infty}$ ，可按式 (7-5-14) 给定弹翼的差偏安装角  $\delta$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{-m_x^{\omega}}{m_x^{\delta}} \cdot \frac{l}{2v} \omega_{x,\infty} \\ &= \frac{-m_x^{\omega}}{m_x^{\delta}} \cdot \bar{\omega}_{x,\infty} \end{aligned} \quad (7-5-14)$$

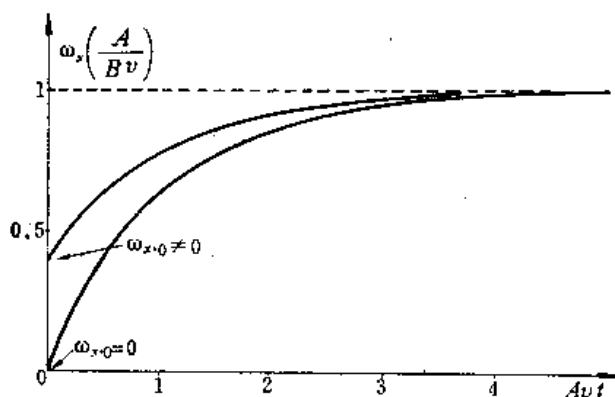


图 7-24 导弹在等速飞行过程中的转速变化规律

式 (7-5-13) 和 (7-5-14) 的物理意义是，在一定的弹翼差偏角  $\delta$  及一定的稳态转速

$\omega_{x,\infty}$  的条件之下，导弹的空气动力滚转力矩  $M_{x,\infty}$  同滚转阻尼力矩  $M_{x,\infty}$  将达到平衡，即式 (7-5-3) 同 (7-5-5) 相等。

由近似公式 (5-5-26) 可知，对于平板弹翼有如下的近似关系

$$\frac{-m_x^{\omega}}{m_x^{\delta}} \approx \frac{2}{3} \frac{l^3 - D^3}{l(l^2 - D^2)} \quad (7-5-15)$$

式 (5-5-26) 是单纯理论分析导出的结果，实际的  $m_x^{\delta}$  及  $m_x^{\omega}$  要通过许多实验数据来修正，所以 (7-5-15) 式只能是近似关系。

## § 7-5-3 等加速导弹的滚转运动

若是导弹处于加速运动阶段，则 § 7-5-2 中的各种解式都不正确，若导弹的速度变化规律很复杂，则运动方程 (7-5-8) 只能用数值方法求解。但若导弹以等加速度运动，则能够

获得解析解。

利用行程  $s$  的关系

$$\frac{ds}{dt} = v \quad (7-5-16)$$

对方程 (7-5-8) 进行变量变换, 可得

$$\frac{d\omega_x}{ds} + A\omega_x = Bv + \frac{C}{v} \quad (7-5-17)$$

上式的初始条件是, 当  $s = s_0$  时,  $\omega_x = \omega_{x,0}$  (及  $v = v_0$ )。注意, 这里的  $s_0$  应是“定向器的有效长度”。

利用等加速飞行的假设, 可有

$$v = \sqrt{2as} \quad (7-5-18)$$

于是, 可将方程 (7-5-17) 改写为

$$\frac{d\omega_x}{ds} + A\omega_x = B\sqrt{2as} + \frac{C}{\sqrt{2as}} \quad (7-5-19)$$

这仍是一个常系数的一阶线性微分方程, 其通解为

$$\omega_x(s) = \omega_{x,0}e^{-A(s-s_0)} + \omega_{x,B}(s) + \omega_{x,C}(s) \quad (7-5-20)$$

其中, 由非齐次项  $B\sqrt{2as}$  及  $C/\sqrt{2as}$  所引起的特解  $\omega_{x,B}$  及  $\omega_{x,C}$  分别是

$$\begin{aligned} \omega_{x,B}(s) &= B\sqrt{2a}e^{-As} \int_{s_0}^s e^{A\sigma}\sqrt{\sigma}d\sigma \\ &= \frac{B\sqrt{2a}}{A^{3/2}} \{ \sqrt{As} - \sqrt{As_0}e^{-A(s-s_0)} - e^{-As} [ I(\sqrt{As}) - I(\sqrt{As_0}) ] \} \end{aligned} \quad (7-5-21)$$

$$\text{及 } \omega_{x,C}(s) = \frac{C}{\sqrt{2a}} e^{-As} \int_{s_0}^s e^{A\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} = C\sqrt{\frac{2}{aA}} \cdot e^{-As} [ I(\sqrt{As}) - I(\sqrt{As_0}) ] \quad (7-5-22)$$

其中  $I(\sqrt{As})$  及  $I(\sqrt{As_0})$  —— 专用函数, 可由附录中之  $I(x)$  函数表查得, 其定义为

$$I(x) = \int_0^x e^{\xi^2} d\xi$$

分析 (7-5-20) 式可以看出, 以等加速度  $a$  运动的导弹, 其转速是由三部分线性叠加而成。第一部分, 是由炮口转速  $\omega_{x,0}$  所引起的; 第二部分是由弹翼差偏角  $\delta$  (通过参量  $B$ ) 引起的; 第三部分是由喷气滚转力矩  $M_{x,p}$  (通过参量  $C$ ) 引起的。它们在导弹加速飞行过程中的一般变化规律, 如图 7-25 所示。

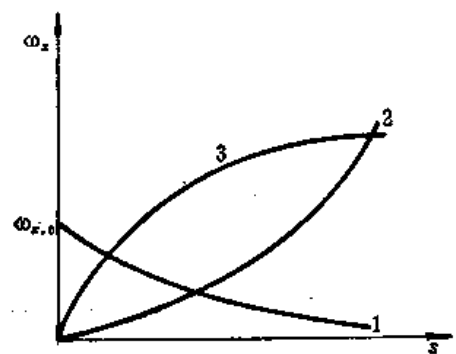


图7-25 导弹在等加速飞行过程中的转速变化规律  
1— $\omega_{x,0}e^{-A(s-s_0)}$ , 2— $\omega_{x,B}$ , 按式(7-5-21);  
3— $\omega_{x,C}$ , 按式(7-5-22)。

## § 7-5-4 滚转导弹的转速设计

所谓滚转导弹的转速设计,是指选择一种或一种以上的导旋方式,并把它们恰当地组合起来,以使导弹在整个弹道上都具有适当的转速及转速变化率。

转速设计问题,对于等速飞行的导弹是比较简单的;这时,只需选择适当的弹翼差偏角 $\delta$ ,即可获得一定的稳态转速。然而,在等速飞行阶段到来之前,导弹总要经过加速飞行的阶段。加速飞行阶段的转速设计问题是比较复杂的。

任何复杂的 $v-t$ 曲线,都可以用分段的直线来逼近。就是说,可以把导弹看做是分段等加速的。对于等加速的导弹的转速设计,可以通过灵活运用§ 7-5-3中导出的各公式来进行。参看下面例题。

**例题7-4** 有一个反坦克导弹,它在续航段上以150米/秒的速度等速飞行,起飞段上为等加速运动,加速度 $a=300$ 米/秒<sup>2</sup>;定向器有效长度 $s_0=1$ 米。弹体直径 $D=0.1$ 米,弹翼为矩形,翼弦为 $b=0.125$ 米,包括弹体在内的全翼展 $l=0.32$ 米。导弹的极转动惯量 $J_x=0.02$ 千克·米<sup>2</sup>(在起飞段上近似为常数)。

设计要求:为了保证导弹在续航段上的转速 $\omega_x=6$ 转/秒,需设计导旋方式及有关参数。

**解法** 第一,先求出滚转力矩系数 $m_x^{\delta}$ 及滚转阻尼力矩系数导数 $m_x^{\dot{\omega}_x}$ 。为此,依次进行下列计算。

弹体横截面积

$$S = \frac{\pi}{4}(0.1)^2 = 0.00785 \text{ 米}^2$$

通过弹身的一对假想弹翼之面积

$$S_{w(B)} = l \cdot b = 0.32 \times 0.125 = 0.04 \text{ 米}^2$$

通过弹身的假想弹翼之展弦比为

$$\lambda = \frac{l}{b} = \frac{0.32}{0.125} = 2.56$$

假想弹翼的升力系数按式(7-2-14)为

$$\begin{aligned} (C_L^a)_{w(B)} &= \left[ \frac{\pi \lambda}{1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{1.8}\right)^2 + 1}} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \\ &= \frac{\pi \times 2.56}{1 + \sqrt{\left(\frac{2.56}{1.8}\right)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{150}{340}\right)^2}} = 3.271 [1/\text{弧度}] \end{aligned}$$

参量  $\frac{D}{l} = \frac{0.1}{0.32} = 0.3125$

由图 7-18、7-19 及 7-22 查得修正系数

$$n_3 = 0.97;$$



$$\alpha_q = 0.75_1$$

$$\alpha_\omega = 0.78_0$$

$$\text{参量 } \lambda_{W(B)} \sqrt{1-M^2} = 2.56 \sqrt{1 - \left(\frac{150}{340}\right)^2} = 2.30$$

由图 7-21 及 7-23 查得函数

$$\left(\frac{m_x^5}{C_y^a}\right)_W = -0.00245$$

$$\left(\frac{m_x^{\omega x}}{C_y^a}\right)_W = -4.6$$

按式 (7-5-4) 及 (7-5-6) 可得

$$\begin{aligned} m_x^5 &= 2 \times n_s \times \alpha_q \times (C_y^a)_{W(B)} \times 57.3 \times \left(\frac{m_x^5}{C_y^a}\right)_W \frac{S_{W(B)}}{S} \\ &= 2 \times 0.97 \times 0.75 \times 3.27 \times 57.3 \times (-0.00245) \times \frac{0.04}{0.00785} = -3.40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_x^{\omega x} &= 2 \times \alpha_\omega \times (C_y^a)_{W(B)} \times 0.01745 \left(\frac{m_x^{\omega x}}{C_y^a}\right)_W \times \frac{S_{W(B)}}{S} \\ &= 2 \times 0.78 \times 3.27 \times 0.01745 \times (-4.6) \times \frac{0.04}{0.00785} = -2.086 \end{aligned}$$

第二, 求在等速续航飞行中, 为了维持稳态转速  $\omega_{x, \text{稳}} = 6$  转/秒所需之弹翼差偏角。由 (7-5-14) 式

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{-\bar{m}_x^{\omega x}}{m_x^5} \cdot \frac{l}{2v} \cdot \omega_{x, \text{稳}} = \frac{-(-2.086)}{(-3.40)} \times \frac{0.32}{2 \times 150} \times 6 \times 2\pi = -0.0247 \text{ [弧度]} \\ &= -1.41^\circ \end{aligned}$$

第三, 求出在起飞段终点, 由于弹翼具有差偏角  $\delta$  而使弹体获得的转速  $\omega_{x, B}$ 。为此, 依次进行下列计算。

先计算参量  $B$  及  $A$ , 由式 (7-5-8) 可得

$$B = \frac{\rho S l m_x^5 \delta}{2 J_x} = \frac{1.25 \times 0.0785 \times 0.32 \times (-3.40) \times (-0.0247)}{2 \times 0.02} = 0.00659 \text{ [米}^{-2}\text{]}$$

$$A = \frac{-\bar{m}_x^{\omega x} S l^2 \rho}{4 J_x} = \frac{-(-2.086) \times 0.00785 \times (0.32)^2 \times 1.25}{4 \times 0.02} = 0.0262 \text{ (米}^{-1}\text{)}$$

计算起飞段终点处之行程  $s$

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{150^2}{2 \times 300} = 37.5 \text{ 米}$$

故  $As = 0.0262 \times 37.5 = 0.9825$

及  $As_0 = 0.0262 \times 1.0 = 0.0262$

$$\sqrt{As} = \sqrt{0.9825} = 0.9912$$

$$\sqrt{As_0} = \sqrt{0.0262} = 0.1619$$

查表(附录七)得

$$I(\sqrt{As}) = I(0.9912) = 1.439$$

$$I(\sqrt{As_0}) = I(0.1619) = 0.1634$$

按式(7-5-21)求得由于弹翼差偏角 $\delta$ 而使导弹获得的滚转角速度 $\omega_{x,B}$ ,即

$$\begin{aligned}\omega_{x,B} &= -\frac{B\sqrt{2a}}{A^{3/2}} \{ \sqrt{As} - \sqrt{As_0} e^{-A(t-t_0)} - e^{-As} [I(\sqrt{As}) - I(\sqrt{As_0})] \} \\ &= \frac{0.00659\sqrt{2 \times 300}}{(0.0262)^{3/2}} \{ 0.9912 - 0.1619e^{-(0.9825-0.0262)} - e^{-0.9825}(1.439 - 0.1634) \} \\ &= 17.18 \text{ 弧度/秒} = 2.73 \text{ 转/秒}\end{aligned}$$

第四,要使导弹在起飞段终点达到 $\omega_x = 6$ 转/秒的转速,还需采用其他导旋方法。首先考虑采用燃气流导旋。为此,应求出所需的喷气旋转力矩 $M_{x,P}$ 。

暂且假定,导弹飞离定向器时不滚转,即 $\omega_{x,0} = 0$ 。于是,按(7-5-20)式,可求出在导弹已具有弹翼差偏角 $\delta = -1.41^\circ$ 的情况下,为了在起飞段终点获得6转/秒的转速,还必须借助喷气旋转力矩 $M_{x,P}$ 增添多大的转速 $\omega_{x,C}$ 。

$$\begin{aligned}\omega_{x,C} &= 6 \text{ 转/秒} - \omega_{x,B} = 6 - 2.73 = 3.27 \text{ 转/秒} \\ &= 20.55 \text{ 弧度/秒}\end{aligned}$$

由(7-5-22)式,根据必要的 $\omega_{x,C}$ 来反求参数 $C$ 的应有值

$$\begin{aligned}C &= \frac{\omega_{x,C}}{\sqrt{\frac{2}{aA} \cdot e^{-As} [I(\sqrt{As}) - I(\sqrt{As_0})]}} \\ &= \frac{20.55}{\sqrt{\frac{2}{300 \times 0.0262} \cdot e^{-0.9825} [1.439 - 0.1634]}} = 85.31 \text{ 秒}^{-2}\end{aligned}$$

按参数 $C$ 之定义,即可求喷气旋转力矩 $M_{x,P}$ 的应有值

$$M_{x,P} = C \cdot J_x = 85.31 \times 0.02 = 1.706 \text{ 牛顿} \cdot \text{米}$$

又若,起飞发动机推力为 $F = 3000$ 牛顿,喷管组中各喷管喉部中心距弹轴为 $R_p = 0.05$ 米,则各喷管应具有偏斜角 $\delta_p$ 可求出如下

$$\delta_p = \frac{M_{x,P}}{F \times R_p} = \frac{1.706}{3000 \times 0.05} = 0.01137 \text{ 弧度} = 0.65^\circ$$

这是不难实现的。

第五,若能采用管式发射,那么也可考虑使导弹具有一定的炮口转速 $\omega_{x,0}$ 。这时,有可能减小或完全不需喷气旋转力矩 $M_{x,P}$ 。

假定, $M_{x,P} = 0$ 。于是,由(7-5-20)式可算出必要的炮口转速 $\omega_{x,0}$ 。

$$\omega_{x,0} = \frac{6 \text{ 转/秒} - \omega_{x,B}}{e^{-A(t-t_0)}} = \frac{(6 - 2.73)}{e^{-(0.9825-0.0262)}} = 8.51 \text{ 转/秒}$$

按定向器有效长度 $s_0 = 1$ 米可求出导弹的炮口速度

$$u_0 = \sqrt{2as_0} = \sqrt{2 \times 300 \times 1} = 24.5 \text{ 米/秒}$$

按(7-5-1)式可求出定向器中螺旋导槽的螺距 $h_s$

$$h_r = \frac{v_0}{\omega_{x,0}/2\pi} = \frac{24.5}{8.51} = 2.878 \text{米}$$

若螺旋导槽的直径即为弹径  $D=0.1$  米，则螺旋导槽的螺旋角应是

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\pi D}{h_r} = \tan^{-1} \frac{\pi \times 0.1}{2.878} = 6.23^\circ$$

这一方案，虽使发射定向器稍为复杂，但还是有可能实现的。另一困难是，必须使弹翼在发射管中折叠起来。最终采用哪个方案，应根据具体条件。

### § 7-5-5 卷弧形弹翼的设计问题

近年来，在小型导弹的设计中，卷弧形弹翼引起了人们的兴趣。这种情况，是同管式发射（或炮中发射）导弹的发展有密切关系的。

管式发射导弹必须要求弹翼在发射前能够折叠在弹身内部或者卷叠在弹身上，这就是折叠式弹翼及卷弧形弹翼。卷弧形弹翼在弹上空间利用和结构强度、刚度等方面，较折叠式弹翼要优越，所以，受到越来越多的采用。

卷弧形弹翼主要是应用在允许弹体滚转的火箭和导弹上，但是近来在不滚转的导弹（尤其是巡航式导弹）上也有应用的尝试。

但是，这种卷弧形弹翼的空气动力特性十分复杂。直到现在，人们对它的研究还很不够。所以，设计这种弹翼的工作，主要应该依靠经验和实验，才能最后解决问题。

#### 一、卷弧形弹翼的结构

卷弧形弹翼的结构，如图 7-26 所示。图中表示的是一种最常见的四片卷弧形弹翼张开后的外形。也有采用三片卷弧形弹翼的，但较为少见。

由图 7-26 可见，卷弧形弹翼的翼展  $l$  是受到限制的，在四片弹翼的情况下，应有

$$l < (1 + \sqrt{2})D = 2.414D \quad (7-5-23)$$

事实上，由于弹翼根部的固定结构也需要占用一定的空间，故翼展往往还要缩小，如  $L \leq 2.3D$ 。通常是把  $l$  取到上限，若需改变弹翼面积，只有改变弹翼的弦长  $b$ 。

弹翼前缘的后掠角对于卷弧形弹翼的空气动力特性影响很小。在亚音速导弹中，大多采用无后掠角的矩形弹翼。

弹翼的厚度  $t$ ，通常取为翼弦  $b$  的一个百分数，如

$$\frac{t}{b} = 0.015 \sim 0.03 \quad (7-5-24)$$

卷弧形弹翼剖面前缘的形状对于导弹的空气动力特性有重要影响。可区别为对称前缘和不对称前缘、平钝前缘和尖锐前缘等等。

卷弧形弹翼也可以具有差动偏斜安装角  $\delta$ ，同平板弹翼类似。

#### 二、阻力、升力和压力中心

实验表明，具有四片卷弧形弹翼的导弹，若其平面投影形状同某个具有十字形布局平

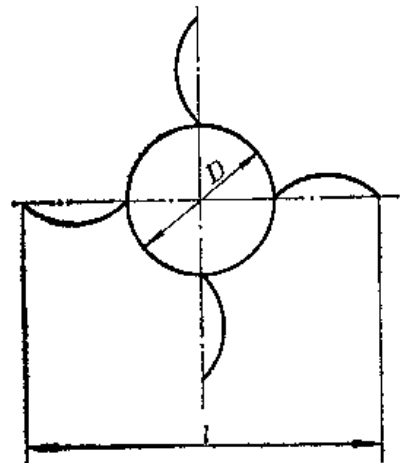


图 7-26 卷弧形弹翼的结构

板弹翼的导弹一致，那么，这两个导弹的升力系数和压力中心也是一样的。因此，本章前几节所讨论过的平板形弹翼设计方法，基本上仍可用于卷弧形弹翼的设计。

至于空气动力阻尼，卷弧形弹翼同厚度一样并且平面投影形状一致的平板形弹翼相比，其零升阻力系数  $P_{z_0}$  大约要高出 10%。高出的这一部分，大约同由于弹翼迎风面积增大的比数一致。

### 三、卷弧形弹翼的自诱导滚转力矩

所谓“自诱导滚转力矩”，就是卷弧形弹翼在差偏角  $\delta = 0$  的情况下，仍然会受到的一种空气动力滚转力矩。这是卷弧形弹翼的一个重要特点。

在亚音速情况下，这个卷弧形弹翼的自诱导滚转力矩是从弹翼的凸面指向凹面。而在超音速情况下，这个力矩是从弹翼的凹面指向凸面。在跨音速附近，这个滚转力矩要变换方向。因此，对于飞行速度从亚音速变到超音速的导弹，采用卷弧形弹翼时，必须仔细考虑滚转速度的变化问题。

按照某些理论分析<sup>(6)</sup>，卷弧翼的自诱导滚转力矩应该同弹翼的厚度有关。但是，根据某些实验结果<sup>(7)</sup>，若弹翼相对厚度在 (7-5-24) 式所指明的范围内，则弹翼厚度的变化对于自诱导滚转力矩几乎没有影响。

平钝的弹翼前缘，将使自诱导滚转力矩增大。同前缘角为  $45^\circ$  的情况相比，在  $M < 0.8$  的速度范围内，前缘平钝的卷弧形弹翼，其自诱导滚转力矩将增大 10~20%。同时，平钝前缘还将导致阻力增大。所以，通常应使弹翼适当尖削（对称尖削）。

前缘尖削不对称时，将导致滚转力矩随  $M$  数而变化的关系十分复杂。这时，只能通过仔细的实验来研究这种关系。

在展弦比  $\lambda < 2$  的情况下，在亚音速范围内，若出现不大的攻角 ( $|\alpha| \leq 6^\circ$ )，自诱导滚转力矩几乎没有变化。当攻角进一步增大时，滚转力矩将发生显著变化。

卷弧形弹翼在滚转时也将受到滚转阻尼力矩的作用，这一阻尼力矩的计算和测量都是很困难的。通常是在风洞中使装有卷弧形弹翼的弹体滚转，并测量其稳态转速。从这样的实验中测得，在亚音速并且攻角  $\alpha$  不大的情况下，具有卷弧形弹翼的弹体的稳态转速，相当于装有平板弹翼并且有  $\delta = 1^\circ$  的差偏角的弹体的稳态转速。

根据这一数据，在亚音速范围内，具有卷弧形弹翼的导弹的转速设计问题可以近似地按照平板形弹翼的情况进行；只是应该把弹翼的差偏安装角  $\delta$  减小大约  $1^\circ$ 。

当滚转方向改变时，卷弧形弹翼的滚转阻尼力矩将发生显著的变化。

在弹体滚转的情况下，卷弧形弹翼也将产生马格努斯力矩。

最后再强调一遍，卷弧形弹翼的设计一定要通过风洞实验的校验。

## 第八章 作用在弹体上的载荷及主要部件的强度计算

弹体结构设计的基本任务之一就是要在最小重量的情况下，使弹体具有必要的强度和刚度，从而保证导弹可靠地完成战斗任务。我们知道，在保证导弹的强度和刚度的条件下，减轻结构重量对于提高导弹的战术技术性能具有重要意义。但是减轻重量的要求与强度和刚度的要求往往是矛盾的。为了解决这个矛盾，一方面可以通过合理地安排受力构件，选择合理的受力形式，采用较好的材料来解决；另一方面就需要对结构进行较准确的载荷分析及强度计算，以便保证结构既具有足够的强度与刚度，又不致使结构有不必要的重量。因此，解决导弹的重量与强度、刚度的矛盾，就成为导弹强度计算的主要任务。

在本章中，将讨论导弹的载荷分析及弹体设计时所使用的近似强度计算方法。此外，还将介绍目前在结构设计中广泛使用的有限单元法原理。

### § 8-1 弹体载荷分析

为了正确判断弹体强度，必须首先弄清弹体结构上所受到的载荷。这个工作叫做载荷分析。

导弹出厂以后，在勤务处理，发射及飞行过程中，将受到各种各样的载荷条件，在不同情况下，载荷的大小及性质是不同的。分析这些情况，并从中选出受载最严重的情况做为强度计算的根据，这就是“设计情况”。

#### § 8-1-1 载荷及过载系数

##### 一、载荷分类

作用在弹体上的载荷，按其来源可分为四类：

第一，空气动力及发动机推力；

第二，导弹在贮存、运输及发射时，支持元件与弹体之间的支持反力；

第三，在导弹具有运动加速度时，弹体上的惯性力；

第四，导弹在地球引力场中受到的重力。

前两类载荷，都以外部压力的形式作用于弹体构件的表面，故称为表面力；后两类载荷，其大小皆正比于导弹的质量，且作用于弹体中的每一个质点上，故称为质量力。

上述载荷均直接参与弹体结构的总体受力，即影响弹体的总体强度，故这些载荷是强度计算时所要考虑的主要对象。还有一些力，如发动机的内压力，锁紧机构的锁紧力等，它们只在一个局部范围内形成一个自身平衡系统，并不参与弹体的总体受力，因而亦不影响弹体的总体强度，这些力称之为局部力，仅在研究局部结构强度时才去研究它们。

##### 二、过载系数

在载荷分析中，为了对各种情况下的载荷进行比较，并便于计算结构的内力，常常引用过载系数（或简称过载）的概念。

在 § 4-1-4 中曾说过，过载就是导弹所受到的全部表面力合力对于导弹重量之比，即

$$\vec{n} = \frac{\sum \vec{F}_i}{mg} \quad (8-1-1)$$

或者说，过载乃是导弹的运动加速度  $\vec{a}$  同重力加速度  $\vec{g}$  的矢量差对于重力加速度  $g$  的比，即

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} - \vec{g}}{g}$$

上式分母及分子可同乘以导弹质量  $m$ ，并注意到

$$\overrightarrow{\text{惯性力}} = -m\vec{a}$$

于是

$$\vec{n} = \frac{-\overrightarrow{(\text{惯性力} + \text{重力})}}{mg} = \frac{-\overrightarrow{\text{质量力}}}{\text{重量}}$$

根据达兰贝尔原理，表面力同质量力应该平衡，所以上式同 (8-1-1) 式是一致的。

在实用中，总是把过载矢量  $\vec{n}$  投影在适当的坐标系中。在研究反坦克导弹的运动时，常常把  $\vec{n}$  投影在弹道坐标系  $O_1x_2y_2z_2$  中，而得三个方向上的过载系数  $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$ 。在研究弹体强度时，常常把  $\vec{n}$  投影到弹体坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  中，而得  $n_{x_1}$ 、 $n_{y_1}$ 、 $n_{z_1}$ 。

### 三、导弹在飞行中的过载系数

为了便于说明，假定导弹只在铅垂面上运动。其受力情况如图 3-3 所示。为了简单，假定舵控力  $F_{\kappa}$  很小，可以略去。于是，在弹道坐标系  $O_1x_2$  及  $O_1y_2$  轴上，导弹重心的运动方程就是

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F \cdot \cos \alpha - X - mg \sin \Theta \\ mv \frac{d\Theta}{dt} = F \cdot \sin \alpha + Y - mg \cos \Theta \end{cases} \quad (8-1-2)$$

再改写成

$$\begin{cases} F \cdot \cos \alpha - X = m \frac{dv}{dt} + mg \cdot \sin \Theta \\ F \cdot \sin \alpha + Y = mv \frac{d\Theta}{dt} + mg \cdot \cos \Theta \end{cases}$$

上式中左端是表面力，右端是质量力的负值。于是，过载系数  $\vec{n}$  在弹道坐标系的  $O_1x_2$  及  $O_1y_2$  轴上的投影就是

$$\begin{cases} n_x = \frac{F \cdot \cos \alpha - X}{mg} = \frac{\frac{dv}{dt} + g \cdot \sin \Theta}{g} \\ n_y = \frac{F \cdot \sin \alpha + Y}{mg} = \frac{v \frac{d\Theta}{dt} + g \cdot \cos \Theta}{g} \end{cases} \quad (8-1-3)$$

注意，上式右端分子中的加号，同 (4-1-38) 式分子中的减号是不矛盾的。因为，重力加速度向量  $\vec{g}$  在  $O_1x_2$  及  $O_1y_2$  轴上的投影本是  $-g \sin \Theta$  和  $-g \cos \Theta$ 。

考虑到  $\alpha$  及  $\Theta$  均为小角度, 则上式可简化为

$$\begin{cases} n_x = \frac{F - X}{mg} = \frac{dv}{dt} + g\Theta \\ n_y = \frac{F\alpha + Y}{mg} = \frac{v \frac{d\Theta}{dt} + g}{g} \end{cases} \quad (8-1-4)$$

由上式可知, 只要知道了导弹在飞行中的弹道参数  $v$ 、 $\frac{dv}{dt}$ 、 $\Theta$  及  $\frac{d\Theta}{dt}$ , 就可计算出过载系数随时间而变化的关系  $n_x(t)$  及  $n_y(t)$ 。

上面讨论的过载系数都是相对于弹道坐标系的。为了便于弹体的强度计算, 需要求出对弹体坐标系的过载系数  $n_{x_1}$ 、 $n_{y_1}$ 。根据两个坐标系之间的关系 (参照图 3-3), 可导出

$$\begin{cases} n_{x_1} = n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha \\ n_{y_1} = n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha \end{cases} \quad (8-1-5)$$

$n_{x_1}$  叫轴向过载,  $n_{y_1}$  叫法向过载。

上面研究的过载系数都是对导弹重心而言的, 即把导弹看作一个质点。事实上, 导弹的弹体不仅有重心的运动, 还有绕重心的旋转运动。因此, 对于不处在导弹重心位置的元件来说, 除考虑重心的过载系数外, 还应考虑因导弹绕重心有旋转运动而引起的附加旋转过载系数 (图 8-1), 附加旋转过载系数的表达式为

$$\Delta n_y = x_l \frac{\dot{\omega}_z}{g}$$

式中  $x_l$ ——元件离导弹重心沿  $x$  轴的距离;

$\dot{\omega}_z$ ——导弹旋转加角速度。

这样, 不处于导弹重心位置的元件的总过载系数为

$$n_{y_1} = n_{y_0} + \Delta n_y = n_{y_0} + x_l \frac{\dot{\omega}_z}{g} \quad (8-1-6)$$

式中  $n_{y_0}$ ——导弹重心处的过载系数。

由公式 (8-1-6) 可知, 附加的旋转过载系数与到导弹重心处的距离成正比, 在重心处其值为零。附加的旋转过载系数的方向与旋转角加速度方向相同。

## § 8-1-2 导弹弹体载荷的设计情况

### 一、导弹飞行时弹体载荷的设计情况

目前一般反坦克导弹的动力装置大多数采用两级固体火箭发动机, 因此, 可以把弹道分成两段, 即起飞段和续航段。在起飞段上, 一般要求在短时间内使导弹达到必要的飞行速度。因此, 第一级采用较大推力并且工作时间较短的起飞发动机。这样, 在起飞段上将产生较大轴向过载。特别是对于由炮管发射的反坦克导弹, 在发射中将产生很大的轴向过载, 其值可能达到数百个  $g$  甚至上千个  $g$ , 这是弹身强度计算时必须考虑的设计情况。在

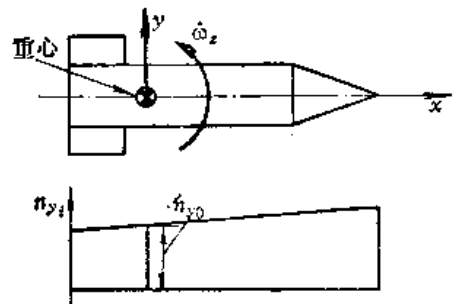


图8-1 弹体绕重心旋转时的过分布

续航段上，一般是采用小推力、工作时间较长的续航发动机，以便克服空气阻力，使导弹接近等速飞行，因此，轴向过载较小。但在续航段上，要做机动飞行，一般讲，要产生较大的法向过载或侧向过载（也有个别的导弹，因其采用零长发射的跳跃式起飞，或者在起飞段上就开始进行导入段飞行，这样，在起飞段上就会造成很大的法向过载或侧向过载）。所以，导弹在飞行中，要分别计算两种情况，即最大轴向过载情况和最大法向（或侧向）过载情况。

### （一）最大轴向过载情况

由 (8-1-4) 式可知，轴向过载为

$$n_{x_1} \approx n_x = \frac{F - X}{mg} \quad (8-1-7)$$

式中  $X$ 、 $m$  都是变化的，推力  $F$  也不是常值。所以，要选择适当的计算点，以便求得  $(n_{x_1})_{\max}$ 。还要注意，有的导弹起飞发动机与续航发动机同时工作，这时的推力应包括两个发动机的推力。

在进行初步结构设计阶段，由于缺乏足够的弹道参数，这时可以忽略空气阻力对  $n_{x_1}$  的影响，近似地用起飞发动机的推力除以导弹在起飞段终点的重量来计算  $(n_{x_1})_{\max}$ 。

### （二）最大法向（或侧向）过载情况

前面已导出法向过载系数的公式 (8-1-4)，但该式中没有考虑导弹机动飞行时“超调量”对法向过载的影响。在第五章中已经讲过，当射手发出（或变换）操纵指令时，导弹的攻角  $\alpha$ （或侧滑角  $\beta$ ）总是先进入一个波动的过渡过程，然后才能达到稳态值。在过渡过程中，攻角  $\alpha$ （或侧滑角  $\beta$ ）的最大峰值与稳态值之差相对于稳态值之比叫“超调量”，并以  $\sigma\%$  表示。在过渡过程中，由于攻角（或侧滑角）发生波动，与攻角（或侧滑角）成比例变化的升力（或侧向气动力）也发生波动，因而，法向过载（或侧向过载）也将产生相应的波动，其最大峰值与稳态值之差对于稳态值之比也等于超调量  $\sigma\%$ 。不过在强度计算中，习惯上把超调量叫做波动系数，并为了与应力符号相区别，常以符号  $K$  表示。于是，参考第五章的公式 (5-1-118) 及 (5-1-119)，考虑波动系数的最大法向过载及侧向过载为

$$n_{y, \max} = (1 + K)n_{y, \text{可用}}$$

$$n_{x, \max} = (1 + K)n_{x, \text{可用}}$$

式中  $n_{y, \text{可用}} = n_{x, \text{可用}}$ 。

在计算侧面过载时，还应考虑阵风造成的影响。阵风速度向量可以分解为平行于导弹速度方向的分量及垂直于导弹速度方向的分量，由于导弹飞行速度较大，故前者对导弹过载影响可以忽略不计，而后者对过载却有较大的影响。

垂直于反坦克导弹飞行方向的阵风（亦称横风）造成的影响，主要改变反坦克导弹的侧滑角  $\beta$ ，如图 7-2 所示。设导弹对空气的速度为  $\vec{v}$ ，它是导弹原飞行速度  $\vec{v}_0$  与横风速  $\vec{u}$  的向量和，于是侧滑角发生变化  $\Delta\beta$ ，因其值很

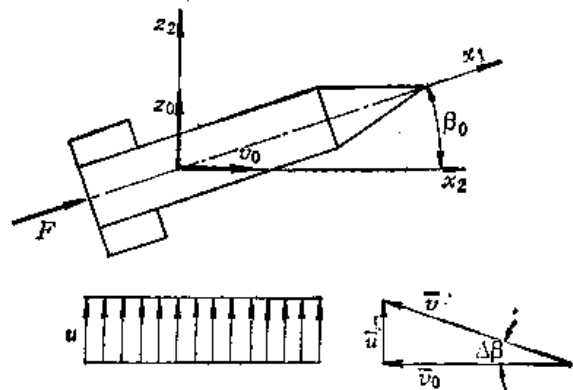


图 8-2 横风造成的附加侧滑角

小，于是侧滑角发生变化  $\Delta\beta$ ，因其值很



小, 故可表示为

$$\Delta\beta \approx \operatorname{tg}\Delta\beta = \frac{u}{v_0}$$

由于侧滑角变为

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta \approx \beta_0 + \frac{u}{v_0}$$

故侧向气动力变为

$$Z = C_z^{\beta} \beta \frac{\rho v^2}{2} S = C_z^{\beta} \left( \beta_0 + \frac{u}{v_0} \right) \frac{\rho v_0^2}{2} S = Z_0 + \frac{1}{2} C_z^{\beta} u \rho v_0 S$$

这时, 相对应的侧向过载系数  $n_x$  为

$$n_x = \frac{Z + F\beta}{mg} = \frac{Z_0 + \frac{1}{2} C_z^{\beta} u \rho v_0 S + F\beta_0 + F \frac{u}{v_0}}{mg} = (n_x)_0 + \Delta n_{x, \text{风}} \quad (8-1-8)$$

其中

$$(n_x)_0 = \frac{Z_0 + F\beta_0}{mg}$$

$$\Delta n_{x, \text{风}} = \frac{1}{2} C_z^{\beta} u \rho v_0 \frac{S}{mg} + \frac{F}{mg} \cdot \frac{u}{v_0} \quad (8-1-9)$$

在计算  $\Delta n_{x, \text{风}}$  时, 可取  $u = 20 \sim 25$  米/秒。

为了使读者对横风的影响有一个数量概念, 下面举一例题。

**例题8-1** 设某反坦克导弹有如下数据

$$C_z^{\beta} = 16 \text{ 1/弧度}, \quad m = 10 \text{ 千克}, \quad S = 0.01 \text{ 米}^2,$$

$$u = 20 \text{ 米/秒}, \quad v_0 = 150 \text{ 米/秒}, \quad \rho = 1.23 \text{ 千克/米}^3,$$

$$F = 58.8 \text{ 牛顿}$$

在此条件下, 根据公式 (8-1-9) 可计算  $\Delta n_{x, \text{风}}$  如下

$$\Delta n_{x, \text{风}} = \frac{1}{2} C_z^{\beta} u \rho v_0 \frac{S}{mg} + \frac{F}{mg} \cdot \frac{u}{v_0} = \frac{1}{2} \times 16 \times 20 \times 1.23 \times 150 \times \frac{0.01}{10 \times 9.81}$$

$$+ \frac{58.8 \times 20}{10 \times 9.81 \times 150} = 3.07$$

由此例题可知, 由于横风所引起的附加过载较大, 在强度计算时, 必须加以考虑。

综合以上所述, 在初步强度计算时, 可以认为导弹重心处的最大法向 (或侧向) 过载包括下面几部分: 导弹做最大可能机动飞行时的过载, 即可用过载  $n_{y, \text{可用}}$  (或  $n_{x, \text{可用}}$ ); 由于超调量引起的附加过载; 由于横风干扰引起的附加过载  $\Delta n_{x, \text{风}}$ 。对于不在重心处的元件, 还应考虑由于导弹绕重心旋转引起的附加过载。因为横风引起的附加过载  $\Delta n_{x, \text{风}}$  与  $n_{x, \text{可用}}$  方向一致, 所以, 如果把导弹在飞行中实际产生的最大过载叫使用过载, 则侧向使用过载为

$$n_{x, \text{使用}} = (1 + K)n_{x, \text{可用}} + \Delta n_{x, \text{风}} + x_f \frac{\dot{\omega}_y}{g} \quad (8-1-10)$$

因为  $n_{x,可用}$  在大小上等于  $n_{y,可用}$ , 所以上式中  $n_{x,可用}$  可以用第四~第七章中  $n_{y,可用}$  的公式计算。

## 二、导弹勤务处理时弹体载荷的设计情况

反坦克导弹从出厂到战斗使用要经过许多勤务处理。在勤务处理中, 导弹会受到一定的载荷作用, 这些载荷是由运输等引起的。但实际传到弹体上的载荷却与导弹的装箱情况, 例如导弹的支撑方式或部位、有无减震措施等有直接关系。因此, 我们在这里只能简略地谈一谈某些勤务环节本身所能产生的过载, 而实际传到弹体上的情况, 只能在实际工作中根据具体情况具体分析。

### 第一, 在铁路上运输的情况

在铁路运输时, 由于火车的刹车、震动等引起的过载一般不大。如火车紧急刹车时, 一般可取  $n_x = \pm 0.25$ ; 在铁轨联接处, 由于车轮与铁轨接头的撞击产生的过载, 根据试验可取  $n_y = 1.6$ 。

### 第二, 在汽车上的运输情况

在汽车上运输时, 由于紧急刹车而引起的轴向过载可用下式计算:

$$n_x = \frac{v_0^2}{2g \cdot \Delta l}$$

式中  $v_0$ ——刹车开始时汽车的速度 (米/秒);

$\Delta l$ ——刹车距离 (米);

$g$ ——重力加速度 = 9.81米/秒。

在无可靠数据时, 建议取  $n_x = 1$ 。

对于横向过载, 根据汽车制造实践资料可取  $n_y = 2$ 。

对悬挂在各种战斗车辆上使用的反坦克导弹, 要根据这里所讲的过载检验定向滑块的强度。

## § 8-1-3 安全系数和剩余强度系数

### 一、安全系数

导弹技术是在飞机技术的基础上发展起来的, 因此, 导弹强度的检验方法基本上是沿袭飞机技术的惯用方法——静力试验法。即模拟飞行器的实际受载情况, 用静力方法逐渐加载, 直至结构破坏, 而把飞行器刚好破坏时所加的载荷称为破坏载荷 ( $P_{破坏}$ )。在破坏载荷作用下, 结构的应力将达到强度极限  $\sigma_b$ 。在实际使用中, 不但不能允许飞行器破坏, 而且不应产生显著的永久变形。因此, 作用在飞行器上的实际最大载荷, 即使用载荷 ( $P_{使用}$ ) 一定要小于破坏载荷, 并且结构内部的应力一般不应超过材料的屈服极限  $\sigma_s$ 。为此, 在结构设计时, 通常用一个比使用载荷大适当倍数的载荷来进行强度计算。我们把这个载荷叫做设计载荷 ( $P_{设计}$ ), 并且使  $P_{设计} = P_{破坏}$ 。这就是说, 以设计载荷为计算根据, 结构的应力标准为材料的强度极限。亦即使设计应力  $\sigma_{设计}$  等于  $\sigma_b$ 。把设计载荷与使用载荷的比值称做“安全系数”, 以  $f$  表示, 即

$$f = \frac{P_{设计}}{P_{使用}}$$

由于使用载荷等于使用过载  $n_{\text{使用}}$  与导弹重量  $mg$  的乘积，而设计载荷也可以用设计过载  $n_{\text{设计}}$  乘以导弹的重量  $mg$  表示，所以，安全系数也可用下式表示

$$f = \frac{n_{\text{设计}}}{n_{\text{使用}}}$$

安全系数取得越大，则结构的设计载荷比它所受到使用载荷就越大，结构就越安全。但对于一定的材料，安全系数越大，就要求结构的尺寸越大，结构就越重。因此，合理地选取安全系数是很重要的。在航空技术方面，飞机设计有比较成熟的理论、方法及实践经验，并有国家强度规范。它根据结构既有足够的强度和刚度，又使结构不致过重的原则，规定有安全系数的标准，这些标准可以做为远程及地对空导弹设计的参考。反坦克导弹由于结构型式往往与飞机有较大差别，情况不尽相同。目前可以参考飞机强度规范，但要根据实际情况慎重处理。下面提出两点供参考。

第一，根据导弹在使用载荷作用下，不产生永久变形的要求，必须使安全系数

$$f \geq \frac{\sigma_b}{\sigma_r}$$

这也就是说使导弹实际使用时的最大应力不超过材料的屈服极限。对于铝合金和钢材来讲，一般  $\frac{\sigma_b}{\sigma_r} = 1.5 \sim 2$  左右，可以此做为确定安全系数的主要因素。但是，这里显然是没有考虑到计算误差、材料不均匀及工艺质量等因素，所以在强度计算时，必须注意到这一点，即不要因误差使计算结果不安全。还有的资料介绍，取安全系数  $f = 1.2$ ，原因是导弹为一次使用的武器，工作时间短，允许有轻微的永久变形。

第二，考虑载荷作用的特点，例如作用时间短，重复次数少的情况，安全系数可取小些。

## 二、剩余强度系数

导弹结构的剖面形状和尺寸除了根据强度和刚度要求外，还要综合考虑到使用、结构特点和工艺性能等各方面的要求才能确定下来。在结构的剖面形状和尺寸初步确定后，必须对结构的危险剖面进行强度校核计算。

进行强度校核计算时，首先算出在设计载荷作用下，危险剖面的最大应力  $\sigma_{\text{设计}}$ ，然后把它与材料的强度极限  $\sigma_b$ （或临界应力  $\sigma_c$ ）进行比较。材料的强度极限  $\sigma_b$ （或临界应力  $\sigma_c$ ）与设计应力  $\sigma_{\text{设计}}$  的比值通常叫做“剩余强度系数”（简称“剩余系数”），用  $\eta$  表示，即

$$\eta = \frac{\sigma_b}{\sigma_{\text{设计}}}$$

要求导弹结构的每一个计算剖面的剩余系数都不小于 1，即只有当  $\eta \geq 1$  时，才认为导弹结构强度是符合要求的。重要的受力接头，必须有较大的剩余系数，一般取  $\eta = 1.25$  才认为强度符合要求。

## § 8-2 弹身的载荷及强度

弹身的作用是安装各种设备（例如控制设备、战斗部、发动机等），并把它们组成一个整体，保证它们的正常工作。因此，它必须具有足够的强度和刚度，使其能承受各种外载荷和保持良好的气动外形。目前反坦克导弹弹身多采用硬壳式结构，并且大量采用工程塑

料, 这样能够减轻结构重量和改善工艺性。在本节中, 只就弹身壳体强度计算做一基本介绍。

### § 8-2-1 弹身上的载荷

在本章第一节中已经讨论了导弹的各种受载情况, 在各种受载情况下, 弹身所受的载荷可归纳为气动载荷、其它部件传来的载荷和弹身的质量载荷。这些载荷是确定弹身结构尺寸的依据。

#### 一、气动载荷

弹身的气动载荷亦即弹身所产生的阻力和举力, 主要是作用在弹身的头部及尾部, 弹身中段的气动载荷一般较小, 可以略去。气动载荷是通过气动力计算或风洞试验给出的。但给出的数据是按速度坐标系的, 要转换成按弹体坐标系的轴向力和横向力。气动载荷是分布载荷。

#### 二、其它部件传来的载荷

其它部件传来的载荷, 主要是弹翼和舵面传来的载荷。它通过弹翼和舵面与弹身的接头加到弹身上去。有的导弹发动机和有线制导的导线管等是悬挂安装在弹身上的, 它们的质量力和发动机推力也是通过集中力的形式加在弹身上。

#### 三、弹身的质量载荷

弹身的质量载荷就是弹身结构重量和弹身内固定的重物因平移加速度和导弹绕其重心旋转角加速度所引起的惯性力。这是一种分布载荷。按照本章第一节介绍的方法, 求出过载系数, 这些载荷便可求出。

### § 8-2-2 弹身内力图

从上面的讨论知道, 作用在弹身上的载荷有集中的和分布的横向(垂直于弹身轴线)载荷, 又有集中的和分布的轴向(平行弹身轴线)载荷。如果求得了弹身上的载荷, 就可以把受载的弹身看成一个在载荷作用下自身平衡的梁, 用材料力学中关于梁的内力图的绘制方法, 画出各种设计情况下弹身的轴力、剪力和弯矩图, 供设计计算和强度验算使用。下面举例说明内力图的绘制方法。

**例题 8-2** 试计算某反坦克导弹在续航段上受最大横向过载情况下的弹身内力图, 其已知数据如下:

导弹飞行速度  $v = 150$  米/秒

导弹质量  $m = 10.3$  千克

重心位置(距弹顶)  $x_G = 0.503$  米

压心位置  $x_P = 0.528$  米(距弹顶)

弹径  $D = 0.120$  米 ( $S = 0.0113$  米<sup>2</sup>)

赤道转动惯量  $J_y = J_z = 0.231$  千克·米<sup>2</sup>

最大有效控制力  $F_{Kz} = 21.8$  牛顿

控制力至弹顶距离  $x_F = 0.747$  米

侧向可用过载  $n_{z,可用} = 2.29$

波动系数  $K = 0.9$

侧向气动力系数导数  $C_z^{\beta} = 8.1 \text{ 1/弧度}$

空气密度  $\rho = 1.23 \text{ 千克/米}^3$

解 第一, 过载系数及载荷计算

根据公式 (8-1-9) 计算横风对过载的影响  $\Delta n_{z_{\text{可用}}}$ , 忽略 (8-1-9) 式中推力项影响, 并取  $u = 20 \text{ 米/秒}$ , 则

$$\Delta n_{z_{\text{可用}}} = \frac{C_z^{\beta} \rho v u S}{2mg} = \frac{8.1 \times 1.23 \times 150 \times 20 \times 0.0113}{2 \times 10.3 \times 9.81} = 1.66$$

设重心处使用过载为  $n_{z_{\text{可用}}}^0$ , 则

$$n_{z_{\text{可用}}}^0 = (1 + K)n_{z_{\text{可用}}} + \Delta n_{z_{\text{可用}}} = (1 + 0.9) \times 2.29 + 1.66 = 6.01$$

考虑到此情况下  $n_x$  甚小, 故重心处沿弹体坐标系的横向过载为

$$n_{x_1} = n_x \cos \beta$$

当  $n_{z_{\text{可用}}}^0 = 6.01$  时, 侧滑角  $\beta \approx 14^\circ$ , 于是

$$n_{x_1}^0 = 6.01 \times \cos 14^\circ = 5.83$$

下面计算由于导弹绕重心旋转引起的附加过载  $n_{z_1}^0$ 。为了计算方便, 略去阻尼力矩等次要项, 可近似认为旋转角加速度

$$\dot{\omega}_y = \frac{Z_1(x_P - x_G) - F_{Kx}(x_K - x_G)}{J_y}$$

式中  $\dot{\omega}_y$ ——导弹绕  $y$  轴旋转的角加速度;

$Z_1$ ——沿  $z_1$  轴方向的气动力;

$Z_1(x_P - x_G)$ ——对  $y$  轴的气动力矩;

$F_{Kx}(x_K - x_G)$ ——对  $y$  轴的控制力矩。

可以根据重心过载系数求出侧向表面力

$$Z_1 - F_{Kx} = n_{x_1}^0 \cdot mg = 5.83 \times 10.3 \times 9.81 = 590 \text{ 牛顿}$$

因此

$$Z_1 = 590 + F_{Ky} = 590 + 21.8 = 611.8 \text{ 牛顿}$$

于是, 旋转角加速度为

$$\dot{\omega}_y = \frac{611.8(0.528 - 0.503) - 21.8(0.747 - 0.503)}{0.231} = 43 \text{ 弧度/秒}^2$$

由旋转引起的附加过载为

$$n_{z_1}^0 = \frac{\dot{\omega}_y}{g}(x - x_G) = \frac{43}{9.81}(x - 0.503) = 4.38(x - 0.503)$$

至此便可以求出作用在弹身上的全部载荷。图 8-3 (a) 中为弹身结构示意图。为了便于静力试验时加载和计算方便, 通常可以把分布载荷用集中载荷代替。但必须注意, 这样简化后所验算的剖面内力应与其实际的内力相同。我们把各舱段简化成集中重量, 同时把气动力简化成头部及弹翼部两个集中力, 如图 8-3 (b) 中所示。在这里已把弹翼重量折合到弹身上, 发动机及控制系统等的重量  $\Delta G$ , 是悬挂在距弹顶 0.615 米处, 控制力  $F_{Kx}$  也是作用在悬挂部分上。因此, 当把它们移到悬挂剖面上时, 还要加上相应的惯性力矩及外力矩。

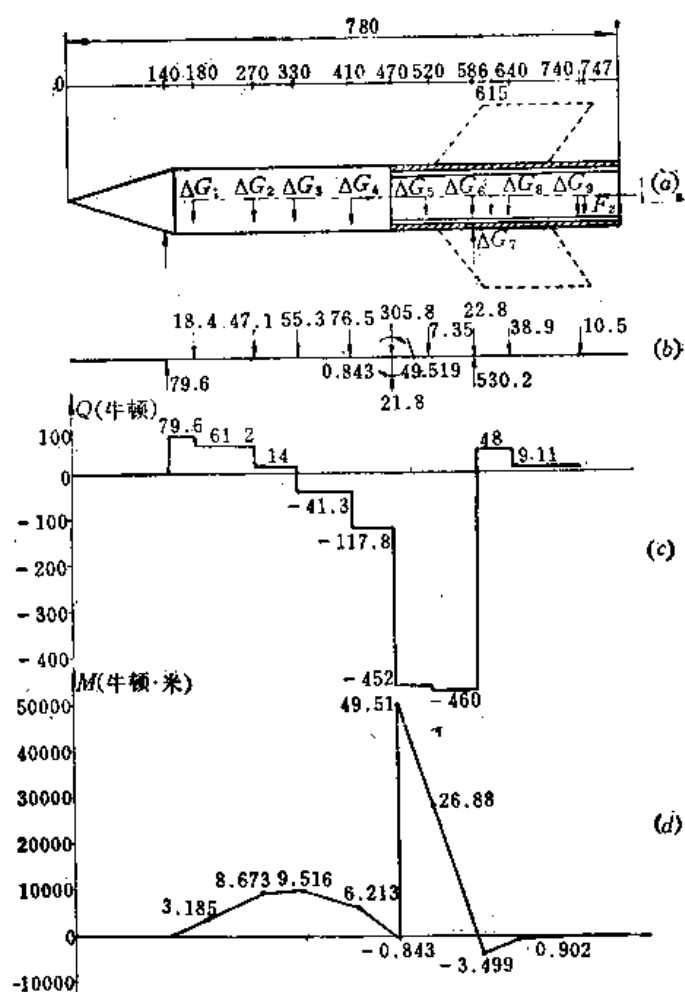


图8-3 弹身内力图

(a) 简化结构; (b) 横向载荷 (力单位为牛顿, 力矩单位为牛顿·米); (c) 剪力分布; (d) 弯矩分布。

有了上面分析, 便可列出表 8-1 计算各点的质量力  $R_i$ ,  $R_i$  的计算结果示于图 8-3 (b) 中。

表 8-1

名称	公式	序号 单位	序号								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x$	查图	米	0.180	0.270	0.330	0.410	0.520	0.586	0.615	0.640	0.740
$\Delta x_G$	$x - x_G$	米	-0.323	-0.233	-0.173	0.093	0.017	0.083	0.112	0.137	0.237
$n_{z1}^r$	$\frac{\omega y}{g} - (x - x_G)$		-1.42	-1.02	-0.759	-0.407	0.0744	0.364	0.490	0.600	1.04
$n_{z1}$ 使用	$n_{z1}^0 + n_{z1}^r$		4.41	4.81	5.07	5.42	5.90	6.19	6.32	6.43	6.87
$\Delta G_i$	查图	牛顿	4.17	9.80	10.9	14.1	12.45	3.69	49.5	6.07	1.52
$R_i$	$n_{z1} \Delta G_i$	牛顿	18.4	47.1	55.3	76.5	7.35	22.8	312.6	38.9	10.5

## 第二, 剪力图和弯矩图的绘制

把弹身看成梁, 即可用材料力学中的剖面法求出弹身内的剪力与弯矩。譬如求某一剖面的内力时, 即在该剖面处切开, 将弹身分为两段, 保留左边一段来研究, 即在该剖面处

加上未知内力（剪力与弯矩），用平衡条件求出未知内力，如图 8-4 所示。

$$Q = P_1 - R_1 - R_2$$

$$M = P_1 x_1 - R_1 x_2 - R_2 x_3$$

其一般表达式为

$$Q = \sum R_i \quad (R_i \text{ 包括该段内所有横向载荷})$$

$$M = \sum R_i \Delta x_i \quad (\Delta x \text{ 为各横向载荷距该剖面的距离})$$

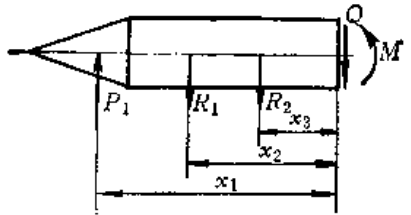


图8-4 求弹身剖面的内力

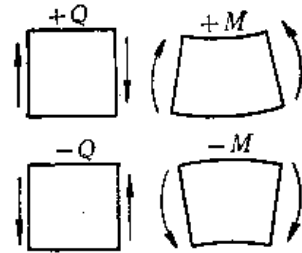


图8-5 剪力及弯矩的正负规定

剪力和弯矩的符号与材料力学中的规定相同，如图 8-5 所示。

为了保证必须的计算精度，通常要求内力的计算点数是较多的，在工程上多用列表计算。剪力和弯矩的计算表如表 8-2 所示。

表 8-2

名称	公式	序号 单位											
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x$	米		0	0.140	0.180	0.270	0.330	0.410	0.470	0.520	0.586	0.640	0.740
$\Delta x$	$x_i - x_{i-1}$	米	0.140	0.040	0.090	0.060	0.080	0.060	0.050	0.066	0.054	0.100	
$R_i$	牛顿		0	79.6	-18.4	-47.1	-55.3	-76.3	-305.8	-7.35	-22.8	-38.9	-10.5
									-21.8		530.2		
$Q$	$\sum R_i$	牛顿	0	0	79.6	61.2	14.0	-41.3	-117.8	-451.8	-459.6	48.0	9.11
				79.6	61.2	14.0	-41.3	-117.8	-451.8	-459.6	48.0	9.11	-1.37
$\Delta M$	$Q \cdot \Delta x$	牛顿·米	0		3.185	5.488	8.408	-3.302	-7.056	-22.64	-30.38	2.597	0.911
									44.34				
									6.03				
$M$	$\sum \Delta M$	牛顿·米	0	0	3.185	8.673	9.516	6.213	-0.842	49.52	26.88	-3.499	-0.901
													0.0098

### 第三，轴力图的作法

轴力图的作法与剪力图和弯矩图的作法是相似的。首先确定外载荷，求出轴向过载，从而求出质量力，并将质量力与表面力（阻力及推力）标在图上。求轴向内力的方法也是用剖面法。即从计算剖面处截取弹身的左段，并标出未知内力，然后由平衡条件求出其轴向力  $N$ ，如图 8-6 所示。

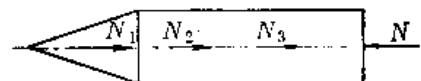


图8-6 轴向内力

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

其一般表达式为

$$N = \sum N_i$$

式中和号代表对截取剖面以左的全部外载荷求和。轴力符号的规定与材料力学中的规定相同，即剖面受拉为正，受压为负，如图 8-7 所示。

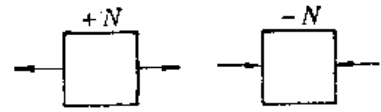


图 8-7 轴向内力符号的规定

将各计算点的轴向力连成曲线，即是轴向内力图。在此例题中，不计算轴向内力。

### § 8-2-3 弹身的强度计算

#### 一、弹身强度计算的任务及内容

前面已经讲到导弹的几种计算情况。每一种计算情况都受有相应的外载荷，由此可计算出内力并绘制出各种计算情况下的内力图。在这个基础上，在同一材料和剖面尺寸的舱段上，取最大内力的剖面（称为危险剖面）进行弹身的强度计算，其任务有二：

(一) 在初步设计时，根据总体设计给出的弹身外形几何尺寸和部位安排，对危险剖面进行强度计算，以便粗略地算出剖面尺寸，作为结构设计的依据之一，这叫做设计计算。

(二) 在结构草图绘出后，根据内力图及结构剖面尺寸，用较精确的方法，进行应力验算，确定剖面上最大应力，并使剩余强度系数不小于 1，即满足了强度条件，这叫做强度验算。

#### 二、弹身剖面上的应力计算及应力分布

目前反坦克导弹弹身的结构形式多采用硬壳式。下面以硬壳式弹身为例，介绍应力计算及应力分布。

弹身在外载荷作用下，其内力有剪力  $Q$ 、弯矩  $M$  及轴向力  $N$ 。这些内力都是以相应的剪切剪流  $q$ 、弯曲正应力  $\sigma_M$  及轴向应力  $\sigma_N$  的形式在弹身内传递的。下面介绍这些应力的计算公式及其分布规律。

##### (一) 弯曲正应力 $\sigma_M$

对于硬壳式弹身的弯曲正应力  $\sigma_M$ ，可以用结构力学中关于薄壁壳体自由弯曲与自由扭转理论计算。这种理论采用的主要假设是平剖面假设，即壳体剖面在变形前是平面变形后仍是平面。这与材料力学中梁弯曲的平剖面假设是一样的，因此，在只有一个方向的弯矩作用下，其计算公式也与材力梁的公式一致，即

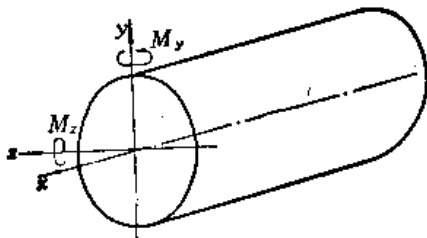


图 8-8 弹身剖面的坐标规定

$$\sigma_M = \frac{M_y}{J_y} z$$

或

$$\sigma_M = -\frac{M_z}{J_z} y$$

式中  $M_y$  或  $M_z$  为作用剖面上的弯矩。需要指出的是，我们在这里采用了弹体坐标系为剖面的坐标，又把正应力规定为拉伸为正，故由  $M_z$  产生的应力公式中， $M_z$  前应冠以负号，以便与上述规定相一致，如图 8-8 所示。式中  $J_y$  与  $J_z$  分别为弹身剖面对  $y$  轴和  $z$  轴的抗弯惯性矩。对于半径为  $R$  的圆形薄壁剖面有



$$J_y = J_z = \pi R_{\text{平均}}^3 \delta$$

式中  $R_{\text{平均}} = R - \frac{1}{2} \delta$  —— 弹身平均半径;

$R$  —— 弹身半径;

$\delta$  —— 弹身壁厚。

如图 8-9 所示。

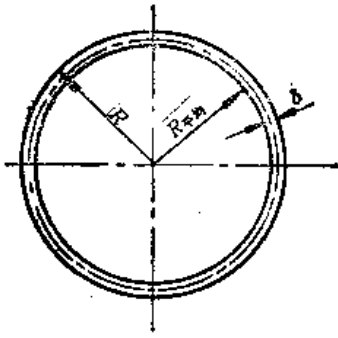


图8-9 圆形薄壁剖面

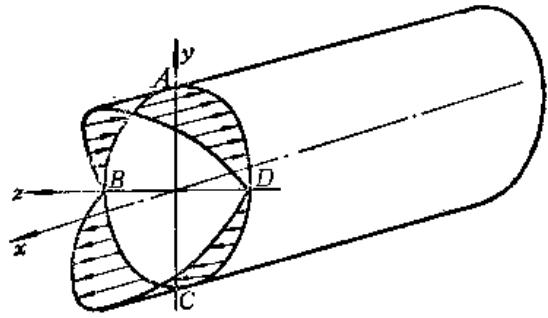


图8-10 弯曲正应力在壳体剖面上的分布

根据应力公式可以看出应力的分布规律。以  $M_x$  产生的应力为例，它对于坐标  $y$  呈线性分布，如图 8-10 所示。图中  $y$  轴上的  $A$ 、 $C$  两点最大，在  $z$  轴处的  $B$ 、 $D$  两点为零，在  $z$  轴以上受压， $z$  轴以下受拉。这里要说明的是：结构力学中所研究的是薄壁壳体，即壳体的厚度相对壳体剖面的其它尺寸是很小的。因此，假定应力在壳体厚度方向是均匀分布的。所以，上面说的应力分布规律，都是指壳体平均半径上不同坐标点的应力。

### (二) 轴向正应力 $\sigma_N$

设弹身剖面上的轴向力为  $N$ ，则

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

式中  $A = 2\pi R_{\text{平均}} \delta$ 。

轴向正应力在弹身剖面上是均匀分布的，如图 8-11 所示。

### (三) 剪力剪流

在结构力学中，由于假设应力在壳体厚度  $\delta$  上是均匀分布的。因此，求剪应力时通常采用剪流概念。所谓剪流即壳体剖面单位长度薄壁上的剪力，通常以  $q_0$  表示。故剪应力  $\tau = \frac{q_0}{\delta}$ ， $\delta$  为壳体厚度。

按结构力学中自由弯曲与自由扭转理论推导的结果，对于弹身这样环形剖面，如只有一个剪力作用，剪流的公式为

$$q_0 = \frac{Q_x}{J_y} S_x$$

或

$$q_0 = \frac{Q_y}{J_z} S_y$$

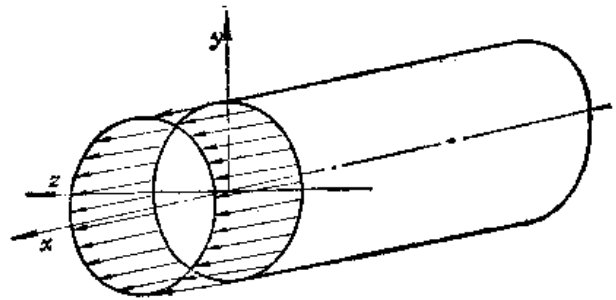


图8-11 轴向正应力在薄壁壳体剖面上的分布

式中  $Q_x$  或  $Q_y$ ——作用在剖面上的剪力；

$J_y$  或  $J_z$ ——抗弯惯性矩；

$S_y = \int_0^S z \delta dS$ ——剖面静力矩；

$S_z = \int_0^S y \delta dS$ ——剖面静力矩。

对于图 8-9 所示的圆环形薄壁剖面，其静矩为

$$S_y = R_{\text{平均}}^2 \delta \cos \varphi$$

或

$$S_z = R_{\text{平均}}^2 \delta \sin \varphi$$

所以可把剪流的公式写成

$$q_\varphi = \frac{Q_x}{\pi R_{\text{平均}}} \cos \varphi$$

或

$$q_\varphi = \frac{Q_y}{\pi R_{\text{平均}}} \sin \varphi$$

从公式中可以看出，剪力剪流的分布规律完全决定于剖面的几何性质，与外载无关。以剖面上只作用有剪力  $Q_y$  为例，剪流沿剖面呈正弦分布，规定剪流以顺时针方向为正，反时针方向为负，如图 8-12 所示。

### 三、弹身剖面的危险点及其强度计算

根据前面的讨论，弹身有各种计算情况，并把每种计算情况下的内力都绘制成内力图，根据内力图可以确定危险剖面。在危险剖面上，往往作用有各种应力（如前面讨论的弯曲应力，轴向应力及剪应力等）。而这些应力又各有其分布规律。因此，在剖面上各点的应力是不一样的。这样，就要根据这些应力的分布情况把它们合成，合成后最大应力的地方称为剖面危险点，设计时必须使危险点满足强度条件。

如果弯曲应力与轴向应力同时存在，则其合成应力为

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N = \frac{M}{J} R_{\text{平均}} + \frac{N}{A}$$

这里应注意应力的方向，如  $N$  为负（轴向力为压力），则应与弯曲应力的负边合成，反之类似。

应力合成以后，可用第四强度理论验算危险点的应力，使

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_b$$

式中  $\sigma_b$ ——材料的强度极限。

一般用剩余强度系数表示，即应使

$$\frac{\sigma_b}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} \geq 1$$

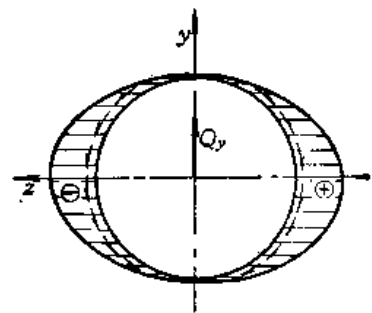


图 8-12 剪力剪流在薄壁剖面上的分布

这就表示剖面有足够的强度。

在初步设计时，只知道弹径，还不知道壁厚  $\delta$ 。这时也可以根据上述强度条件，以壁厚  $\delta$  为未知数，将  $\delta$  计算出来。例如某一点的强度条件为

$$\frac{M}{W} + \frac{N}{A} \leq \sigma_b$$

式中  $W = 0.8D_{\text{平均}}^2\delta$  圆筒剖面的剖面系数，

$D_{\text{平均}}$ ——圆筒剖面的平均直径。

代入上式得

$$\frac{M}{0.8D_{\text{平均}}^2\delta} + \frac{N}{\pi D_{\text{平均}}\delta} \leq \sigma_b$$

解得

$$\delta \geq \left( \frac{M}{0.8D_{\text{平均}}^2} + \frac{N}{\pi D_{\text{平均}}} \right) \frac{1}{\sigma_b}$$

在设计计算时，只知道弹身直径  $D$ ，故可以  $D$  代替上式中的  $D_{\text{平均}}$ ，以求得弹身壁厚  $\delta$ 。

对于弹身这样薄壁圆筒，除了要满足上述强度条件外，还应满足稳定性条件。薄壁圆筒只受轴压作用的临界应力可用下式计算

$$\sigma_{\text{临界}N} = k \frac{E}{\frac{R}{\delta}}$$

式中  $\sigma_{\text{临界}N}$ ——圆筒只受轴压的临界应力；

$E$ ——材料的杨氏弹性模量；

$R$ ——圆筒的半径（应取平均半径）；

$\delta$ ——圆筒壁厚；

$k = 0.15 \sim 0.3$ 。

系数  $k$  与  $R/\delta$  值及工艺质量有关，后者影响较大。对于机械加工的整体结构，其工艺质量较好，可取高限值。

圆筒弹身在弯矩与轴压联合作用下，可用由实验结果所得的经验公式检验稳定性条件，其关系式为

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_{\text{临界}N}} + \frac{\sigma_M}{\sigma_{\text{临界}M}} \leq 1$$

式中  $\sigma_{\text{临界}N}$  和  $\sigma_{\text{临界}M}$  分别为圆筒的纯轴压和纯弯曲临界应力；

$\sigma_N$  和  $\sigma_M$  分别为圆筒在轴压和弯矩联合作用下的轴压应力和弯曲应力。

圆筒纯弯曲临界应力可由下式计算

$$\sigma_{\text{临界}M} = 1.3\sigma_{\text{临界}N}$$

## § 8-3 弹翼的载荷及强度分析

### § 8-3-1 弹翼载荷

弹翼上的载荷是弹翼强度计算及弹翼强度试验的原始数据。作用在弹翼上的载荷有：空

气动力和弹翼结构的质量力。它们都是分布力。在弹翼上的分布情况可用沿翼展和翼弦两个方向的分布来说明。

### 一、气动载荷沿展向的分布

把弹翼沿展向分成很多段，每一段的宽度为一个单位。各段上的升力叫单位长度上的升力，用 $q_y$ 表示，如图8-13所示。

$$q_y = C_{y_{\text{翼面}}} \cdot b \cdot q \quad (8-3-1)$$

式中  $C_{y_{\text{翼面}}}$ ——所研究翼段的局部升力系数；

$b$ ——所研究翼段的平均弦长；

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 \text{——动压。}$$

在实际情况下，局部翼段上的升力系数 $C_{y_{\text{翼面}}}$ 是沿翼展变化的，翼根处大，翼梢处小。此外，由于弹身对弹翼的干扰效应，使得外伸在弹身外面的弹翼各翼段上的 $C_{y_{\text{翼面}}}$ 比孤立弹翼要大。详细考虑这一切情况，将使计算十分复杂，所以在工程计算中，必须作出一定的简化。实际的简化方法有好多种，在这里只介绍下面的一种。

首先应考虑到弹身对弹翼的干扰使得升力系数增加。根据空气动力学的研究已经知道，外伸在弹身外面的弹翼上所受到的升力 $Y_{W(B)}$ 相对于孤立的弹翼上的升力 $Y_W$ 有一定的比值，令其为 $K_{W(B)}$ ，即

$$\frac{Y_{W(B)}}{Y_W} = \frac{C_{y_{W(B)}}}{C_{y_W}} = K_{W(B)}$$

$K_{W(B)}$ 的值可由下式计算

$$K_{W(B)} = \frac{1}{5} \left\{ \left[ 2 + \frac{D}{l} \left( 1.2 - \frac{0.2}{\eta} \right) \right]^2 + 1 \right\} \quad (8-3-2)$$

式中 $D$ 、 $l$ 及 $\eta$ 同第六章的意义相同，即为弹径、全翼展及根梢比。可以根据孤立弹翼的升力系数 $C_{y_W}$ 和弹身对弹翼的干扰系数 $K_{W(B)}$ 算出外伸于弹身之外的弹翼的升力系数 $C_{y_{W(B)}}$ 。然后可以假定，此弹翼每一翼段上的局部升力系数 $C_{y_{\text{翼面}}}$ 沿翼展不变，并等于整个弹翼的升力系数，即

$$C_{y_{\text{翼面}}} = C_{y_{W(B)}} = K_{W(B)} \cdot C_{y_W} = K_{W(B)} (C_y^a)_W \cdot \alpha$$

式中 $(C_y^a)_W$ 是第七章(7-2-13)式引用过的孤立弹翼的升力系数斜率。于是(8-3-1)式成为

$$q_y = K_{W(B)} \cdot C_{y_W} \cdot b \cdot q = K_{W(B)} \cdot (C_y^a)_W \cdot \alpha \cdot b \cdot q \quad (8-3-3)$$

这样简化后， $q_y$ 沿翼展的分布是与弦长 $b$ 成正比的。这样计算的结果偏于保守和安全。

### 二、气动载荷沿弦向的分布

气动载荷沿弦向的分布规律也是比较复杂的。在亚音速的情况下，弹翼前缘附近的气动载荷较后缘附近的强烈，如图8-14所示。因此，弹翼上升力合力的作用点约位于距前缘20~25%弦长处。在一般情况下，这种载荷分布情况将导致弹翼剖面的扭转。但对于一般无后掠角的反坦克导弹弹翼，这种扭转

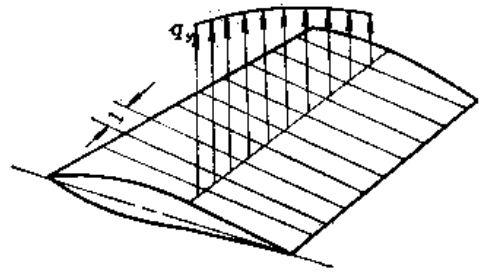


图8-13 气动载荷沿翼展的分布

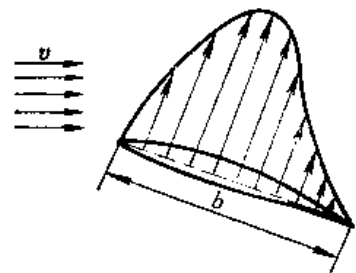


图8-14 气动载荷沿翼弦的分布

应力较弯曲应力要小得多, 因此, 在弹翼的设计计算时, 可以假定气动载荷沿弦向是均匀分布的, 以便简化计算。

### 三、由于弹翼安装角 $\chi$ 及导弹滚转引起的气动载荷

目前滚转的反坦克导弹, 常常使弹翼具有一定的差动偏斜安装角  $\chi$ , 以使导弹在滚转中具有稳定的转速。在计算弹翼的气动载荷时, 必须考虑由于弹翼安装角及导弹旋转引起的气动载荷。

(一) 由于弹翼安装角  $\chi$  引起的气动载荷  $q'_y$

以  $q'_y$  表示由于  $\chi$  引起在弹翼单位展长上的升力, 则

$$q'_y = (C_y^a)_w \cdot \chi \cdot q \cdot \frac{S_w}{l - \bar{D}} \quad (8-3-4)$$

式中  $S_w$  是一对孤立弹翼的翼面积。

(二) 由于导弹滚转引起的气动载荷

当导弹以  $\omega_x$  的角速度绕着纵轴  $o_1x_1$  滚转时, 与弹翼对称面相垂直的方向上的线速度  $v_n$  (如图 8-15 所示) 为

$$v_n = \omega_x \cdot z_1$$

由于  $v_n$  存在, 弹翼的任一剖面上将引起一个局部的附加攻角  $\Delta\alpha_{w\bar{m}}$ , 即

$$\Delta\alpha_{w\bar{m}} \approx \frac{\omega_x \cdot z_1}{v}$$

于是在弹翼的单位展长上引起附加气动载荷  $q''_y$ , 可由下式计算

$$q''_y = (C_y^a)_w \cdot \Delta\alpha_{w\bar{m}} \cdot q \cdot \frac{S_w}{l - \bar{D}} = (C_y^a)_w \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \omega_x \cdot z_1 \cdot \frac{S_w}{l - \bar{D}} \quad (8-3-5)$$

由上式可知,  $q''_y$  是沿翼展向变化的, 翼梢处最大。

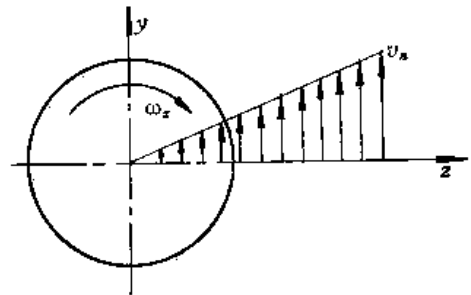


图 8-15 导弹滚转引起的附加速度  $v_n$

### § 8-3-2 弹翼的强度分析

反坦克导弹的弹翼一般是小展弦比弹翼, 有的是单展板, 有的是三展板 (即外展是薄的金属板, 如铝板, 中间胶有泡沫塑料)。对于小展弦比实心弹翼的强度计算问题, 在本节中主要介绍近似计算方法, 做为初步设计的参考。在实际工作中, 弹翼的强度问题, 最好用有限单元法和静力强度试验来解决。

#### 一、矩形悬臂板受均布横向载荷的弯曲

反坦克导弹单展板弹翼一般是无后掠角或小后掠角的, 厚度变化也不大。因此, 一般可简化成等厚度无后掠角的悬臂板来近似计算。

实验表明, 矩形悬臂板受横向均布载荷作用时, 除板的边缘附近外, 在  $y$  方向不发生变形 (如图 8-16 (a) 中,  $AB$  直线变形后除边缘处外, 仍为一直线), 因此, 可以用板的柱面弯曲理论来计算这种板的强度问题。

设想沿  $x$  方向取出一个宽度为  $1$  的板条, 该板条如果单独一端固定没有相邻两边的限

制时，即是一个梁。这样的悬臂梁受均布向下的横向载荷作用时，梁上横剖面形状将发生如图 8-16, b 所示的变化，变形前的矩形 1234 将变成 1'2'3'4'。在梁中产生的正应力只有沿  $x$  方向的弯曲正应力  $\sigma_x$ ，而沿  $y$  方向的正应力为零。如果这个板条是板中的一部分，在弯曲变形后，该板条的横剖面矩形 1234 由于受两边的限制仍保持不变。因此，该板条除产生正应力  $\sigma_x$  外，还产生沿  $y$  方向的正应力  $\sigma_y$ 。这也就是说在板中每一点有正应力  $\sigma_x$  及  $\sigma_y$  两个方向的应力。由此可见，板在弯曲时，是处在平面应力状态，这是板与梁的重要区别。

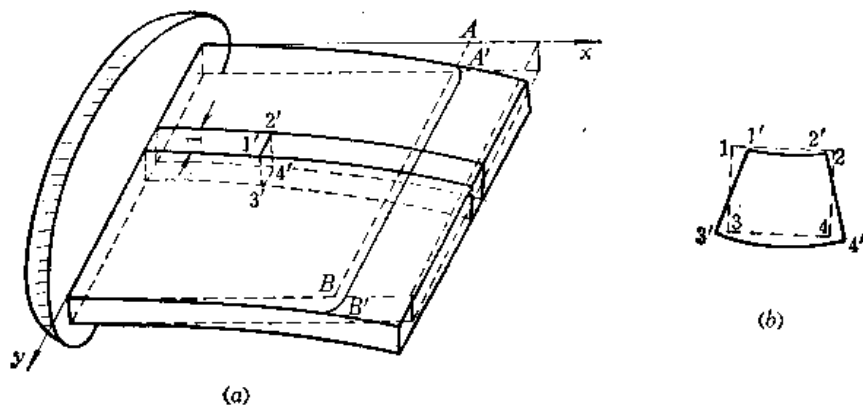


图8-16 矩形悬臂板的变形

在平面应力状态下，应力与应变间的关系是怎样呢？假设一个单元体处在平面应力状态下，由  $\sigma_x$  引起的应变为  $\epsilon'_x = \sigma_x/E$ 、 $\epsilon'_y = -\mu\sigma_x/E$ ，而由  $\sigma_y$  引起的应变为  $\epsilon''_x = \sigma_y/E$ 、 $\epsilon''_y = -\mu\sigma_y/E$ ，因此，在平面应力状态下，应力与应变的关系为

$$\epsilon_x = \epsilon'_x + \epsilon''_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad (8-3-6)$$

$$\epsilon_y = \epsilon'_y + \epsilon''_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad (8-3-7)$$

上面二式即是平面应力状态下的虎克定律，一般叫做广义虎克定律。

在所讨论的问题中，在  $y$  方向上的应变为零，即  $\epsilon_y = 0$ ，也就是

$$\frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = 0$$

由此得

$$\sigma_y = \mu\sigma_x \quad (8-3-8)$$

即在柱面弯曲情况下，在板中的正应力  $\sigma_y$  是  $\sigma_x$  的  $\mu$  倍， $\mu$  是材料的泊桑比。将(8-3-8)式代入(8-3-7)中，得

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu^2\sigma_x) = \frac{\sigma_x}{\frac{E}{1-\mu^2}}$$

但由材料力学知道，梁的应变  $\epsilon_x = \sigma_x/E$ ，把此式与上式比较可见，只要用  $E/(1-\mu^2)$  代替梁公式中的  $E$ ，就可以把这样受均布横向载荷的板问题当成梁来解。这样，我们求板的挠度就可用梁的挠曲线微分方程来解，只是将式中的  $E$  用  $E/(1-\mu^2)$  代替即可。如以  $w$

表示板的挠度，则这一单位宽度板条的弯矩

$$M_x = -\frac{EJ}{1-\mu^2} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (8-3-9)$$

式中  $J = \frac{h^3}{12}$ ； $h$  为板的厚度。在板的弯曲理论中，常采用符号  $D$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$D$  叫做弯曲刚度。引入此符号后，(8-3-9) 式成为

$$M_x = -D \frac{d^2w}{dx^2}$$

用材料力学的同样方法解此方程可得

$$w = \frac{p}{24D} (x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2) \quad (8-3-10)$$

式中  $p$  为板在单位面积上的横向载荷， $a$  为板的长度。当  $x = a$  时，挠度达到最大值

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{8D} \quad (8-3-11)$$

板的最大弯曲正应力为

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6(M_x)_{\max}}{h^2} \quad (8-3-12)$$

(8-3-12) 式中的  $(\sigma_x)_{\max}$  是沿  $x$  方向的最大弯曲应力。而在  $y$  方向的最大弯曲应力为

$$(\sigma_y)_{\max} = \mu (\sigma_x)_{\max} \quad (8-3-13)$$

**例题 8-3** 设一悬臂翼板长 14 厘米，宽 15 厘米，厚 0.3 厘米，板材是铝材； $E = 66.6$  吉牛顿/米<sup>2</sup>， $\mu = 0.3$ ，受横向均布载荷  $p = 1.96 \times 10^{-2}$  兆牛顿/米<sup>2</sup> 作用，如图 8-17 所示。求最大弯曲应力及最大挠度。

**解**

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{66.6 \times 10^9 \times (0.3 \times 10^{-2})^3}{12(1-0.3^2)}$$

$$= 1.65 \times 10^{-3} \text{兆牛顿} \cdot \text{米}$$

由式 (8-3-11) 得

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{8D} = \frac{1.96 \times 10^{-2} \times (14 \times 10^{-2})^4}{8 \times 1.65 \times 10^{-3}} = 0.00572 \text{米}$$

又因为悬臂板根部弯矩为

$$(M_x)_{\max} = p \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 1.96 \times 10^{-2} \times 14 \times 10^{-2} \times \frac{14 \times 10^{-2}}{2}$$

$$= 0.192 \times 10^{-3} (\text{兆牛顿} \cdot \text{米}) / \text{米}$$

由式 (8-3-12) 得

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6(M_x)_{\max}}{h^2} = \frac{6 \times 0.192 \times 10^{-3}}{(0.3 \times 10^{-2})^2} = 128 \text{兆牛顿/米}^2$$

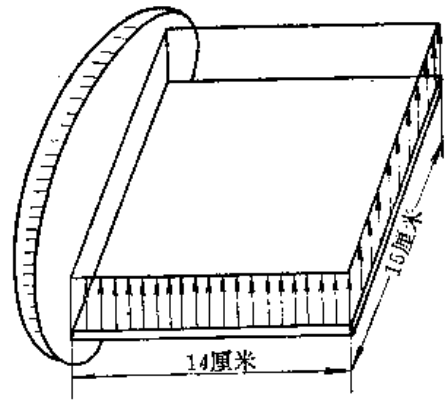


图8-17 例题8-3中的悬臂翼板

由式 (8-3-13) 可得

$$(\sigma_y)_{\max} = \mu (\sigma_x)_{\max} = 0.3 \times 128 = 38.4 \text{ 兆牛顿/米}^2$$

根据有限单元法计算, 其结果为

$$\begin{aligned} w_{\max} &= 0.59 \times 10^{-2} \text{ 米} \\ (\sigma_x)_{\max} &= 129 \text{ 兆牛顿/米}^2 \\ (\sigma_y)_{\max} &= 35.9 \text{ 兆牛顿/米}^2 \end{aligned}$$

由此例题可知, 悬臂板在均布横向载荷作用下, 用板的柱面弯曲理论计算结果还是比较准确的。

**例题8-4** 如果上例题中横向载荷沿弦向的分布是按线性变化的 (图 8-18), 求最大挠度和最大应力。

**解** 假设非均布载荷看成均布载荷  $p_{\text{平均}} = 1.96$  (牛顿/厘米<sup>2</sup>), 用板的柱面弯曲理论公式计算, 其结果同上题。但用有限单元法, 按非均布载荷计算结果为

$$\begin{aligned} w_{\max} &= 0.0064 \text{ 米} \\ (\sigma_x)_{\max} &= 137.2 \text{ 兆牛顿/米}^2 \\ (\sigma_y)_{\max} &= 39.2 \text{ 兆牛顿/米}^2 \end{aligned}$$

由扭矩引起的最大剪应力为

$$\tau_{\max} = 11.07 \text{ 兆牛顿/米}^2$$

由此例可见, 把非均布载荷近似看成均布载荷, 并用板的柱面弯曲理论计算, 其结果与用有限单元法按非均布载荷计算的结果比较, 最大挠度误差为 10%,  $x$  方向最大弯曲应力误差为 6.4%,  $y$  方向最大弯曲应力误差为 1.75%。而由扭矩引起的最大剪应力是最大弯曲应力  $(\sigma_x)_{\max}$  的 9%。

## 二、以泡沫塑料作填料的三层板的强度计算

某些反坦克导弹的弹翼是三层板结构, 三层板的中间填料是泡沫塑料, 外层是薄铝板。

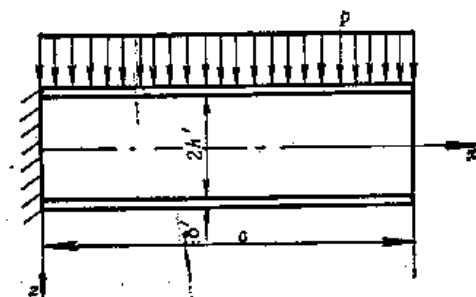


图8-19 等厚度三层悬臂板

根部剖面上的总弯矩为

$$M_{x=0} = -\frac{pa^2b}{2}$$

式中  $b$  是板宽。

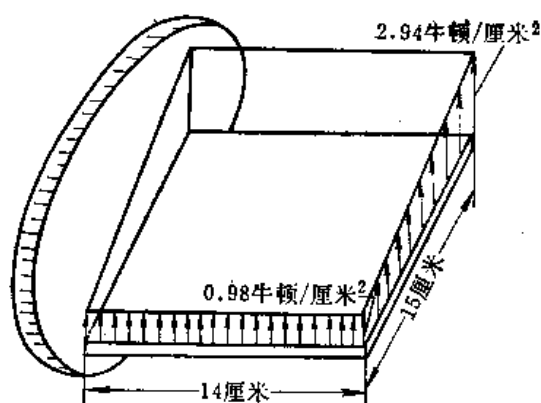


图8-18 例题8-4中的悬臂板受非均布载荷

在计算这种弹翼时, 可近似认为弯矩只由外层的薄铝板承受, 而泡沫塑料只承受剪力。在计算挠度时, 必须考虑剪变形对挠度的影响。下面介绍以这种假设为基础的等厚度三层悬臂板 (图8-19) 在均匀分布的横向载荷作用下最大应力和最大挠度的计算公式。

### (一) 最大弯曲应力

由于外层厚度较薄, 故可认为弯曲应力沿外层厚度是均匀分布的。



因为在翼根处，一个外层的剖面上正应力合力为  $b\delta'\sigma_{x=0}$ （其中  $\delta'$  为外层厚度），故由平衡条件可得

$$b\delta'\sigma_{x=0}(2h'+\delta')=M_{x=0}=\frac{pa^2b}{2}$$

其中  $h'$  —— 填料的厚度之半。

于是，可得

$$\sigma_{x=0}=\frac{pa^2}{4\delta'\left(h'+\frac{\delta'}{2}\right)} \quad (8-3-14)$$

### (二) 最大剪应力

根部剖面上的剪力为

$$Q=pab$$

设剪应力均匀分布，则最大剪应力为

$$\tau_{x=0}=\frac{Q}{(2h'+\delta')b}=\frac{pa}{2h'+\delta'} \quad (8-3-15)$$

### (三) 最大挠度

最大挠度发生在自由端，其计算公式如下

$$w_{x=a}=\frac{pa^4(1-\mu^2)}{16E\delta'\left(h'+\frac{\delta'}{2}\right)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{pa^2h'}{\left(h'+\frac{\delta'}{2}\right)^2G_{CT}} \quad (8-3-16)$$

式中  $E$  和  $\mu$  是外层的杨氏弹性模量和泊桑比， $G_{CT}$  是填料的剪切模量。

(8-3-14)，(8-3-15) 及 (8-3-16) 式的适用范围是：

当  $0.01\leq\frac{\delta'}{h'}\leq 0.1$  时， $0.0001\leq\frac{G_{CT}(1-\mu^2)}{E}\leq 0.005$

$$\frac{2h'}{a}\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\leq 0.3$$

当  $0.1\leq\frac{\delta'}{h'}\leq 0.25$  时， $0.0001\leq\frac{G_{CT}(1-\mu^2)}{E}\leq 0.005$

$$\frac{2h'}{a}\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\leq 0.1$$

### (四) 局部失稳临界应力

以泡沫塑料为填料的三层板弹翼在受横向载荷弯曲时，产生压应力的外层薄板可能发生局部失稳，局部失稳的临界应力可按式计算

当  $\sigma_{x=0}<\sigma_p$  时，在  $\frac{h'}{\delta'}>0.4\sqrt{\frac{EE_{CT}}{G_{CT}^2}}$  条件下，

$$\sigma_{临界}=0.91\sqrt[3]{EE_{CT}G_{CT}\cdot\frac{1}{1-\mu^2}} \quad (8-3-17)$$

在  $\frac{h'}{\delta'} < 0.4 \sqrt[3]{\frac{EE_{\sigma T}}{G_{CT}}}$  条件下,

$$\sigma_{\text{临界}} = 0.58 \sqrt{\frac{EE_{\sigma T} \delta'}{h'} \cdot \frac{1}{1-\mu^2}} \quad (8-3-18)$$

式中  $\sigma_p$ ——外层材料的比例极限;

$E_{\sigma T}$ ——泡沫塑料的杨氏弹性模量;

$\sigma_{\text{临界}}$ ——外层局部失稳临界应力。

当  $\sigma_{x=0} > \sigma_p$  时, 由 (8-3-17)、(8-3-18) 式算出的临界应力应乘以修正系数  $\varphi$

$$\varphi = \left[ \sigma_p + (\sigma_s - \sigma_p) \left( 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_{x=0}} \right) \right] \frac{1}{\sigma_{x=0}}$$

式中  $\sigma_s$  外层材料屈服极限。

**例题8-5** 求等厚度三层板在均布横向载荷作用下产生的最大应力和最大挠度, 并验算其强度 (取安全系数  $f = 2$ )。

板的外形尺寸:

$2h' = 0.6$  厘米,  $\delta' = 0.03$  厘米,  $a = 9$  厘米,  $b = 15$  厘米。

外层材料性质:

$E = 66.6$  吉牛顿/米<sup>2</sup>,  $G = 26.4$  吉牛顿/米<sup>2</sup>

$\sigma_s = 406.7$  兆牛顿/米<sup>2</sup>,  $\sigma_p = 245$  兆牛顿/米<sup>2</sup>,  $\mu = 0.3$

填料材料性质

$E_{CT} = 0.0784$  吉牛顿/米<sup>2</sup>,  $G_{CT} = 0.0284$  吉牛顿/米<sup>2</sup>,  $\sigma_{b,CT} = 8.82$  兆牛顿/米<sup>2</sup>,  $\mu_{CT} = 0.4$

外载荷

$$p = 1.96 \times 10^{-2} \text{兆牛顿/米}^2$$

解

因为  $\frac{\delta'}{h'} = \frac{0.03}{0.3} = 0.1$

$$\frac{G_{CT}(1-\mu^2)}{E} = \frac{0.0284(1-0.3^2)}{66.6} = 0.00039$$

$$\frac{2h'}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{2 \times 0.3}{9} \sqrt{1 + \left(\frac{9}{15}\right)^2} = 0.0777$$

符合使用 (8-3-14)~(8-3-16) 诸式的条件, 故可用这三个公式求最大应力及最大挠度。

第一, 由 (8-3-14) 式乘以安全系数后可得设计应力

$$\begin{aligned} \sigma_{x=0}^d &= \frac{f \cdot P \cdot a^2}{4\delta' \left( h' + \frac{\delta'}{2} \right)} = \frac{2 \times 1.96 \times 10^{-2} \times (9 \times 10^{-2})^2}{4 \times (0.03 \times 10^{-2}) \left( 0.3 \times 10^{-2} + \frac{0.03 \times 10^{-2}}{2} \right)} \\ &= 84 \text{兆牛顿/米}^2 \end{aligned}$$

第二, 由 (8-3-15) 式乘以安全系数得设计剪应力

$$\tau_{x=0}^d = \frac{f \cdot P \cdot a}{2h' + \delta'} = \frac{2 \times 1.96 \times 10^{-2} \times 9 \times 10^{-2}}{2 \times 0.3 \times 10^{-2} + 0.03 \times 10^{-2}} = 0.56 \text{兆牛顿/米}^2$$

第三, 由 (8-3-16) 式

$$\begin{aligned} w_{x=a} &= \frac{pa^4(1-\mu^2)}{16E\delta\left(h'+\frac{\delta'}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} \frac{pa^2h'}{\left(h'+\frac{\delta'}{2}\right)^2 G_{cr}} \\ &= \frac{1.96 \times 10^{-2} \times (9 \times 10^{-2})^4 (1-0.3^2)}{16 \times 66.6 \times 10^3 \times 0.03 \times 10^{-2} \left(0.3 \times 10^{-2} + \frac{0.03 \times 10^{-2}}{2}\right)^2} \\ &\quad + \frac{1}{4} \times \frac{1.96 \times 10^{-2} \times (9 \times 10^{-2})^2 \times 0.3 \times 10^{-2}}{\left(0.3 \times 10^{-2} + \frac{0.03 \times 10^{-2}}{2}\right)^2 \times 0.0284 \times 10^8} = 0.079 \times 10^{-2} \text{米} \end{aligned}$$

第四, 外层局部失稳临界应力

$$\frac{h'}{\delta'} = \frac{0.3}{0.03} = 10$$

$$0.4 \sqrt[3]{\frac{EE_{cr}}{G_{cr}^2}} = 0.4 \sqrt[3]{\frac{66.6 \times 0.0784}{0.0284^2}} = 7.45$$

由此可见,  $\frac{h'}{\delta'} > 0.4 \sqrt[3]{\frac{EE_{cr}}{G_{cr}^2}}$  条件是满足的, 故可用 (8-3-17) 式求  $\sigma_{\text{临界}}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{临界}} &= 0.91 \sqrt[3]{EE_{cr}G_{cr} \cdot \frac{1}{1-\mu^2}} \\ &= 0.91 \sqrt[3]{66.6 \times 10^3 \times 0.0784 \times 10^3 \times 0.0284 \times 10^3 \times \frac{1}{1-0.3^2}} \\ &= 496.9 \quad \text{兆牛顿/米}^2 \end{aligned}$$

第五, 外层强度验算

按抗拉强度极限计算剩余强度系数

$$\eta = \frac{\sigma_b}{\sigma_{z=0}^p} = \frac{406.7}{84} = 4.85$$

按局部失稳临界应力计算剩余强度系数

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{临界}}}{\sigma_{z=0}^p} = \frac{496.9}{84} = 5.92$$

可见该三层板弹翼是满足强度要求的。

#### § 8-4 有限单元法原理简介

本节将通过用有限单元法解弹性力学中的平面应力问题来阐述该方法的原理。首先简单讲述弹性力学中的一些基本概念, 然后叙述平面应力问题的基本方程的建立, 最后讲平面应力问题的有限单元法。

## § 8-4-1 弹性力学的一些基本概念

## 一、应力

如果从一个受外力作用的物体中，取出其中的一部分表示在图 8-20(a) 中，在此取出的物体表面上将作用着移去物体对它的作用力。设在此取出的物体的某一微分面积  $dS$  上作用力为  $d\vec{F}$ ，那么，我们把  $\frac{d\vec{F}}{dS}$  叫做应力。

假如由受外力作用的物体中的某一点  $P$  处，取出一个微小平行六面体，它的六个面垂直于坐标轴，如图 8-20(b) 所示。在此六面体的每个面上的应力可以分解成垂直于各平面的应力分量及平行于各面的应力分量，垂直于各面的应力分量叫正应力，用  $\sigma$  表示，平行于各面的应力分量叫剪应力，用  $\tau$  表示。为了表明这些应力的作用面及作用方向，在  $\sigma$ 、 $\tau$  下角需加角标。正应力加一个角标，该角标表示此应力的作用面及作用方向。如  $\sigma_x$  表示它是作用在垂直于  $x$  轴的平面上，且沿  $x$  轴方向作用的。而剪应力加两个角标，前一个角标表示剪应力的作用平面，后一角标表示其作用方向所沿的坐标轴。如  $\tau_{xy}$  即表示它作用在垂直于  $x$  轴的平面上，其方向是沿着  $y$  轴。

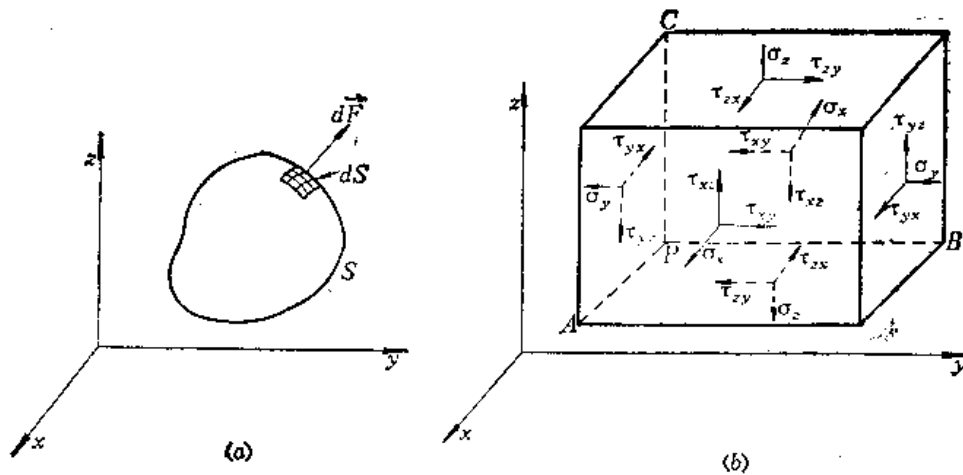


图 8-20 受力物体微元

(a) 微元的受力；(b) 应力分量。

应力的正负号是这样规定的：如果某一面上外法线方向是沿着坐标轴正方向，那么，这个面上的应力就规定以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一面上外法线是沿着坐标的负方向，这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 8-20(b) 中所示应力分量皆为正。

作用在这个微小平行六面体上的应力共有三个正应力和六个剪应力，这些应力就叫做  $P$  点的应力分量。根据此六面体的平衡条件可以证明：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

即作用在两个互相垂直的面上且垂直于此两面交线的剪应力是互等的，这就是材料力学中学过的剪应力互等定律。由此可见，一点的应力状态只用三个正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  及三个剪应力  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$  就可以表示。

一般讲，物体中各点的应力状态是不相同的，因此，这六个应力分量是坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的函数。

## 二、位移与应变

弹性体内任一点的位移用它在坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  上的投影  $u$ 、 $v$ 、 $w$  来表示，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量，同样，它们是坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的函数。

为了描述弹性体内任一点  $P$  的变形，在这点沿坐标轴的正方向取三个微小线段  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$ ，如图 8-20(b) 所示。弹性体变形以后，这三个线段的长度及它们之间的夹角都将有所改变。线段每单位长度的伸缩称为正应变，线段之间夹角的改变称为剪应变。正应变用  $\epsilon$  表示，如  $\epsilon_x$  表示  $x$  方向的线段  $PA$  的正应变，余类推。正应变以伸长为正，缩短为负，与正应力正负号规定相对应。剪应变以  $\gamma$  表示，如  $\gamma_{xy}$  表示  $x$  与  $y$  两方向的线段  $PA$  与  $PB$  之间夹角的改变，其余类推。剪应变以夹角变小为正，变大为负，与剪应力正负号规定相对应。

一点的应变就是以六个应变分量  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\epsilon_z$ 、 $\gamma_{xy}$ 、 $\gamma_{yz}$ 、 $\gamma_{zx}$  来表示。一般讲它们也是坐标的函数。

## 三、弹性力学中的两个平面问题

一般讲，弹性体都是空间物体，弹性体受的外力也是空间力系。所以任何一个弹性力学问题都是空间问题，必须考虑所有的位移分量、应变分量和应力分量。但是，如果所研究的物体具有特殊形状，并且承受特殊外力，就有可能把空间问题近似地简化成平面问题，这时只考虑平行于某一平面内的应力或位移。前者即为平面应力问题，后者是平面应变问题。

## 四、平面应力问题

所谓平面应力问题，是指弹性体是一薄平板（板的厚度远小于长和宽），所有外力（包括体力）方向都平行于板平面且沿板厚度均匀分布。

图 8-21 所示的深梁就属于此种情况。

由于深梁的两表面（平行于  $xoy$  平面）没有外力作用，所以在此二表面上任一点的应力  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$ ，又因为深梁很薄，可认为两表面之间各点的应力也存在着  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$  这一关系。这样，只剩下应力分量  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  作用在平行于  $xoy$  平面里，所以这一问题就称为平面应力问题。

应当指出，在平面应力问题中， $\sigma_z = 0$ ，而  $\epsilon_x$  并不为零，因为深梁将随外力作用而变厚或变薄。

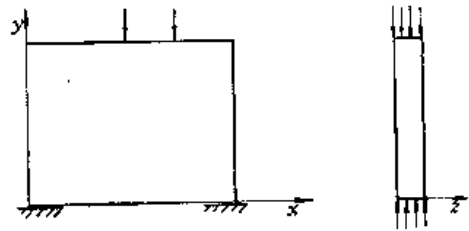


图8-21 深梁

### § 8-4-2 平面应力问题的基本方程及边界条件

#### 一、平衡方程

从弹性体中取出一微小的正六面体，它在  $x$  和  $y$  方向的尺寸为  $dx$  和  $dy$ ，为了计算方便，在  $z$  方向取单位宽度。相邻部分对该微体的作用力表示在图 8-22 中。

图 8-22 中  $X$ 、 $Y$  是单位体积的体积力在  $x$ 、 $y$  方向的分量。

首先列出这一微体在  $x$  方向的平衡方程： $\Sigma F_x = 0$ ，即

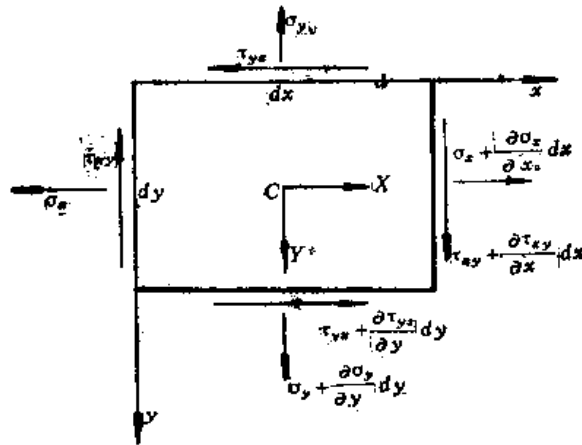


图8-22 微元体的平衡

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy \cdot 1 - \sigma_x \cdot dy \cdot 1 + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) \cdot dx \cdot 1 - \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 + X \cdot dx \cdot dy \cdot 1 = 0$$

化简后, 除以  $dx dy$  得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

同样, 由  $\Sigma F_y = 0$ , 可得到类似方程

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

其次以通过中心  $C$  且垂直于图面的直线为矩轴, 列出力矩平衡方程  $\Sigma M_c = 0$ , 即

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{xy} \cdot dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} - \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

合并相同项, 并略去三阶微量得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

这里再一次证明了剪应力互等定律。于是, 可从弹性体内部平衡条件得到应力分量与体积力分量之间的关系式, 即平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases} \quad (8-5-1)$$

## 二、静力边界条件

上面得到的平衡方程, 取的是弹性体的微体正六面体。到了弹性体的边界上, 如图 8-23(a) 所示, 就取不到平行六面体了, 只能是三角板。我们把边界上的微小三角板取出来如图 8-23(b) 所示, 斜面  $AB$  与物体的边界重合。图中画着相邻部分对这一微小三角板的作用力。当物体处在平衡状态时, 作用在三角板的垂直边和水平边上的应力应当与体积力

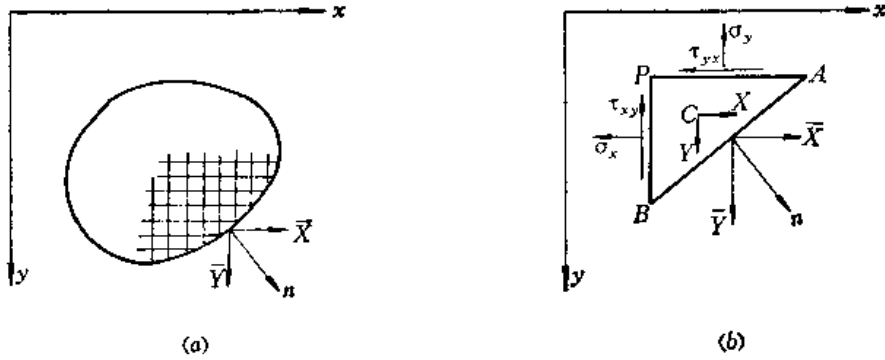


图8-23 静力边界条件

及边界 AB 上的面力平衡 (单位面积上的面力在 x、y 方向的分量用  $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$  表示)。用  $n$  表示边界的外法线方向, 其方向余弦记作:

$$\cos(n, x) = l, \cos(n, y) = m$$

设边界 AB 长为  $dS$ , 则截面 PB 和 PA 的长度为  $l dS$  和  $m dS$ 。垂直图面尺寸仍设为 1。

由平衡条件  $\Sigma F_x = 0$  得

$$\bar{X} \cdot dS \cdot 1 - \sigma_x \cdot l \cdot dS \cdot 1 - \tau_{yx} \cdot m \cdot dS \cdot 1 + X \cdot l \cdot dS \cdot m \cdot dS \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

略去高阶微量后, 除以  $dS$  得

$$l\sigma_x + m\tau_{yx} = \bar{X}$$

同样, 可由平衡条件  $\Sigma F_y = 0$ , 得相类似的方程。于是, 弹性体边界上联系外载荷与应力的边界条件为

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = \bar{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = \bar{Y} \end{cases} \quad (8-5-2)$$

由  $\Sigma M_z = 0$ , 可得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

从上面弹性体内部的平衡方程或边界条件可以看出, 方程式个数只有两个, 但包含着三个未知函数  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ , 所以, 弹性力学问题是静不定的, 要解得应力, 还必须考虑位移与应变的关系, 这就是几何方程。

### 三、几何方程

弹性体内任一点 P, 沿 x 轴和 y 轴取两个微小线段 PA 和 PB, 长为  $dx$  和  $dy$ 。假如弹性体受力后, P、A、B 三点分别移到 P'、A'、B', 如图 8-24 所示。

设 P 点在 x 方向的位移为  $u$ , 从 P 点到 A 点, 位移只随坐标 x 变化, 所以 A 点在 x 方向的位移为

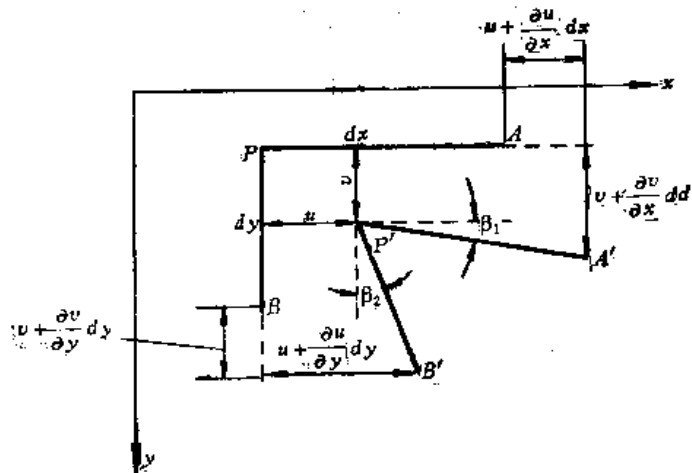


图8-24 弹性变形的几何关系

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

线段  $PA$  的伸长为  $\overline{P'A'} - \overline{PA}$ ，近似等于

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u$$

于是  $\overline{PA}$  的正应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

同样， $\overline{PB}$  的正应变为

$$\varepsilon_y = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

下面求剪应变与位移间的关系式。由图中可见，剪应变分量是由两部分组成的，一部分是  $x$  轴方向的线段  $PA$  向  $y$  轴方向的转角  $\beta_1$ ，另一部分是  $y$  轴方向的线段  $PB$  向  $x$  轴方向的转角  $\beta_2$ 。因  $P$  点在  $y$  轴方向的位移分量是  $v$ ，到  $A$  点的相应的位移分量是

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

因此，线段  $PA$  的转角是

$$\beta_1 = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

同样，线段  $PB$  的转角是

$$\beta_2 = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

于是，剪应变的分量是

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}。$$

这样，就得到了联系应变与位移的微分方程，即所谓的几何方程

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (8-5-3)$$

由几何方程 (8-5-3) 可见，当弹性体的位移分量完全确定时，应变分量是完全确定的。反过来，当应变分量完全确定时，位移分量却不完全确定。这是因为具有确定形状的物体，可能发生不同的刚体位移。为了说明这一点，试在 (8-5-3) 式中命

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0,$$



从而有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

积分以后得

$$\begin{cases} u = u_0 - \omega_z y \\ v = v_0 + \omega_z x \end{cases} \quad (8-5-4)$$

式中  $u_0$ 、 $v_0$ 、 $\omega_z$  是积分常数。下面来说明这三个常数的几何意义。

若三个常数中只有  $u_0$  不为零，由 (8-5-4) 式可知，弹性体的所有各点只沿  $x$  方向移动同样的距离  $u_0$ 。由此可见， $u_0$  代表弹性体沿  $x$  方向的刚体移动。

若只有  $\omega_z$  不为零，由 (8-5-4) 式可见，弹性体中任一点的位移分量是  $u = -\omega_z y$ ， $v = \omega_z x$ 。据此，坐标为  $(x, y)$  的任一点  $P$  沿着  $y$  方向移动  $\omega_z x$ ，并沿着负  $x$  方向移动  $\omega_z y$ ，如图 8-25 所示，而合成位移为

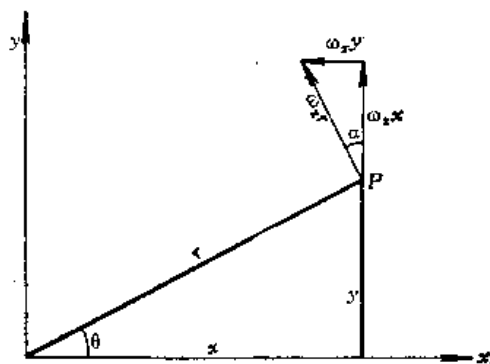


图8-25 弹性体的刚体转动

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(-\omega_z y)^2 + (\omega_z x)^2} = \omega_z \sqrt{x^2 + y^2} = \omega_z r$$

合成位移的方向与  $y$  轴的夹角为  $\alpha$ ，则

$$\operatorname{tg} \alpha = \omega_z y / \omega_z x = y/x = \operatorname{tg} \theta$$

可见合成位移的方向与径向线  $OP$  垂直，也就是沿着切向，而且移动的距离等于径向距离  $r$  乘以  $\omega_z$ ，可见  $\omega_z$  代表弹性体绕  $z$  轴的刚体转动。

为了完全确定平面问题弹性体的位移，必须有三个适当的约束条件来确定这三个刚体位移。

#### 四、物理方程

所谓物理方程就是材料力学中的虎克定律。单向应力状态时，

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

式中  $E$  是拉压弹性模量， $G$  是剪切弹性模量。

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

式中  $\mu$  是泊桑比。

在平面应力状态下，

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (8-5-5)$$

这里的正应变  $\varepsilon_x$  公式，较单向应力的相应公式增加了一项  $-\mu\sigma_y$ ，这项是考虑  $y$  向应力对  $x$  向正应变的影响。同样的理由，在  $\varepsilon_y$  公式中，也增加了一项  $-\mu\sigma_x$ 。

物理方程 (8-5-5) 的矩阵表示为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

如果用应变分量表示应力分量，物理方程为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (8-5-6)$$

其矩阵表示为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

### 五、虚功方程

在下面讲有限单元法中，要用到虚功方程。因此，在这里介绍一下弹性体的虚功方程。

设有一个受外力作用的平面弹性体，如图 8-26 所示，它在  $i$  点所受的外力沿坐标  $x$ 、 $y$  方向的分量为  $U_i$ 、 $V_i$ ，在  $j$  点所受的外力沿坐标  $x$ 、 $y$  方向的分量为  $U_j$ 、 $V_j$  等，总起来用列阵  $\{F\}$  表示，而由这些外力引起的应力用列阵  $\{\sigma\}$  表示：

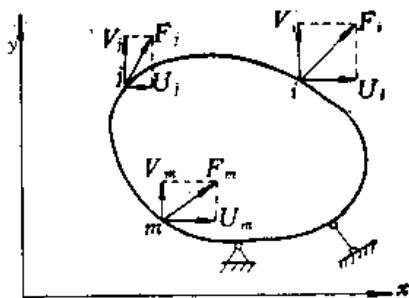


图8-26 平面弹性体受外力作用

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

现在设弹性体发生了某种虚位移，与各外力分量相对应的虚位移分量为  $u_i^*$ 、 $v_i^*$ 、 $u_j^*$ 、 $v_j^*$  等等，总起来用列阵  $\{\delta^*\}$  表示，而引起的虚应变用列阵  $\{\varepsilon^*\}$  表示：

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}$$

这个虚位移和虚应变一般并不是上述实际外力引起的，而是另外的外力或其它原因引起的，或者是为了分析问题，人们假想在弹性体中发生的可能位移。

把虚位移原理应用于弹性体，可以导出这样的引理：如果在虚位移发生之前，弹性体是处在平衡状态，那末，在虚位移发生时，外力在虚位移上的虚功就等于整个弹性体内应力在虚应变上的虚功。

在虚位移发生时，外力在虚位移上的虚功是

$$U_i u_i^* + V_i v_i^* + U_j u_j^* + V_j v_j^* + \dots = \{\delta^*\}^T \{F\}$$

在弹性体的单位体积内，应力在虚应变上的虚功是

$$\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* = \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\}$$

因此，在整个弹性体内，应力在虚应变上的虚功是

$$\iint \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} h dx dy$$

其中  $h$  为板的厚度。于是，由上述引理得

$$\{\delta^*\}^T \{F\} = \iint \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} h dx dy \quad (8-5-7)$$

这就是平面问题的虚功方程。它通过虚位移和虚应变表明外力与应力之间的关系。

应当指出，在虚位移发生时，约束力（支座反力）是不做功的，因为约束力在其所约束的方向是没有位移的。但是，如果解除了某一个约束，而代之以相应的约束力，那末，在虚位移发生时，这个约束力就要在相应的虚位移上做虚功，而这个约束力的分量及其相应的虚位移分量就应当作为列阵  $\{F\}$  及  $\{\delta^*\}$  中的元素进入虚功方程 (8-5-7) 中。

### § 8-4-3 平面应力问题的有限单元法

#### 一、有限单元法的概念

对于许多结构工程问题，不可能获得解析的数学解。对于一些不能得到解析解的较复杂的结构工程问题，人们常常用数值方法给出近似的但在工程上是满意的解答。在数值方法中，解答只能给出物体中一些离散点未知量的近似值。有限单元法就是一种数值方法。这种方法是在大约 50 年代初期发展起来的，首先应用这种方法解决一些航空结构计算问题，随着电子计算机的发展，有限单元法已广泛地应用在解决各种工程结构问题中，甚至已用在解决流体力学等问题中。

在结构分析中，主要是要求出结构在外力作用下产生的应力及位移，而应力和位移在整个结构中的分布情况一般是比较复杂的。然而，如果把结构分成许多小部分，那末在每一个小部分上，应力和位移的分布就比较简单了。这就象一条复杂的平面曲线，在比较大的区间内是不能用一个简单的函数关系来表示的，但如果把它分成许多小段，每个小段就

可近似认为是一段直线，用简单的线性函数来表示它。有限单元法的基本思想就在于此：它把一个物体或结构假想用一些线或面分割成许多小部分，即所谓单元。假定各单元之间是用节点（分割线的交点）联接起来，用这些离散的由节点联接起来的单元整体作为原物体或结构的等价物。由于每个小单元的应力和位移关系比较简单，我们就可以通过对单元的研究，得到简单的公式，然后结合起来，就可以得到整个物体或结构的解答。所以，这种方法是从局部到总体解决问题的方法，是把一个复杂的整体问题化成简单的局部问题来研究的一种方法。这种方法虽然分析过程简化了，但要处理的数据总量可能是很多的。这样，用人工来完成处理数据工作就比较困难，通常需要用电子计算机来完成这项工作。这就是为什么说有限单元法是电子计算机发展的产物的原因。

有限单元法一般可分成三种，即位移法、力法和混合法。它们之间的区别主要是所取的基本未知数不同，位移法是以位移作为未知数，力法是以应力作为未知数，而混合法是以某些位移和某些应力作为未知数。在这里主要介绍常用的位移法作为学习有限单元法的入门。

位移法的大致思路是这样：首先将被分析的物体或结构分成有限个单元，其次选择用节点的位移表示的单元的位移函数。进一步通过节点平衡条件建立起一组以节点位移为未知数的线性代数方程组，解此方程组就可求出各单元的节点位移。最后，将求得的节点位移代入单元的位移函数中，即可算出各单元的位移，然后，利用几何关系式就可求得各单元的应变，再由物理方程就可求出各单元的应力。这样，问题就可以完全获得解决。

## 二、解平面问题的有限单元法中单元的分割及基本公式的推导

### (一) 有限单元的分割

将一个薄平板分割成有限个互不重叠的单元，单元形状通常取为三角形。把每个单元都看成是等厚度的各向同性的弹性薄板。如图 8-27 所示。当边界是曲线时，在每一小段上用相应的直线近似代替曲线而作为三角形单元的一个边。

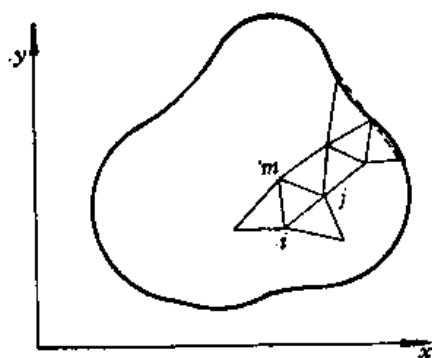


图8-27 薄平板分成有限的单元

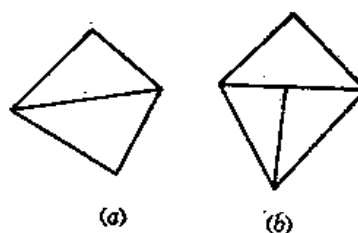


图8-28 单元的分割

(a) 正确的单元分割；(b) 不正确的单元分割。

在进行三角形单元的分割时，要注意任一三角形的顶点必须也同时是其相邻三角形的顶点，而不能是其相邻三角形单元的边的内点，如图 8-28(a)是正确的，而图 8-28(b)是不正确的。

为了减少计算误差，理论上和实践上都可以证明，应当使三角形的三个顶角大小相差不太大，如图 8-29(a)较好，而不应采用图 8-29(b)。

为保证计算的精度，并适当地节省计算工作量，在事先估计应力较集中、应力梯度较大的地方，单元的分割要尽量细一些，而在应力梯度较小的地方，单元可以取得大一些。为了使三角形的顶角不致相差太大，单元由小到大必须逐渐过渡。

如此划分单元后，要将所有的三角形单元及所有节点按一定顺序编号，以便于进行计算和讨论。

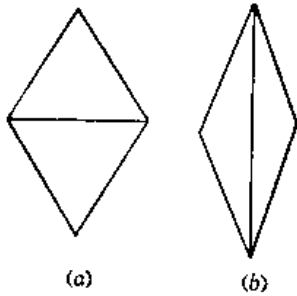


图8-29 单元的分割

(a) 好的单元分割；(b) 不好的单元分割。

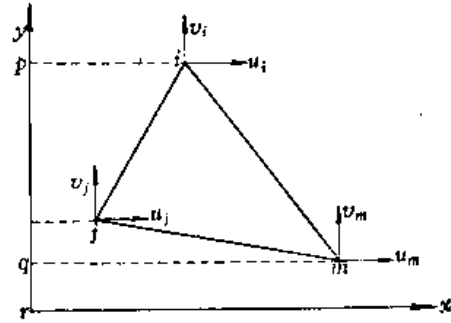


图8-30 单元节点位移

## (二) 单元的位移函数

上面已经把平面薄板分成有限个单元，假设各单元是由节点联接在一起，这样，就把一个连续的平板理想化为由许多节点联接在一起的三角形单元组成体。

下面选择某个单元  $e$  的位移函数。在平面应力状态下，只要考查  $x$ 、 $y$  方向的位移  $u$ 、 $v$ ，如图 8-30 所示。设三个节点的位移分别为

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_m\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

并记为

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$\{\delta\}$  表示单元  $e$  上的节点位移。

设单元  $e$  上的位移是  $x$ 、 $y$  的线性函数（当然，实际上单元  $e$  的位移函数不一定是  $x$ 、 $y$  的线性函数，这只是近似假设的，当单元取的越小，近似性将越好，这就象一条平面曲线，当把它分成许多小段后，每一小段可看成直线一样），即设

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \quad (8-5-8)$$

其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  是待定常数，它们可由三个节点上的六个位移分量来确定。为此，将

节点的坐标及节点位移分量代入 (8-5-8) 式, 得

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned}$$

解此线性方程组, 得

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \end{cases} \quad (8-5-9)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, & a_j &= x_m y_i - x_i y_m, & a_m &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_m, & b_j &= y_m - y_i, & b_m &= y_i - y_j \\ c_i &= x_m - x_j, & c_j &= x_i - x_m, & c_m &= x_j - x_i \end{aligned}$$

而

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) \quad (8-5-10)$$

由图 8-30 可见, 三角形  $ijm$  的面积等于梯形  $mi pr$  面积减去梯形  $ij qp$  面积, 再减去梯形  $mj qr$  的面积, 即

$$\begin{aligned} & \frac{x_i + x_m}{2} (y_i - y_m) - \frac{x_i + x_j}{2} (y_i - y_j) - \frac{x_j + x_m}{2} (y_j - y_m) \\ &= \frac{1}{2} (x_j y_m + x_m y_i + x_i y_j - x_m y_j - x_i y_m - x_j y_i) \end{aligned}$$

另一方面, 将 (8-5-10) 式的行列式展开, 也可得相同的结果。于是可知, (8-5-10) 式所示的  $\Delta$  是三角形  $ijm$  的面积。同时, 显然可见, 为了得出的面积  $\Delta$  不致成负值, 节点  $i$ 、 $j$ 、 $m$  的次序须是逆时针方向转向, 如图 8-30 所示。于是将 (8-5-9) 式代入 (8-5-8) 式中, 经整理可得位移分量  $u$  的位移函数

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \quad (8-5-11)$$

同样可得

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m] \quad (8-5-12)$$

由上二式可知, 单元内部各点位移分量是由节点位移分量来决定或定义的。

因为用有限单元法的位移法计算应力和位移都是根据位移函数计算的, 因此, 位移函数假设的是否合理, 将直接影响有限单元法解答的正确性, 为了能够由有限单元法得出正确的解答, 位移函数应满足下列三个条件。

第一, 位移函数必须能反映单元的刚体位移。每个单元的位移一般总是包含着两部分,

一部分是由于本单元形变引起的，另一部分是与本单元的形变无关的，即刚体位移，它是由于其它单元发生形变而连带引起的。因此，为了正确反映单元的位移形态，位移函数必须能反映该单元的刚体位移。

第二，位移函数必须能反映单元的常应变。当单元尺寸无限缩小时，单元应变将趋近于常量，因此，单元位移函数中应包括常应变项。

第三，位移函数应当尽可能反映位移的连续性。在连续弹性体中，位移是连续的，不会发生两相邻部分互相脱离或互相侵入的现象。为了使得相邻单元的位移保持连续，就要使它们公共节点处具有相同的位移值时，也能在公共的边界上具有相同的位移。

理论和实践均已证明，为了使有限单元法的解答在单元尺寸逐渐取小时，能够收敛于正确的解答，在位移函数中，反映刚体位移和常量应变是必要条件；加上反映相邻单元的位移连续性，就是充分条件。

现在来说明式 (8-5-8) 所表示的位移函数是反映了单元的刚体位移和常量应变的要求。为此，把 (8-5-8) 改写成

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} y + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_6 y + \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} x + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} x$$

与式 (8-5-4) 对比可见

$$u_0 = \alpha_1, \quad v_0 = \alpha_4, \quad \omega_z = \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2}$$

它们反映了刚体移动和刚体转动。另一方面将式 (8-5-8) 代入几何方程 (8-5-3) 中，可见

$$\varepsilon_x = \alpha_2, \quad \varepsilon_y = \alpha_6, \quad \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5$$

它们反映了常量的正应变和剪应变。总之，六个参数  $\alpha_1$  到  $\alpha_6$ ，反映了三个刚体位移和三个常量应变。

现在来说明，式 (8-5-8) 所示的位移函数也反映了相邻单元之间位移的连续性。任意两个相邻单元，如图 8-31 中的  $ijm$  和  $ipj$ ，它们在  $i$  点的位移相同（都是  $u_i$  和  $v_i$ ），在  $j$  点的位移也相同（都是  $u_j$  和  $v_j$ ）。由于式 (8-5-8) 所示的位移函数在每个单元中都是坐标的线性函数，在公共边界  $ij$  上当然也是线性变化，所以上述两个相邻单元在  $ij$  上的任意一点都具有相同的位移，这就保证了相邻两单元之间位移的连续性。

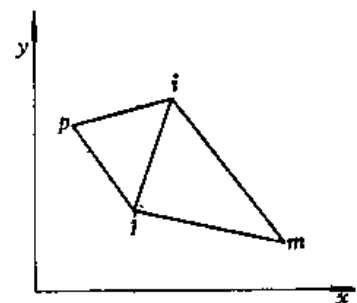


图8-31 两个相邻单元及其共同边界

### (三) 单元的应变与节点位移关系式、应变矩阵

有了位移函数，就可以利用几何方程求出单元的应变与节点位移之间的关系式。

平面应力状态下的几何方程 (8-5-3) 的矩阵表示为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

将位移函数 (8-5-11) 式和 (8-5-12) 式代入上式中得

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

或简写成

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (8-5-13)$$

式中

$$[B] = [B_i | B_j | B_m] \quad (8-5-14)$$

而

$$[B_i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad (i, j, m)$$

(8-5-13) 式即是单元应变与节点位移关系式。式中矩阵  $[B]$  称为应变矩阵, 它的各元素可由节点坐标值来确定, 所以这些元素都是常量。由 (8-5-13) 式可进一步看出, 单元应变也都是常量, 即单元内各点的应变皆相同。

(四) 单元的应力与节点位移关系式、应力矩阵

前面已导出平面应力问题的物理方程 (8-5-6), 其矩阵表达式为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

简写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (8-5-15)$$

其中

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (8-5-16)$$

$[D]$  称为弹性矩阵, 它取决于单元材料的弹性模量  $E$  和泊桑比  $\mu$ , 有了  $[D]$  便可由应变分



量 $\{\varepsilon\}$ 决定应力分量。将(8-5-13)式代入(8-5-15)式中,可以得到单元的应力与节点位移关系式

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\} = [S]\{\delta\} \quad (8-5-17)$$

式中 $[S]$ 称为应力矩阵,它是弹性矩阵 $[D]$ 与应变矩阵 $[B]$ 的乘积,即

$$[S] = [D][B]$$

将(8-5-16)及(8-5-14)式代入上式中,则

$$[S] = \frac{E}{2\Delta(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i & b_j & \mu c_j & b_m & \mu c_m \\ \mu b_i & c_i & \mu b_j & c_j & \mu b_m & c_m \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i & \frac{1-\mu}{2} c_j & \frac{1-\mu}{2} b_j & \frac{1-\mu}{2} c_m & \frac{1-\mu}{2} b_m \end{bmatrix}$$

上式可简写成

$$[S] = [S_i | S_j | S_m] \quad (8-5-18)$$

式中

$$[S_i] = \frac{E}{2\Delta(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix}, \quad (i, j, m)$$

由(8-5-18)式可知,由于应力矩阵 $[S]$ 是由单元的节点坐标决定的,因此,在每一个单元中,应力量同应变分量一样也是常量。

(五) 单元的节点力与节点位移关系式, 单元刚度矩阵

前面已经讲过,有限单元法是把连续的对象或结构理想化为由许多单元组成的离散体,单元之间仅靠节点互相联接。除此之外,有限单元法还把单元上所受的力都用静力等效原则移到节点上,这也是造成有限单元法的近似性的原因之一。把节点对单元的作用力叫节点力,图8-32中示出三个节点上节点力沿 $x$ 、 $y$ 方向的分量。可以把某单元 $e$ 上的节点力用矩阵表示

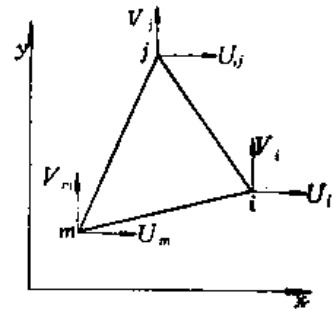


图8-32 节点力

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \dots \\ U_j \\ V_j \\ \dots \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} \quad (8-5-19)$$

可以利用前面导出的虚功方程来建立每个单元的节点力与节点位移的关系式。

假定单元 $e$ 节点上发生的虚位移为

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \\ \delta_m^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ u_m^* \\ v_m^* \end{Bmatrix} \quad (8-5-20)$$

由此虚位移所引起的单元  $e$  的虚应变  $\{\varepsilon^*\}$ ，由 (8-5-13) 式可得

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} = [B] \{\delta^*\} \quad (8-5-21)$$

因为单元上的外载荷均已假定移置到节点上，所以单元  $e$  上所受的外力只是节点力  $\{F\}$ ，于是，单元  $e$  的外力虚功为

$$\{\delta^*\}^T \{F\}$$

而内力虚功为

$$\iint \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} h dx dy$$

式中  $h$  为板的厚度。根据虚功方程，单元  $e$  与外力虚功应等于内力虚功，即

$$\{\delta^*\}^T \{F\} = \iint \{\delta^*\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} h dx dy$$

因为  $\{\delta\}$  与  $\{\delta^*\}$  都只与单元节点坐标有关，而与  $x$ 、 $y$  无关，所以上式可化为

$$\{F\} = [K]^e \{\delta\} \quad (8-5-22)$$

即

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} = [K]^e \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

式中

$$[K]^e = \iint [B]^T [D] [B] h dx dy \quad (8-5-23)$$

$[K]^e$  称为单元  $e$  的刚度矩阵，它的元素表示该单元的各节点沿坐标方向发生单位位移时引起的节点力。

由于  $[D]$  和  $h$  对一个单元而言是常量，而在选取线性位移函数的情况下， $[B]$  也是常量，因此，(8-5-23) 式可写成

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] h \iint dx dy = [B]^T [D] [B] h \Delta$$

将 (8-5-14) 及 (8-5-18) 式代入上式中可得

$$[K]^e = h\Delta \begin{Bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{Bmatrix} [S_i \mid S_j \mid S_m] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

其中

$$[K_{rs}] = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)\Delta} \begin{bmatrix} b_r b_r + \frac{1-\mu}{2} c_r c_r & \mu b_r c_r + \frac{1-\mu}{2} c_r b_r \\ \mu c_r b_r + \frac{1-\mu}{2} b_r c_r & c_r c_r + \frac{1-\mu}{2} b_r b_r \end{bmatrix}$$

$$r = i, j, m, \quad s = i, j, m \quad (8-5-24)$$

子矩阵  $[K_{rs}]$  为  $2 \times 2$  阶, 它不是对称矩阵, 只是在  $r = s$  时才是对称矩阵。而由这些子矩阵组成的  $[K]^e$ ——单元刚度矩阵是  $6 \times 6$  阶的对称矩阵, 阶数表示单元所有节点的自由度数目。

#### (六) 以节点位移为未知数的线性代数方程组的建立

可以利用节点的平衡条件建立起以节点位移为未知数的线性代数方程组。

因为在离散化的结构中, 一个节点可能是几个单元的公共节点, 因此, 节点的平衡条件是: 有关单元在公共节点上的节点力之和等于作用在该节点上的外载荷。以节点  $i$  为例, 平衡条件为

$$\sum U_i = X_i$$

$$\sum V_i = Y_i$$

其中  $X_i$ 、 $Y_i$  为节点  $i$  上的外载荷在  $x$ 、 $y$  方向的分量, 其中  $\sum$  表示对于以  $i$  为公共节点的单元求和。以图 8-33 为例,  $\sum U_i$  及  $\sum V_i$  应为 (1)、(2)、(3)、(4) 四个单元在公共节点  $i$  上的节点力分量之和, 即

$$\sum U_i = U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + U_i^{(3)} + U_i^{(4)}$$

$$\sum V_i = V_i^{(1)} + V_i^{(2)} + V_i^{(3)} + V_i^{(4)}$$

如果被离散后的结构中有  $n$  个节点, 那么就有  $2n$  个节点平衡方程

$$\begin{cases} \sum U_1 = X_1 \\ \sum V_1 = Y_1 \\ \sum U_2 = X_2 \\ \sum V_2 = Y_2 \\ \vdots \\ \sum U_n = X_n \\ \sum V_n = Y_n \end{cases}$$

写成矩阵形式

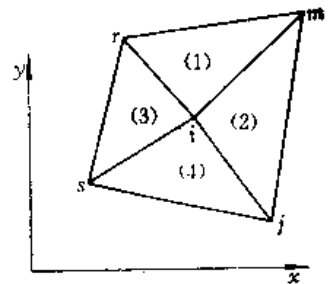


图8-33 各单元的公共节点

$$\begin{Bmatrix} \Sigma U_1 \\ \Sigma V_1 \\ \Sigma U_2 \\ \Sigma V_2 \\ \vdots \\ \Sigma U_n \\ \Sigma V_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{Bmatrix}$$

根据前面所述，节点力均可用节点位移表示，这样，就得到 $2n$ 个以节点位移为未知数的线性代数方程组。解此方程组即可求出所有节点位移。将已求出的节点位移代入应力及应变与节点位移的关系式中，即可求得各单元的应力与应变。由于一般结构离散化后，要有成百上千个节点，这样，以节点位移为未知数的这个线性代数方程组就相当大，只能用电子计算机才能计算，这就是有限单元法的发展与电子计算机的发展密切相关的原因。

### 三、解题步骤和实例

应用有限单元法解平面应力问题的具体步骤归纳如下：

(一) 将平面应力问题的弹性体划分成许多三角形单元，任选一个直角坐标系（通常取 $x$ 轴向右为正， $y$ 轴向上为正），定出所有节点的坐标值。

(二) 根据节点的坐标值，用公式(8-5-10)算出各单元的面积 $\Delta$ ，用相应的公式求出每个单元的 $a_i, b_j, c_i, a_j, b_m, c_m$ 的数值。再由这些数值及弹性常数 $E$ 及 $\mu$ 算出各单元的刚度矩阵 $[K]^e$ 中的各元素。

(三) 按照公式 $\{F\} = [K]^e \{\delta\}$ 将各单元节点力用节点位移表示。

(四) 将各单元所荷载荷按静力等效原则移置到节点上。

(五) 写出各可动节点的平衡方程，即以节点位移为未知数的线性代数方程组。

(六) 解上述线性代数方程组，求出节点位移。

(七) 将已求得的节点位移代入各单元的位移函数及应力与节点位移的关系式中，求出各单元的位移及应力。

下面举一个用手算的简例，以便说明上述步骤。

**例题8-6** 厚度为 $h$ 的悬臂深梁，如图8-34(a)所示，在悬臂端部受均布力 $q$ 的作用，求该悬臂梁的应力。

取 $\mu = 0.3$ 。

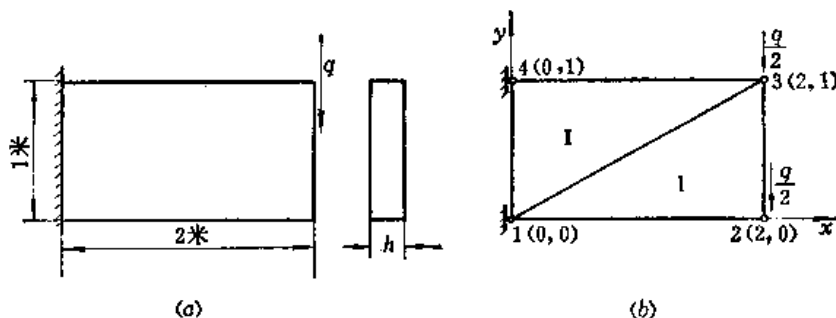


图8-34 例题8-6的悬臂深梁

(a) 悬臂深梁的尺寸及荷载；(b) 划分为两个单元。

解 第一, 选定坐标系。为简便起见, 将梁划分为两个单元, 即单元 I 和单元 II。节点编号和节点坐标见图 8-34(b)。

第二, 将均布外载  $q$  移置到节点上,

$$V_2 = V_3 = -\frac{q}{2} \quad (\text{见图 8-34(b)})$$

第三, 计算各单元的刚度矩阵

计算刚度矩阵时, 考虑到边界条件: 节点 1 和 4 是固定的, 故

$$u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$$

因此, 矩阵  $[K]^e$  的阶数可以降低如下:

单元 I (节点 1、2、3) 的节点力与节点位移关系式为

$$\begin{Bmatrix} U_1^I \\ V_1^I \\ \dots \\ U_2^I \\ V_2^I \\ U_3^I \\ V_3^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^I & K_{12}^I & K_{13}^I \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{21}^I & K_{22}^I & K_{23}^I \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{31}^I & K_{32}^I & K_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \dots \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

其中  $K_{ij}^I$  是  $2 \times 2$  阶子矩阵。将上面矩阵用虚线分块, 然后相乘可得

$$\begin{Bmatrix} U_2^I \\ V_2^I \\ U_3^I \\ V_3^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^I & K_{23}^I \\ K_{32}^I & K_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1^I \\ V_1^I \end{Bmatrix} = [K_{12}^I \quad K_{13}^I] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

因为在后面列节点平衡方程时, 只列出可动点的方程, 这样, 节点 1 的节点力  $U_1^I$ 、 $V_1^I$  就不出现在节点平衡方程中。所以, 对于单元 I 的单元刚度矩阵  $[K]^I$  只要算出右下方与节点 2 及节点 3 有关的 4 个  $2 \times 2$  阶子矩阵即可, 也就是

$$[K]^I = \begin{bmatrix} K_{22}^I & K_{23}^I \\ K_{32}^I & K_{33}^I \end{bmatrix}$$

单元 II (节点 4、1、3) 的节点力与节点位移关系

$$\begin{Bmatrix} U_4^II \\ V_4^II \\ U_1^II \\ V_1^II \\ \dots \\ U_3^II \\ V_3^II \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44}^II & K_{41}^II & K_{43}^II \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{14}^II & K_{11}^II & K_{13}^II \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{34}^II & K_{31}^II & K_{33}^II \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \dots \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

将上述矩用虚线分块，然后相乘可得

$$\begin{Bmatrix} U_3^I \\ V_3^I \end{Bmatrix} = [K_{33}^I] \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_4^I \\ V_4^I \\ U_1^I \\ V_1^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43}^I \\ K_{13}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

根据与单元 I 的同样理由，对于单元 II 的刚度矩阵，只须算出与节点 3 有关的一个  $2 \times 2$  阶子矩阵  $[K_{33}^I]$  即可，即

$$[K]^I = [K_{33}^I]$$

现在分别计算单元 I 的刚度矩阵  $[K]^I$  及单元 II 的刚度矩阵  $[K]^I$ 。

单元 I (节点 1、2、3) 节点坐标是 1(0, 0), 2(2, 0), 3(2, 1)

$$b_1 = y_2 - y_3 = 0 - 1 = -1, \quad c_1 = -x_2 + x_3 = -2 + 2 = 0$$

$$b_2 = 1 - 0 = 1, \quad c_2 = -2 + 0 = -2$$

$$b_3 = 0 - 0 = 0, \quad c_3 = -0 + 2 = 2$$

按 (8-5-24) 式，并以  $\Delta = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ ,  $\mu = -\frac{1}{3}$  代入，得

$$\begin{aligned} K_{22}^I &= \frac{Eh}{4(1-\mu^2)} \Delta \begin{bmatrix} b_3^2 + \frac{1-\mu}{2} c_3^2 & \mu b_2 c_2 + \frac{1-\mu}{2} c_2 b_2 \\ \mu c_2 b_2 + \frac{1-\mu}{2} b_2 c_2 & c_2^2 + \frac{1-\mu}{2} b_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}(-2) + \frac{1}{3}(-2) \\ \frac{1}{3}(-2) + \frac{1}{3}(-2) & 4 + \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同理可得

$$K_{23}^I = K_{32}^I = \frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -4 \end{bmatrix}$$

$$K_{33}^I = \frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

故单元 I 的刚度矩阵

$$[K]^I = \begin{bmatrix} K_{22}^I & K_{23}^I \\ K_{32}^I & K_{33}^I \end{bmatrix} = \frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & & & \\ & \frac{13}{3} & & \\ & & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ & & & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{对} \\ \\ \text{称} \end{matrix}$$

单元 II 节点(4, 3, 1)的坐标是 4(0, 1), 1(0, 0), 3(2, 1) 求得单元 II 的刚度矩阵

$$[K]^I = [K_{33}^I] = \frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

第四, 建立节点 2 和 3 的平衡方程

$$\begin{Bmatrix} U_2^I \\ V_2^I \\ U_3^I \\ V_3^I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_2^I=0 \\ V_2^I=0 \\ U_3^I \\ V_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{q}{2} \\ 0 \\ -\frac{q}{2} \end{Bmatrix}$$

以节点位移表示

$$[K]^I \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} + [K]^I \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{q}{2} \\ 0 \\ -\frac{q}{2} \end{Bmatrix}$$

由于节点 2 不在第二单元, 所以  $[K]^I$  中用零补足  $4 \times 4$  阶矩阵, 可得

$$\frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & & & \\ & \frac{13}{3} & & \\ & & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ & & & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \frac{9Eh}{32} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{q}{2} \\ 0 \\ -\frac{q}{2} \end{Bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & 2 & -12 \\ -4 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & -12 & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{16q}{3Eh} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

解此式可得

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{q}{Eh} \begin{Bmatrix} -1.88 \\ -9.0 \\ 1.5 \\ -8.5 \end{Bmatrix}$$

第五, 求应力

首先按 (8-5-18) 式算出应力矩阵中的子矩阵, 然后再组成单元应力矩阵, 而子矩阵中系数为

$$\frac{E}{2(1-\mu^2)\Delta} = \frac{9E}{16}$$

单元 I

$$\begin{aligned} [S_1]^I &= \frac{E}{2\Delta(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} b_1 & \mu c_1 \\ \mu b_1 & c_1 \\ \frac{1-\mu}{2}c_1 & \frac{1-\mu}{2}b_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{9E}{16} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[S_2]^I = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S_3]^I = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$[S]^I = [S_1^I \ S_2^I \ S_3^I] = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

因为  $u_1 = v_1 = 0$ , 所以由公式 (8-5-17) 可得



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^I = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

把已求得节点位移代入得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^I = \frac{q}{h} \begin{Bmatrix} -0.87 \\ 0.21 \\ -0.42 \end{Bmatrix}$$

单元 II

同样可得

$$[S_1]^I = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S_3]^I = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S_4]^I = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[S]^I = \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4=0 \\ v_4=0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{3E}{16} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^I = \frac{3E}{16} \cdot \frac{q}{Eh} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.5 \\ -8.5 \end{Bmatrix} = \frac{q}{h} \begin{Bmatrix} 0.844 \\ 0.281 \\ -1.59 \end{Bmatrix}$$

此例为了便于计算，只分割两个单元，结果不够准确；如果单元分的多些，结果将更趋准确。

## 第九章 总结及展望

### 一、关于导弹的设计、研制总过程

导弹是一个复杂的技术系统，要完整地设计和研制一个导弹，需要涉及多方面的技术部门和专业学科，其广度和深度远超出本书所能包容的范围和程度。为了把众多的技术部门的工作协调起来，需要有总体设计部门。

在导弹的设计过程中，在每个技术部门的内部都要处理和形成大量的技术资料(信息)——数据、图纸和说明书。并且，各个部门之间必须协调彼此的工作，为此需要进行信息的交流。从这一方面来说，整个导弹的设计过程乃是一个信息的传递和转换的复杂过程。

如果把导弹的设计部门整体地看做是一个系统，把关于新导弹的设计任务指标(战术技术要求)做为主要的信息输入于这个系统，那么，这些信息就要在这个系统内部运行、处理，最后则转化为新式导弹的设计说明书、图纸和其他技术资料等信息而输出。按照本书分析阐述的程序，这个信息运动的总过程可以用图9-1的结构图来表示<sup>●</sup>。图中的实线表示正向的数据传输；虚线表示反馈，即表示对于前面设计步骤的修改及细致化。当导弹各部分的设计都已经协调完善之时，反馈信息即不再起作用，设计就完成了。

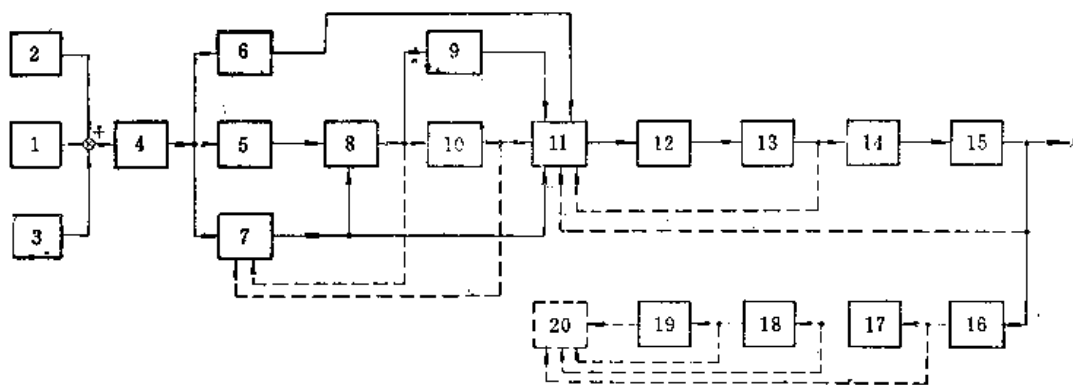


图9-1 导弹的设计过程

1—战术技术要求；2—预研成果；3—现代科学技术一般成果；4—确定总体方案；初步确定各部件的性能指标及重量、尺寸；5—确定导弹的速度图及需用过载；6—战斗部的设计及试验；7—制导系统的设计及试验；8—确定发动机推力及工作时间；9—发动机的设计及试验；10—确定舵控力（在采用燃气流提供舵控力的情况下）；11—绘制总体布局草图；12—计算导弹的重量、重心及转动惯量；13—弹体外形设计；14—弹体载荷分析及强度计算；15—弹体结构（细节）设计；16—地面试验（风洞试验、强度实验等）；17—弹道验算，全系统的综合分析验算；18—全系统地面联合试验及计算机仿真飞行；19—飞行试验；20—修改设计。

在设计过程的开始阶段——概念设计或方案论证阶段，在设计系统中处理并形成的信息或数据量是较少的。但是，随着设计过程的发展，所形成的信息或数据愈来愈多，各部分之间的信息交流情况也愈来愈错综复杂，最后形成的信息总量是很大的。

● 在设计任务有所不同的情况下，设计过程也可能有所不同。

以上只是就设计过程来说，如果从导弹系统的整个研制过程来说，还必须考虑到上级管理部门和生产制造部门的作用。

在导弹设计完成之后，技术资料要移交给生产制造部门。其实，在设计工作进行过程中，生产制造部门就要提前获知设计情况，以便进行生产准备工作，并对设计的工艺性提出意见和建议。在导弹的设计过程中，上级管理部门还要经常对设计工作进行查询和评审，有时还要对设计的任务指标进行修改。这些过程在本质上仍然是信息的交流过程，如图9-2所示。

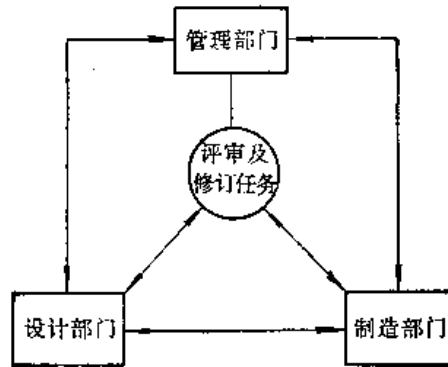


图9-2 导弹研制过程中的信息交流

若能把导弹的设计和研制过程抽象为一个信息的传输和处理过程，并把其中每个环节的数学模型描述出来，这一过程就有可能利用计算机来自动完成。但是，完全自动是不可能的。因为在设计过程中有许多环节不可能通过千篇一律机械计算来完成，而只能依靠设计师的高度创造才能，例如，提出设计方案等等。然而，无论如何，在导弹在设计研制过程中尽可能地利用计算机，是必然的发展趋势。

## 二、计算技术在导弹设计研制工作中的作用和地位

计算技术在导弹的设计工作中的应用是经历着一个由低级到高级的发展过程的。

在计算技术发展的初期，人们只是在设计工作的个别步骤上利用计算机来完成复杂的运算。例如，进行弹道验算、强度校核、重量计算……等等。计算技术的这些初期应用已经为导弹的设计工作解决了许多难题。

后来，又发展到利用计算机对导弹系统中的元件、组件、部件以至分系统进行优化设计。此外，还发展了利用计算机对导弹系统的飞行运动全过程进行仿真（Simulation）的技术。这两项发展对于提高设计质量、加快设计进度和减少研制费用等方面的效果尤其显著。

近来，随着计算机科学的发展、计算机的运算速度和存储量的大幅度提高以及各种外围设备的发展，计算技术在宇航和导弹系统的设计工作中的应用又面临着一个飞跃。即出现了所谓“一体化设计系统”。这种系统，把数十条以至上百条的设计计算程序联合在一起，并且把分散在各个协作企业、部门的计算机分系统联系在一起，以求实现导弹设计过程的高度自动化。

在导弹的一体化设计系统中，各个分系统拥有单独的计算机，来进行导弹系统各别部件的设计，它们的计算程序是根据各别部件的设计特点和数学模型而分别编制的。各分系

统还具有自己的输入、输出终端及数据库,并且同导弹总体设计部门的中心数据库相联系。导弹总体设计部门的计算机系统对各分系统发来的信息进行处理和存贮,并把它们及时地分配给需要这些信息的其它分系统。由于在导弹系统的各部件、组件、零件之间有千丝万缕的联系,必须保证一切数据的相容性,所以,中心计算机系统要经常对各数据库的全部数据进行协调。在一体化的计算机辅助设计系统中,还拥有各种输入、输出设备,以保证设计师们能够方便地修改设计,以及把设计结果制成技术文件和技术图纸<sup>●</sup>。

导弹的一体化计算机辅助设计系统具有很多优点,例如,可以提高设计质量,可以加快设计进度,还可以减少设计工作中的耗费。然而,最主要的优点,就是可以充分发挥设计人员的创造才能。因为,把设计师们从复杂冗长的数据计算、数据处理、制图等工作中解放出来,使他们能把精力集中于需要高度发挥创造才能的工作上,例如,提出新的设计构思和设计方案,改进设计方法和设计程序等等。过去,每提出一个新的设计构思和新的方案,都需进行大量的计算工作和试探性的设计工作和试验工作,才能确定这一方案是否可行。因此,只有少数的方案能争取到试一试的机会。但是,利用一体化设计系统的速度优势,设计师就有可能探索多种设计构思和设计方案的可行性。把方案的确定建立在广泛探索和深入研究、分析比较的基础之上。利用计算机模拟和仿真技术,可以大大减少昂贵费时的实弹飞行试验,在设计初期就对方案做出逼近真实的评价。

计算机不能提出设计构思和设计方案,但是计算机可以帮助有创造性的设计师们迅速地检查自己的设计构思和设计方案的可行性和优缺点,并且协助他把最好的方案完整地设计出来。

因此,未来的导弹设计师们,应该一方面熟悉计算机的使用方法;另一方面,更要深刻地了解导弹系统的运动规律、运动特点以及导弹系统各部分之间的相互关系。这样,他们才能高度地发挥创造才能,提出各种有效可行的设计构思和设计方案;并且有能力把这些方案构成数学模型和计算机程序。只有在这种情况下,他们才能使计算机成为有效的工具,为一定的设计意图而工作。

● 在有些一体化系统中,可以直接利用计算机来控制生产工艺过程,这样,图纸就可能省去。

# 附 录

## 附录一 国外反坦克导弹概况一览表

### 说明:

关于国外反坦克导弹的情况,公开资料很多,但往往说法不一,数据也有互相矛盾之处。下面表中所列是经多方查对后,选取较为可信者。但仍难免错误不实之处,仅供参考。

附录一表中所列情况及数据,皆以1979年底前为止所公开发表的资料为根据。

表中符号:

$x$ ——射程(最小~最大),米;

$v$ ——续航速度(最小~最大),米/秒;

$m_0$ ——导弹初质量,千克;

$m_{战}$ ——导弹战斗部质量,千克;

$t$ ——导弹飞行时间,秒;

$L$ ——导弹全长,米;

$D$ ——导弹直径,米(弹头直径大于弹身直径时,以 $\leq$ 表明);

$l$ ——导弹翼展,米。

国 别	法 国	法 国	法 国	法 国
型 号	SS-10	SS-11	SS-11B <sub>1</sub>	SS-12
战术技术特性	$x = 400 \sim 1600$ $v = 80$ $m_0 = 15$ $m_{战} = 5$ $t = 17$ $L = 0.860$ $D = 0.165$ $l = 0.750$	$x = 500 \sim 3000$ $v = 160$ $m_0 = 30$ $m_{战} = 7.5$ $t = 24$ $L = 1.200$ $D = 0.160$ $l = 0.500$	$x = 350 \sim 3000$ $v = 100 \sim 190$ $m_0 = 29.9$ $m_{战} = 8$ $t = 21$ $L = 1.20$ $D = 0.164$ $l = 0.500$	$x = 800 \sim 6000$ $v \leq 260$ $m_0 = 76$ $m_{战} = 28.4$ $t = 32$ $L = 1.870$ $D \leq 0.210$ $l = 0.65$
制导方式	目视瞄准及跟踪,手动操纵,有线传输指令。空气扰流片控制。低速旋转	目视瞄准及跟踪,手动操纵,有线传输指令。燃气扰流片控制。低速旋转	同SS-11	目视瞄准,红外跟踪,自动操纵,有线传输指令。燃气扰流片控制。
动力装置及发射方式	二级固体发动机。发射架上发射。人携或车载,或直升飞机载运	二级固体发动机。发射架发射。车载或直升飞机载运	二级固体发动机,起飞1.2秒,续航20秒。发射架发射。车载或直升飞机载运	二级固体发动机,起飞1.15秒。发射架发射。飞机或舰艇载,主要用于反舰艇或反坚固工事
备 注	1946年开始研制,1955年研制成功。大量装备并输出。在1956年中东战争中使用过	1957年研制成功。大量装备并输出。在1967年中东战争中使用过	1963年研制成功。大量装备	1958年研制,1962年装备

(续)

国 别	法 国	法 国	法 国	法国与西德
型 号	安塔克 ENTAC	阿尔朋 HARPON	阿克拉 ACRA	米 兰 MILAN
战术技术特性	$x = 400 \sim 2000$ $v = 85$ $m_0 = 12$ $m_{战} = 4$ $t = 24$ $L = 0.82$ $D = 0.15$ $l = 0.37$	$x = 400 \sim 3000$ $v = 100 \sim 190$ $m_0 = 30.4$ $m_{战} = 5.8$ $t = 20 \sim 21$ $L = 1.251$ $D = 0.164$ $l = 0.500$	$x = 25 \sim 3300$ $v = 500$ $m_0 = 26$ (不带药筒) $m_{战} = 7$ $t = 7$ $L = 1.250$ $D = 0.142$	$x = 25 \sim 2000$ $v \leq 200$ $m_0 = 6.65$ $m_{战} = 3$ $t = 12.5$ $L = 0.769$ $D \leq 0.103$ $l = 0.265$
制导方式	同SS-10	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令。 燃气扰流片控制	目视瞄准, 激光驾束制导, 空气尾舵控制	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令。 燃气扰流片控制。 低速旋转 (6转/秒)
动力装置及 发射方式	二级固体发动机。 从包装箱中发射。 人携或吉普车载运	二级固体发动机。 发射架上发射。 车、船或飞机载运	单室双推力固体发动机。 从坦克上的滑膛榴弹 炮中发射, 出口速度 150米/秒	单室双推力固体发动 机; 加速段1.3秒, 推力 268牛, 续航段11秒, 推 力104牛。 从无座力炮式包装管 中发射, 出口速度75 米/秒。 人携
备 注	1954年研制, 1961年 装备	系SS-11B <sub>1</sub> 的改进型。 1971年装备	1962年研制, 1973年 定型。 但未大量生产	1963年研制, 1971年 装备。 大量生产并输出

(续)

国 别	法国与西德	西 德	西 德	瑞 典
型 号	霍特 HOT	柯布拉 (CoBRA 2000)	曼姆巴 MAMBA	班塔姆 BANTAM
战术技术特性	$x = 75 \sim 4000$ $v = 260$ $m_0 = 23$ $m_{战} = 6$ $t = 18.3$ $L = 1.280$ $D \leq 0.136$ $l = 0.310$	$x = 400 \sim 2000$ $v = 85$ $m_0 = 10.3$ $m_{战} = 2.7$ $t = 23.5$ $L = 0.95$ $D = 0.10$ $l = 0.48$	$x = 300 \sim 2000$ $v = 55 \sim 140$ $m_0 = 11.2$ $m_{战} = 2.7$ $t = 17.5$ $L = 0.955$ $D = 0.120$ $l = 0.400$	$x = 230 \sim 2000$ $v = 85 \sim 90$ $m_0 = 7.6$ $m_{战} = 1.4$ $t = 24$ $L = 0.850$ $D = 0.110$ $l = 0.400$
制导方式	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令。 燃气扰流片控制。 低速旋转	目视瞄准及跟踪, 手动操纵, 有线传输指令。 空气扰流片控制。 不旋转	同柯布拉	同柯布拉
动力装置及 发射方式	二级固体发动机, 起 飞0.9秒, 续航17.4秒。 从发射管中发射, 发 射管兼包装筒。 装甲车或直升飞机载 运	二级固体发动机, 起 飞发动机喷口斜向下 方。 利用弹翼支撑于地面 上发射。 人携或吉普车载运	双室双推力固体发动 机 (二室连通共用一个 喷口), 喷口向下倾斜。 弹翼支于地面发射。 人携或吉普车载运	二级固体发动机。 从包装箱中发射。 发射前弹翼折叠, 射 出后弹翼张开。 人携或吉普车载运
备 注	1964年开始研制。 1973年装备	原为瑞士研制 (1946 ~1956); 西德购去后 加以改进。1960年装备 部队	柯布拉的改进型。 1972年部队试用	1956年开始研制, 1962年装备。 并输出于瑞士等国

(续)

国 别	意大利	意大利	日 本	日 本
型 号	蚊 MOSQUITO	鸱 Sparviero	KAM-3 (或译“马特”)	KAM-9 (或译“超马特”)
战术技术特性	$x = 360 \sim 2300$ $v = 90$ $m_0 = 14.1$ $m_{\text{战}} = 4$ $t = 24.5$ $L = 1.120$ $D = 0.120$ $l = 0.600$	$x = 75 \sim 3000$ $v = 280$ $m_0 = 16.5$ $m_{\text{战}} = 4$ $t = 10.5$ $L = 1.38$ $D = 0.13$	$x = 350 \sim 1800$ $v = 85$ $m_0 = 15.7$ $m_{\text{战}} = 3.1$ $t = 23.5$ $L = 1.00$ $D = 0.12$ $l = 0.60$	$x = 3000$ $v \leq 200$ $m_0 = 30$ $m_{\text{战}} = 1.9$  $L = 1.50$ $D = 0.15$ $l = 0.33$
制导方式	同柯布拉	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令	目视瞄准及跟踪, 手动操纵(速度式), 有线传输指令。 空气扰流片控制	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令
动力装置及发射方式	同班塔姆	管式发射, 出口速度 60米/秒	二级固体发动机; 起飞推力800~2000牛, 总冲量1300牛·秒; 续航推力90~190牛, 总冲量2200牛·秒。 发射架发射。 人携或车载	二级固体发动机。  发射管发射
备 注	原为瑞士研制。 意大利购去, 改进后, 装备部队	研制中	1956年开始研制。 1964年装备	1964年开始研制。 1970年试生产。 1976年装备

(续)

国 别	澳大利亚	英 国	英 国	英国与比利时
型 号	马尔卡拉 Malkara	威基兰特 VIGILANT	斯文费厄 SWINGFIRE	阿特拉斯 ATLAS
战术技术性能	$x = 1800 \sim 3200$ $v = 150$ $m_0 = 90.7$ $m_{\text{战}} = 25$  $L = 1.95$ $D = 0.20$ $l = 0.70$	$x = 180 \sim 1600$ $v = 156$ $m_0 = 12$ $m_{\text{战}} = 5$ $t = 12$ $L = 1.070$ $D = 0.114$ $l = 0.280$	$x = 150 \sim 4000$ $v = 185$ $m_0 = 27$ $m_{\text{战}} = 7$ $t = 24.5$ $L = 1.067$ $D = 0.170$ $l = 0.373$	       $L = 1.00$ $D = 0.10$
制导方式	目视瞄准并跟踪, 手动操纵, 有线传输指令	目视瞄准及跟踪, 手动操纵(速度式), 有线传输指令。 空气舵控制	目视瞄准及跟踪, 手动操纵(速度式), 有线传输指令。 燃气偏流环控制	激光半主动寻的。在接近目标处, 侧向发动机瞬间工作以修正弹道
动力装置及发射方式	二级固体发动机。  车载发射架发射	单室双推力固体发动机。  从包装箱中发射。 人携或车载	单室双推力固体发动机; 起飞段6秒, 推力1100牛。 从包装箱中发射。 发射前弹翼折叠。 车载	无座力炮发射, 在1000米内可直接瞄准射击。 在全弹道上波动飞行
备 注	1951年研制。 1958年售给英国	1956年研制。 1963年装备	1958年研制。 1969年装备。 输出比利时、埃及等国	1970年曾在展览会上展出样机。 后不详

(续)

国 别	美 国	美 国	美 国	美 国
型 号	橡树棍 SHILLELAGH	陶 TOW	龙 "DRAGON"	海尔法 HELLFIRE
战术技术特性	$x = 200 \sim 3000$ $v = 200$ $m_0 = 27$ $m_{\text{战}} = 6.8$  $L = 1.140$ $D = 0.152$ $l = 0.290$	$x = 65 \sim 3000$ $v \leq 350$ $m_0 = 18.5$ $m_{\text{战}} = 3.8$ $f = 15$ $L = 1.16$ $D = 0.153$ $l = 0.446$	$x = 25 \sim 1000$ $v = 80 \sim 110$ $m_0 = 6.3$ $m_{\text{战}} = 2.4$  $L = 0.744$ $D = 0.114$ $l = 0.330$	$x = 8000$ $m_0 = 27$ (?) $m_{\text{战}} = 6.4$  $L = 1.65$ (1.77?) $D = 0.152$ (0.183?) $l = 0.28$
制导方式	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 红外线传输指令。 低速旋转 (4转/秒)	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令。 尾舵控制。 不旋转	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令。 侧推发动机控制。 低速旋转 (4转/秒)	激光半主动寻的。 空气舵控制
动力装置及发射方式	单级固体发动机。 从坦克的加农炮中发射	二级固体发动机。  车载或直升飞机载, 发射管发射	30对侧后方喷气的小固体发动机, 断续工作。 从无座力炮式发射管中发射, 发射管重3.5千克。 单兵携带	单级固体发动机。 直升飞机载运发射
备 注	1959年发展。 1967年装备	1962年研制。 1970年装备。 大量输出	1968年研制。 1974年装备。 大量输出	研制中

(续)

国 别	美 国	美 国	美 国
型 号	铜斑蛇 Copper head	末段制导子导弹 TGSM	SADARM
战术技术特性	$x = 3000 \sim 20000$ $m_0 = 63.5$ $m_{\text{战}} = 22.5$ $m_{\text{炸片}} = 6.4$ $L = 1.372$ $D = 0.152$	$x < 160000$ $m_0 \approx 16$  $L = 0.89$ $D = 0.15$	
制 导 方 式	激光半主动寻的。 尾舵控制	红外或毫米波被动寻的。	毫米波被动寻的。类似于无线电引信的工作原理。当收到目标辐射的能量后, 即引爆自锻破片战斗部
动力装置及发射方式	弹上无发动机。 从152毫米榴弹炮中发射。 按抛射弹道被动飞行	弹上无发动机。 用“兰斯”近程地对地弹道导弹携带多个末段制导子导弹, 发射至目标上空, 散开后自动捕捉并导向目标	弹上无发动机。 从203毫米榴弹炮中发射, 每弹内装三个子导弹, 在目标上空散开, 以等速旋转降落, 自动捕捉并导向目标
备 注	1972年研制 (高级发展阶段)。 1975年进入工程发展阶段	早于1974年前即开始研制, 现仍研制中	研制中



(续)

国 别	苏 联	苏 联	苏 联	苏 联
型 号 <sup>①</sup>	(别名Snapper)	(别名Swatter)	(别名Sagger)	(别名Fagot)
战术技术特性	$x = 500 \sim 2300$ $v = 100$ $m_0 = 20$ $m_{\text{装}} = 5.5$ $L = 1.120$ $D = 0.150$ $I = 0.660$	$x = 500 \sim 2500$ $v = 100$ $m_0 = 25$ $m_{\text{装}} = 5.5$ $L = 1.130$ $D = 0.140$ $I = 0.660$	$x = 500 \sim 3000$ $v \approx 120$ $m_0 = 11.5$ $m_{\text{装}} = 2.6$ $L = 0.860$ $D = 0.120$ $I = 0.392$	$x = 70 \sim 2000$ $v = 150 \sim 200$ $m_0 = 7$ $t = 13$
制导方式	目视瞄准及跟踪, 手动操纵, 有线传输指令。 空气扰流片控制	目视瞄准及跟踪, 手动操纵, 有线传输指令。 空气扰流片控制	目视瞄准及跟踪, 手动操纵, 有线传输指令。 燃气偏流环控制。 低速旋转	目视瞄准, 红外跟踪, 自动操纵, 有线传输指令
动力装置及发射方式	二级固体发动机。 发射架发射。 人携或车载	二级固体发动机。 发射架发射。 车载	二级固体发动机。 发射架发射。 人携或车载	从发射管中发射。 发射管长1.2米, 外径0.134米, 重约5千克。 人携或车载
备 注	1961年检阅展出。 1964年输出	1961年检阅展出。 1964年输出。 在1973年中东战争中 使用过	1965年检阅展出。 后输出。 在1973年中东战争中 大量使用过	1977年检阅展出

① 苏联的某些反坦克导弹其原名未发表, 故此处暂空。

## 附录二 典型反坦克导弹的评介

这里简要地介绍并分析了八种国外的典型的反坦克导弹的构造情况。这些导弹各有特点, 其设计也是成功的。有关于这些导弹的构造及数据, 都是引自 1979 年底以前公布的资料, 可能有不准确之处, 仅供参考。

### 一、柯布拉及曼姆巴反坦克导弹

柯布拉反坦克导弹是西德第一代反坦克导弹。射程为 400~2000 米。平均飞行速度约为 85 米/秒。

导弹由战斗部和弹体组成 (见图 2-12)。

战斗部为锥孔装药聚能破甲战斗部。静破甲 475 毫米。但也可换成破甲杀伤战斗部, 除能破甲 375 毫米之外, 并能杀伤一定范围内的步兵。

弹体直径 100 毫米, 装有四片弹翼, 弹翼后端装有扰流器。弹体上部有提手、曳光管和电池。起飞发动机固定在弹体下部。弹体内装有电气设备、陀螺仪、线管及续航发动机。

导弹采用目视瞄准、目视跟踪、手动操纵、导线传输指令的导引方案。弹体在飞行中不滚转。柯布拉导弹的发射方式是非常独特的。发射时, 射手只需将导弹平置在地上, 以弹翼接触地面支撑起弹身。

起飞发动机的喷管向下与弹轴成 25° 夹角。故起飞点火后, 导弹与地面成 22° 夹角跳跃起飞。

起飞发动机是固体火箭发动机。燃烧时间约 0.6 秒, 使导弹获得 85 米/秒的平均飞行

速度。

续航发动机也是固体火箭发动机，为端面燃烧装药，产生8公斤推力。保持全程的平均速度约为85米/秒。

射手根据导弹偏离瞄准线的偏差情况，移动操纵杆，发出控制指令。这个指令由导线传给弹上接收机，放大之后输送给扰流器。

扰流器由扰流片、电磁铁及扰流器外壳等组成。在指令信号的作用下，电磁铁推动扰流片以6.5赫的平均频率上、下运动。在运动的极端位置上，扰流片从扰流器外壳中伸出约4毫米，破坏了弹翼上的附面层，增大了翼面上的空气动力压力，从而产生了舵上控制力。在零位指令时，由于控制装置产生的是均匀脉冲，扰流片在扰流器上面和下面停留的时间相等。因而产生的法向气动力相对称而保持平衡。对于每一种不同的操纵杆位置，都在控制装置中转换成相应的调宽脉冲，扰流片在扰流器上面或下面停留的时间不同。因而产生与指令相应的平均舵上控制力。扰流片的优点是没有铰链力矩，故操纵简单、灵敏，其缺点是附加阻力大。

曼姆巴反坦克导弹为柯布拉的改型。该弹在整个飞行过程中，从比较小的初速逐渐加速（初速55米/秒，末速140米/秒），因而在近距离范围内，导弹的转弯半径比较小，射手可以更容易地操纵导弹进入瞄准线。所以，导弹的最小有效射程能够缩短100米。并且，续航发动机和起飞发动机采用同一个向下倾斜的喷管，所以在整个续航段上，推力是倾向于把导弹托起来（由于初始段弹道上的速度较低，只靠空气动力不够维持导弹平飞）。

## 二、威基兰特反坦克导弹

威基兰特是英国装备较早的一种单兵携带、有线制导的反坦克导弹。整个武器系统包括装有导弹的弹箱（兼做发射用）、带有光学瞄准具的地面控制器、电源和电缆。

威基兰特导弹头部是锥孔装药破甲战斗部，弹身是圆筒形壳体，壳体内装有二级固体推进剂火箭发动机，圆筒壳体外部装有四个展弦比很小的塑料弹翼，弹翼后缘有空气舵。

弹体内部简略构造情况如图10-1所示。

锥孔装药破甲战斗部及引信装置共重5公斤，可穿透400~500毫米厚的钢甲；当导弹用作其他目的时可换装别种类型的战斗部。

作为弹身主要部分的发动机壳体是由轻合金加工而成。发动机是双推力的，先是起飞装药燃烧，提供高推力；然后是续航装药燃烧提供低推力。

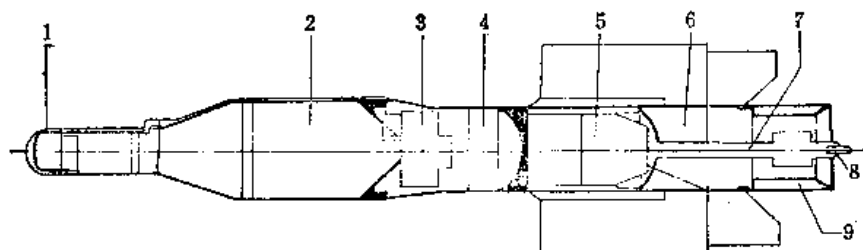


图10-1 威基兰特反坦克导弹

1—头部探示器；2—战斗部；3—引信；4—陀螺仪舱；5—固体燃料火箭发动机；6—舵机舱；  
7—喷管；8—点火装置；9—导线及线管。

燃气通过一个耐高温钢制的排气管排出，排气管末端是镶铂喷嘴。发动机前部安装有制导系统的二个陀螺仪，发动机后部是舵机装置、导线管和曳光组件。发动机点火剂、曳光剂和喷嘴做成一整体，并装有射频滤波器（以防雷电感应）。在完成发射前的各项准备工作后，点火剂即被引燃；起飞发动机工作后以最大加速度驱动导弹飞行；当发动机喷嘴加热后就引燃了喷涂在喷射管后端的镁，从而产生一种耀眼的无烟曳光。

发射导弹时首先是陀螺起动。陀螺的转动是以无烟火药作动力。二个陀螺仪其中一个用来控制导弹的俯仰和滚动，另一个用来控制导弹的偏航。

弹上制导系统的电子元件都装在弹体两侧与弹轴平行的二个条板上，这样与发动机壳体不发生干扰，并便于装配工作。制导系统使用的全是硅晶体三极管，其电路是印刷和密封的，从而每条仪表板可以用螺钉固定在壳体上。

威基兰特导弹虽然是人工操纵的，但其制导系统有一个突出的特点，不同于一般的人工操纵的（第一代的）反坦克导弹。

一般第一代的反坦克导弹的操纵方式是这样的：当射手把控制手柄侧向地搬动一个角度并保持在此角度上的时候，他发出的就是一个侧向的“阶跃”指令；在此指令作用下，导弹将以固定的曲率半径做转弯飞行（或称“盘旋”），其航迹将是一段圆弧；这时，从射手的位置上看来，导弹好像是在以等加速度向侧方运动，所以通称这种操纵方式为“加速度式”。

但是，对于威基兰特导弹说来，操纵方式却是另一种样子：当射手对它发出一个侧向“阶跃”指令的时候，威基兰特导弹将迅速地把飞行方向改变一个角度，并沿着新航向径直飞下去，其航迹将是一段直线；这时，从射手的位置上看来，导弹好像是在以等速向侧方运动；所以可称这种操纵方式为“速度式”。

一般的第一代反坦克导弹的加速度操纵方式是比较难于掌握的，而威基兰特这种速度式的操纵方式就容易掌握得多。

在一般的第一代反坦克导弹的操纵飞行中，如果导弹偏离了瞄准线某一个位置偏差  $\Delta z$ （见图 10-2），那么，射手就必需把手柄搬动四次才能纠正这个偏差：射手应先把手柄朝着瞄准线的方向搬动一个角度  $\lambda$ ，于是导弹就按指令以某个曲率半径  $R$  朝向瞄准线方向转弯， $\frac{1}{R} \propto \lambda$ ，在盘旋过程中，导弹逐渐地、连续地改变着自己的飞行方向；经过一

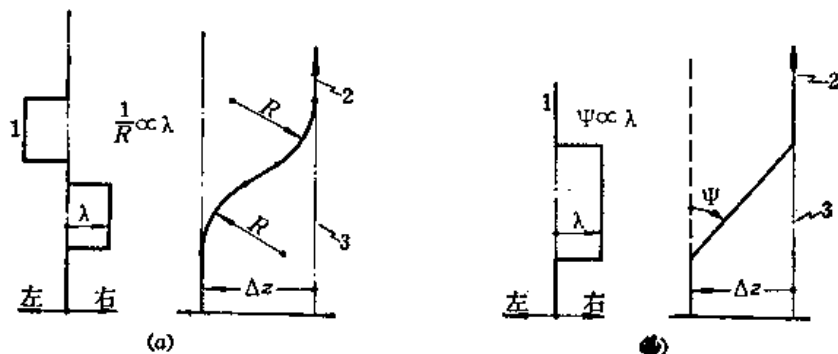


图10-2 反坦克导弹的两种操纵方式  
(a) 加速度式操纵；(b) 速度式操纵。

定时间之后，大约在刚刚把导弹的位置误差纠正了一半的时候，射手就应提前把手柄搬回原来位置；但这还不够，他还必须把手柄再朝相反的方向搬动大约也是 $\lambda$ 的角度，于是导弹又将以曲率半径 $R$ 做反方向的盘旋；再过一段时间之后，射手再把手柄搬回原来位置。这时，导弹才基本上消除了对于瞄准线的位置误差，并且能够继续沿着瞄准线的方向飞行下去。由此可见，在一般的加速度操纵方式中，射手的操纵动作是相当复杂的。特别是他还必须恰到好处地掌握改变操纵方向的时机。如果他让导弹改变盘旋方向太早，那么导弹的位置误差就得不到足够的纠正；如果他让导弹改变盘旋方向太迟，导弹的位置误差就将被纠正得过头，而跑到瞄准线的另一边去了。因此为了让射手掌握加速度式操纵的技巧，必须进行相当长时间的训练。而且，即便是熟练的射手，也很难把这类导弹的命中率提高到70~80%以上。

但是在速度式操纵的导弹飞行过程中，如果导弹偏离瞄准线一个位置偏差 $\Delta z$ ，那么，射手只需把手柄搬动两次就能很好地纠正这个偏差（见图10-2）：射手先把手柄搬动一个角度 $\lambda$ ，于是导弹的飞行方向就相应地改变了一个角度 $\Psi \propto \lambda$ ；过一段时间，导弹飞到了瞄准线上，位置误差已经纠正，射手即可把手柄搬回原来位置，于是导弹的飞行方向也恢复到原来航向上，可沿着瞄准线继续飞下去了。

由此可知，对于速度式操纵的导弹来说，射手的操纵动作要简单多了，因此培养一个射手所需的训练时间和经费都能得到大量地节省。最重要的，是能够大幅度地提高导弹的命中率（据说，威基兰特导弹的命中率达90%）。此外，还有两个优点：第一是由于容易操纵，可使导弹的速度增大（大约可比一般的第一代反坦克导弹增大一半），从而缩减了飞行时间。第二是由于操纵灵活，可以缩小射击的死区（威基兰特的射击死区是180米，而一般第一代反坦克导弹的死区是400米以上）。

为了实现速度式操纵，在威基兰特导弹上采取了两个独特的措施。

第一个措施，是在弹上装设自动驾驶仪，根据射手发来的指令，自动驾驶仪就能把导弹的飞行方向稳定在所要求的航向上。因此，弹上要装两个陀螺，一个用来敏感偏航角的变化，另一个用来敏感弹体俯仰角及倾斜角的变化；而在一般加速度操纵的没有自动驾驶仪的反坦克导弹上，都只需装一个陀螺，用来敏感弹体倾斜角的变化就足够了。

第二个措施是使导弹具有很大的可用过载（参见第四章§4-1-4），或者换句话说，就是让导弹能够以很小的曲率半径进行盘旋，以保证导弹能很快地把飞行方向转变到新的航向上。为此，威基兰特采用了展弦比很小的弹翼，这样它的攻角可以达到 $30^\circ$ 还不致“失速”。在这样的大攻角条件下飞行，导弹才能以不大的弹翼面积，而提供出很大的举力，以便实现快速的转弯（参阅第七章§7-1及§7-2）。

由于弹上装有自动驾驶仪，故威基兰特单发导弹的造价将高于一般的第一代反坦克导弹。但是这一缺点有可能以导弹的命中率较高并且训练射手的费用较低等优点来补偿。

### 三、斯文费厄（或称“旋火”）反坦克导弹

斯文费厄是英国的一个重型反坦克导弹，多装在装甲车上发射，但也可从放在地上的发射架发射出去。它同威基兰特的原理类似，也是采用目视瞄准及跟踪、手动操纵（速度式操纵方式）、导线传输指令的导引方案。但增加了一个自动程序发生器。

自动程序发生器的作用，是在发射后把导弹自动地操纵到瞄准线上来。在射手瞄准目

标并准备发射的时候，程序发生器即根据发射架的位置、方向及高低角自动地编制操纵程序，并在导弹发射后执行此程序，从而能够把导弹自动地导入到瞄准线上来。由于装设了这个自动程序发生器，当射手在远离导弹 100 米处发射导弹时，死区只为 300 米；射手位于导弹发射车上时，死区为 150 米；并且，允许导弹具有  $\pm 45^\circ$  的方向射界。导弹的发射倾斜角为  $35^\circ$ ，可以将发射车整个隐蔽在障碍物后面。射手的阵地还可以高出导弹阵地 23 米，这也更便于武器系统在阵地上的隐蔽。

斯文费厄导弹的发动机是单室双推力的固体发动机。在导弹发射后的最初六秒钟内，飞行加速度只有  $3g$ ；6 秒钟后以 185 米/秒的等速飞行。这种推力方案可以使导弹在飞行的前几秒钟内具有较大的飞行机动性。这对于缩小死区是有利的。

导弹的操纵机构是燃气流偏转器，同空气舵相比，它可以提供更大的舵上控制力矩，尤其是在速度较低的飞行初始段上。

发射前，导弹装在密封的发射箱中，这时，它的四片弹翼是折叠起来的。发射后，弹翼在弹簧作用下张开，并锁住在张开位置上。

#### 四、米兰（也称“鳶”）反坦克导弹

米兰是法国和西德联合研制的轻型第二代反坦克导弹，最大射程 2000 米。采用“目视瞄准、红外跟踪、自动形成遥控指令和有线传输指令”的导引方案。

米兰武器系统由装有导弹的发射管（兼做贮运容器）及发射装置组成。

发射管是用玻璃纤维加强塑料制成的。发射管下部的接线箱内装有一个热电池，用来向发射装置（包括点火器、瞄准装置和制导电子设备）供给能量。发射管后端是以双基药为燃料的气体发生器，其中装药采用二级燃烧，第一级可赋予导弹 75 米/秒的炮口速度，第二级用来在导弹射出后使发射管从发射装置上脱落。发射过程中，导弹被活塞推动向前加速运动，并借助发射管内的来复线而旋转。离开发射管时，导弹已具有 6 转/秒的转速。装有导弹的发射管的全重约 12 公斤。

发射装置由三脚支架、潜望镜式瞄准装置以及电子制导装置组成，共重 15 公斤。瞄准装置的功用是在全天候条件下瞄准目标以及利用红外测角仪跟踪导弹。

米兰导弹武器系统供步兵使用时由二人携带，行军中一人背发射装置，另一人背二发导弹。

米兰导弹的内部构造如图 10-4 所示，它由三部分组成：头部为空心装药战斗部和引信装置；中部为火箭发动机和安装有弹翼的弹体；尾部装有陀螺、导线线轴、燃气扰流片、曳光器和弹上热电池。

战斗部的空心装药炸药重 1.45 公斤。战斗部的风帽是互相绝缘的两层壳体，当磁击目标时，风帽变形，两层壳体接触使引信的点火电路接通而起爆。引信的解除保险装置装在发动机燃烧室底部，平时用一个保险活门截断引信和战斗部的通路；导弹发射后在发动机

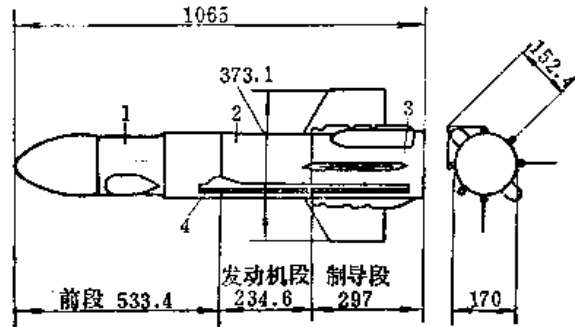


图10-3 斯文费厄导弹的外形

1—引信及战斗部；2—火箭发动机；3—自动驾驶仪；  
4—发射导轨。

燃气压力作用下，保险活门被打开，使引信和战斗部之间的通路沟通，使引信解除保险。此外，在引信的发火管电路上还有一个短路电桥也起着保险作用，只有制导导线放出 20 米之后，这个短路电桥被拉断，引信才可能起爆。

发动机是双推力的固体火箭发动机。第一段装药燃烧 1.3 秒，产生 268 牛顿的推力，使导弹速度从 75 米/秒提高到 125 米/秒；第二段装药燃烧 11 秒，产生 104 牛顿推力，使导弹在飞抵 2000 米最大射程时达到 200 米/秒的速度和 12 转/秒的转速。在发动机壳体外面

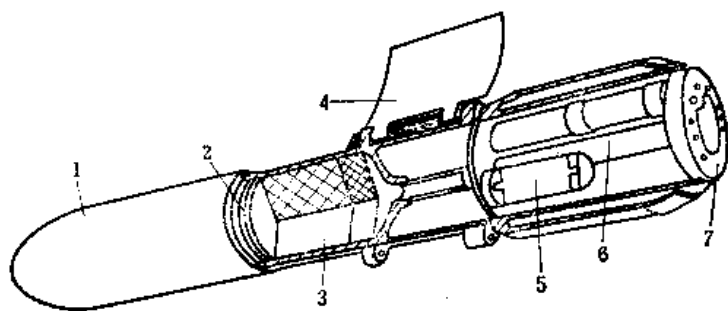


图10-4 米兰导弹结构示意图

1—战斗部；2—引信；3—发动机；4—弹翼；5—热电池；  
6—燃气导管；7—红外光源。

安装有四片卷弧形折叠弹翼。当导弹装在发射管中时，用一个卡环将弹翼收拢在弹体上。当导弹射出发射管时，卡环被发射管的出口台阶挡住，留在发射管内；于是，弹翼在弹簧的作用下自动张开，保证导弹的飞行稳定性并提供一定的举力。

在弹体的尾段安装有弹上制导系统的部件，包括：

1. 陀螺 用来建立空间基准坐标。导弹每转一周，在基准方位上陀螺发出一个基准脉冲信号。陀螺的启动是依靠一个燃气发生器的气流喷射作用，在 200 毫秒内达到 100000 转/分的转速，并持续工作 15 秒。陀螺能承受住导弹发射时的巨大加速度（约 800  $g$ ）。

2. 导线轴 导线将弹上陀螺发出的基准脉冲送至地面发射装置，并将控制指令从地面发射装置送给导弹。导线由两股铜导线组成。

3. 信号转换器 放大来自地面发射装置的指令信号，激励燃气扰流片的舵机，并控制起爆战斗部和发送基准脉冲所需的电压。信号转换器接有一个高频滤波器，用来消除外界的电磁干扰。

4. 燃气扰流片 由舵机（电磁铁）控制着，可以伸入喷口的燃气流中或者缩回，用来产生脉冲调宽的舵控力。

5. 曳光组件 环状，分为两部分。夜间发射导弹时，只点燃其四分之一部分；白天发射导弹时，再点燃其余四分之三部分。

6. 热电池 供给弹上引信、陀螺、信号转换器及舵机等部件用电。电池输出功率为 31 瓦，电压为 7~11 伏。

射手在阵地上安置好发射装置并将装有导弹的发射管装在发射装置上，然后通过潜望式瞄准具搜索战场。当捕捉并瞄准目标以后，即按下击发按钮，以此为时间零点，以后的发射过程时间序列如下：

0 秒 击发，接线盒热电池激活。

300 毫秒 接线盒热电池电压升到额定值（22伏）；启动弹上陀螺、激活弹上热电池、点燃夜间用红外光源。

- 1000 毫秒 发射管中的气体发生器点火、导弹在管内启动、点燃白天用红外光源。  
 1040 毫秒 弹翼卡环被发射管出口台阶挡住。  
 1045 毫秒 发射管活塞撞击弹翼卡环，随即导弹离开活塞，弹翼开始张开。  
 1060 毫秒 弹翼完全张开。  
 1080 毫秒 导弹飞离炮口约二米，弹上发动机压力升高至 60 帕，引信解除保险。  
 1300 毫秒 导弹飞出约 20 米，引信的短路保险电桥被拉断，完全解除保险。  
 1400 毫秒 开始对导弹进行制导。

### 五、霍特反坦克导弹

霍特反坦克导弹是由法国和西德联合研制的重型第二代反坦克导弹。

霍特是由地面装甲车或空中直升飞机上发射的反坦克导弹，其最大射程为 4000 米，最小射程为 75 米。据称其命中率及战斗部威力都很高，一发直接命中的导弹，可以击毁现有的任何一种坦克；射击速度为 3 发/分。在运输包装箱内的弹药全重 60 公斤。

霍特导弹系统采用“目视瞄准，红外自动跟踪，自动形成遥控指令，有线传输指令”的导引方案。

霍特导弹武器系统由装有导弹的发射筒、瞄准制导装置、发射装置和运载工具组成。

发射筒是用玻璃纤维缠绕制成的。它既是导弹的发射筒又是导弹的运输和贮存器。发射筒内有膛线，能在发射时赋予导弹旋转运动，使导弹绕其纵轴旋转。

霍特导弹结构示意图如图 10-5 所示。

霍特导弹主要由战斗部、带弹翼的发动机和尾部制导组件三部分组成。

霍特战斗部为锥孔装药破甲战斗部。总重为 6 公斤，直径为 136 毫米。从工艺上讲，它还包括两个部件：风帽和带装药的壳体。

风帽有两个同心部分：外锥体和内锥体。外锥体为压铸成形的塑料壳体，在其内表面镀一层较厚的银层。内锥体为冲压而成的紫铜壳体，其外表面也镀银。平时内外锥体是绝缘的。碰撞时，两锥体变形并相互接触，于是使引信的点火线路接通。

霍特导弹的引信和发动机组装在一起，作为续航发动机的前底。当续航发动机内压力达 35~40 帕时，在续航发动机供给的燃气作用下剪断引信中的保险锁，因而解除引信的机械保险。同时，当导弹离开发射管 45 米时，在遥控导线放线拉力的作用下，拉断引信中作为保险器用的短路电桥，使引信处于待发状态。

霍特导弹的发动机为整体式圆筒形铝合金壳体，用铝制中间底隔为前后两部；前部为续航发动机燃烧室，后部为起飞发动机燃烧室。

起飞发动机燃烧室内装有星形内孔的双基药柱，燃烧时间 0.85~1 秒，推力为 4900~5800 牛顿。使导弹加速至 240~260 米/秒的速度。燃气由四个斜喷管排出。

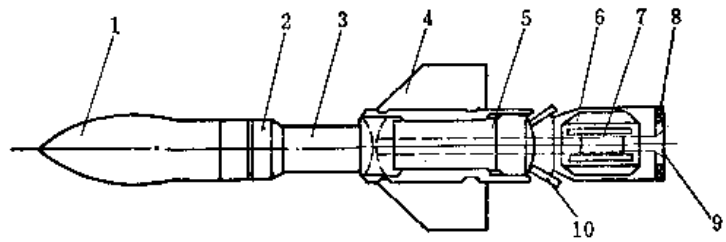


图 10-5 霍特导弹的总体部位安排

- 1—战斗部；2—电点火引信；3—续航发动机；4—弹翼；5—起飞发动机；6—线管；7—制导组件；8—红外辐射源；9—续航发动机喷管；10—起飞发动机喷管。

在中间底上安装有球形阀（延时器）。当起飞发动机装药被点燃并且燃烧室压力达到一个规定值的时候，球形阀被打开，让灼热燃气通过，遂点燃了续航发动机的点火装置。

续航发动机内装端面燃烧的圆柱形双基药柱，燃烧时间为 16.5~18 秒，推力为 176~245 牛顿，使导弹能够保持飞行速度为 240~260 米/秒。续航发动机的燃气通过钢制长导管从尾喷口排出。此外，在续航发动机药柱的侧面有两凹槽，槽中安置铜管，使一部分燃气通过铜管进入引信体中，用来使引信解除保险。

在发动机壳体上安装有弹翼组件。四片铝合金制的弧形弹翼，在未发射前，折叠在发动机壳体外表面上。当导弹射出发射管时，在弹簧的作用下，弹翼自动展开，并被固定在展开的位置上。展开状态的弹翼同弹体轴线之间具有  $1^{\circ}10'$  的安装角。

尾部制导组件位于发动机组件之后，由导线线管、制导组件、红外辐射器及尾罩四部分组成。

线管上缠有 4075 米长的双芯导线。最初的 70 米导线为加强线，用来承受发射时及飞行初期的冲击拉力。当导线放出 45 米长时，撕断位于线管末端的短路片（引信保险用的），使引信中的战斗部起爆雷管接通电路。于是，决定了引信的炮口保险距离为 45 米。

红外辐射器共两个。一个在中央，另一个在周围，都装在尾部组件的后端。

在白天发射导弹时，两个红外辐射器都点燃；夜间发射时，发射装置上的选择开关仅使中央红外辐射器点燃。

尾罩将导弹尾部装置从外面罩住，保护遥控导线。当然，尾罩也是导弹的外形构件。尾罩前端呈锥形，在燃气流冲刷部位有耐火材料保护金属部分不受起飞发动机从喷管喷出的燃气烧蚀。在起飞发动机各喷管出口的下方，在燃气流场将经过的地方，有一块铬铝合金钢的导流片（共四片），嵌入耐火材料中。导流片为一个楔形体，与弹体轴线构成  $20^{\circ}$  角，其作用是在起飞发动机工作期间，提供较大的滚转力矩，使导弹加速旋转。在此以后到飞行终止，则靠弹翼的倾角保持转速。

制导组件包括导弹飞行期间制导导弹所需的全部弹上电子元件。其作用是接收由导线传来的指令信号，经过译码放大后激励舵机电磁铁线圈，带动燃气偏流片运动。它由电源、译码器、稳定器、陀螺仪装置、舵机及燃气扰流片等组成。

电源是一个热电池，由一个点火器触发其放热反应，使固态电解质融化。激活时间不到 0.3 秒，输出电压为 20 伏，功率为 100 瓦。其功用是给陀螺仪、译码器、稳定组件供电。

稳定器的功用是把由陀螺送出的稳定指令加以放大，然后传送给译码器，并在起飞 0.85 秒之后，自动切断稳定指令。

译码器有以下三种功用：

一是按照遥控和稳定指令控制燃气偏流片：由陀螺产生的稳定指令以及由发射制导装置发来的遥控指令均输送给译码器；译码器将这些指令的电流放大之后用来激励舵机电磁铁线圈，以便推动燃气偏流片动作。功用之二是为导弹旋转基准信号提供所需的电压。功用之三是为引爆战斗部提供电源。

陀螺仪装置也有三种功用：

第一，产生导弹的滚转基准信号；



第二，产生稳定信号；

第三，对稳定信号进行前置放大。

霍特导弹的陀螺仪装置中包含了两个三自由度陀螺。一个陀螺产生滚动同步信号，并产生俯仰稳定信号；另一个陀螺只产生偏航稳定信号。

弹体每滚转一周，陀螺仪装置发出一个滚转基准信号脉冲。这个基准信号脉冲通过导线传给瞄准制导装置，做为形成控制指令的基准。

在导弹刚刚飞出发射管时，它的速度及转速都不大，这时，各种干扰因素对弹道的影响比较强烈。为了改进弹道启控点的散布，霍特导弹采用了在初始段弹道上接入稳定回路的办法。即由俯仰陀螺及偏航陀螺分别产生俯仰及偏航稳定信号，经稳定器放大后送入译码器，同由发射制导装置送来的控制指令信号进行综合，再去推动舵机。这样来保证导弹在发射后能进入红外测角仪的跟踪视场。

瞄准制导装置主要包括光学瞄准具、红外测角仪及遥控指令信号发生器。

霍特导弹在地面车辆上使用的瞄准具为双倍率瞄准望远镜。捕捉和瞄准近距离的运动目标时，放大倍率为3倍，视场角为320毫弧（约 $18^\circ$ ）；瞄准远距离目标时，放大倍率为12倍，视场角为80毫弧（约 $4.5^\circ$ ）。

当目标横向运动时，光学瞄准线随着转动，导弹必须横向加速以使导弹位置保持在瞄准线上。为此，在瞄准具装置内有一个瞄准线角速度传感器，它感受瞄准具追随目标作横向运动的角速度并产生相应的信号输入指令发生器中。

霍特导弹在地面车辆上使用的红外测角仪有两个视场：

初始段用的大视场又叫作捕获视场，视场角为 $\pm 3^\circ$ 。在这一段内，主要是为了解决导弹进入红外视场的问题；由于初始段散布较大，虽有弹上稳定装置但还是存在着一定的散布，因此用较大视场作为捕获视场。但大的视场其背景干扰也大，测量误差也随之增大。因此，在导弹进入红外视场且飞行比较稳定后，就改用小视场。

小视场又叫作导引视场，视场角为 $\pm 0.5^\circ$ 。导弹飞离发射筒达10米左右时进入测角仪大视场。导弹被这个视场捕获后，制导系统对它开始进行初始段的制导。在发射两秒钟后，红外测角仪自动由大视场转换为小视场，直到飞行終了。

红外测角仪和光学瞄准具的光轴保持平行。当光学瞄准具的十字线对准目标时，弹上红外辐射器的影象在红外测角仪视场中的位置即代表着误差角。误差角信息经过调制盘之后被光电元件检出，以脉冲信号输出，脉冲宽度代表误差大小，脉冲相位代表误差方向。然后将这个误差信号传给指令信号发生器。

在指令信号发生器中，参照着滚动基准信号脉冲，把红外测角仪传来的误差信号和瞄准具角速度传感器传来的信号，还有用来平衡导弹所受重力加速度的重力补偿指令信号，综合在一起。形成为调宽调相的指令信号。这个信号再由导线传给导弹，用来推动舵机并使燃气扰流片在适当的时候切入燃气流中一定的时间，从而形成必要的舵上控制力，使导弹沿着瞄准线飞行。

## 六、陶反坦克导弹

陶是美国制造的第二代重型反坦克导弹。管式发射，光学（红外线）自动跟踪，导线传输遥控指令，导弹不滚转，具有弹上倾斜稳定系统。它可以从车辆上或直升飞机上发射，

也可以由步兵使用从地面发射。据称陶的命中率在500米内为80%，在500米外接近100%；可靠性为97.6%；射击速度为3发/分。

陶式导弹武器系统由筒装导弹和发射装置组成。筒装导弹由贮存发射筒和导弹组成。

贮存发射筒既是贮存筒，又是发射管的一部分。它是一个圆柱体，壳体材料为多层环氧树脂玻璃纤维。发射筒上有一个插座，当发射筒装进发射管内时，用它接通导弹和发射装置之间的电路。导弹发射后，发射筒即抛弃。

导弹由战斗部、起飞发动机、增速发动机和电子舱、中舱、后舱组成，如图10-6所示。

导弹后舱组件由后舱壳体，两个导线线轴，一个红外光源和四个带空气舵片的舵机等组成。

舵机是气动的。由一个高压气瓶和四个以高压气体推动的活塞作动器等组成。每一个作动器由一个电磁阀带动。作动器驱动空气舵片从一个方向转到另一个方向。四片空气舵片位于弹尾部，平时向前折迭，嵌入弹体。当导弹离开发射筒时，

带有弹簧的空气舵就向外旋转展开到位。其中两个水平舵具有 $-2^\circ$ 的舵安装角，从而给予导弹一个预装的空气动力仰头力矩，引起一个攻角及一定的举力，用来部分地平衡重力。

红外光源装在后舱组件的末端，是一个调制的电弧氙灯（调制频率为5千赫）。它的抗干扰性很强；可以使得陶式导弹对着太阳方向发射而不会失控。

中舱组件由中舱壳体、姿态控制陀螺仪、三个热电池和四片弹翼组成。导弹的增速发动机位于电子舱与中舱壳体之间，增速发动机喷管出口在中舱壳体的两侧。四片弹翼按装在增速发动机壳体上，平时弹翼折迭，发射后展开。

陶式导弹弹翼在弹体重心附近呈X型，空气舵在弹尾呈十字形。弹翼所在平面与舵所在平面间的夹角约为 $45^\circ$ 。

陶选择“X”、“十”型正常式气动外形是同采用直角坐标控制和倾斜稳定方案相适应的。空气舵兼尾翼采用十字型便于将俯仰和偏航分为两个通道，简化了控制回路的设计，可以不考虑两个通道的交互影响。弹翼和尾翼交错 $45^\circ$ 安置，可以减小小攻角下的洗流干扰和速度阻滞，有利于提高小攻角时的舵效率。正常式有利于弹翼和尾翼的设置。

姿态控制陀螺仪是一个三自由度陀螺。其外环用于测量导弹的倾斜角，内环用于测量导弹的偏航角。这两个信号送到电子舱后进行处理，变成反映导弹倾斜、偏航稳定的指令。

弹上三个相同的热电池结构是专门设计的，能经受导弹发射和飞行的环境条件，工作温度范围为 $-25\sim+125^\circ\text{F}$ 。

电子舱组件包含所有的弹上的电子线路，其作用是将发射制导装置来的控制信号和弹上陀螺来的导弹稳定信号综合处理，构成驱动舵机的指令信号。

陶的战斗部为锥孔装药战斗部，重3.8公斤。内装炸药2.36公斤。据称其静破甲垂直穿深600毫米，动破甲着角 $65^\circ$ 时穿甲厚为200毫米。战斗部壳体大致由蛋形部、本体和尾部组成。蛋形部和本体均分为内外两层，由轻铝合金板制成。陶式导弹所用引信为碰

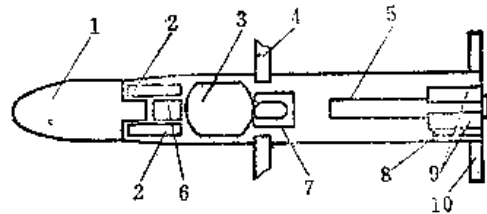


图10-6 陶式导弹的组成

- 1—战斗部；2—电子框架；3—增速发动机；  
4—弹翼；5—起飞发动机；6—保险装置；7—陀螺  
仪；8—光源；9—导线；10—空气舵。

合引信。这种引信分为前后两部分，即弹头碰合开关和弹底引爆装置。弹头碰合开关相当于一个常开的开关。内、外壳体起开关触点的作用。碰撞目标时，外壳压触内壳，使开关闭合。开关按设计在  $65^\circ$  着角时仍能起作用。为了不受诸如丛林、树枝等假目标的影响，将开关外壳设计成碰到这类目标时不变形。弹底引信装置也就是保险与解脱保险装置。它固定在战斗部的尾部。其作用是当导弹飞离发射筒后，加速度达到一定值时使引信处于待发状态。在这种条件下，如弹击中目标，弹头碰合开关碰合，接通引信电路在 100 微秒内起爆战斗部；若脱靶或弹头以大于  $65^\circ$  的倾角命中目标时则由其内的碰触开关上的过载作动击针来完成战斗部引爆的任务。采用头部开关的方案有利于满足战斗部瞬发度要求并使大落角下可靠起爆。

起飞发动机安装在后舱组件的后部，其纵轴与弹体纵轴重合。工作温度范围为  $-25\sim 125^\circ\text{F}$ 。起飞发动机内装有四根管状的双基药柱，共重 1.2 磅，在导弹离开发射管之前燃烧完毕，使导弹达到 225 英尺/秒（约 65 米/秒）的出口速度。

导弹出口后无动力地飞过 7~12 米距离，再使增速发动机点火工作，以防增速发动机的后喷火焰伤害射手。增速发动机工作约 1 秒钟，使导弹速度增加到 350 米/秒左右（这时导弹行程约 60 米）。然后，导弹就依靠惯性，无动力地飞完 3000 米左右的射程。

增速发动机装在电子舱和中舱组件之间，恰好在导弹重心附近。因此，增速发动机工作过程中，导弹的重心位置变化很小。增速发动机的喷管有两个，左右对称地布置在弹体两侧并相对于弹体纵轴具有  $30^\circ$  的夹角。

陶式导弹武器系统的发射装置包括发射管、回转体、瞄准跟踪装置、三角架和控制箱等。

发射管是一种重量轻的玻璃钢分层结构。它有三个金属紧固装置，可以在回转体上迅速装进或卸掉发射管。发射管的位置安装正确就确定了导弹的初始弹道，同时亦起保护射手免受喷气冲击的作用。

回转体是安装和调整发射管和光学瞄准具的装置。它是一种电和机械的组合件，在方位上可转动  $360^\circ$ ，高低可转动  $+30^\circ\sim -20^\circ$ 。在地面发射阵地使用时，将它装在三脚架上；但也可装在各种车辆的发射架上。攻击活动目标时，瞄准线在高低和方位上均发生移动。此时，回转体内的高低和方位角速度传感器分别给出比例于瞄准线角速度的电信号，这两个信号将分别输入控制箱的俯仰和偏航通道。

瞄准跟踪装置包括跟踪器的光学系统、红外测角仪、前置放大器、内电光轴指示器电路和基准分解器。其作用是测定任一瞬时导弹对于瞄准线的误差角。跟踪器光学系统中的十字线由射手将它始终跟踪目标，形成瞄准线。光学瞄准是采用分视场的，捕捉和瞄准近距离目标时放大倍率为 3 倍，视场角为  $26.5^\circ$ ；瞄准远距离目标时，放大倍率为 13 倍，视场角为  $6.5^\circ$ 。红外测角仪接收飞行导弹的红外能并把它转变成误差角信号。红外测角仪宽视场角为  $\pm 2^\circ$ ，窄视场角为  $\pm 0.25^\circ$ 。这两个视场的转换由控制箱的程序电路来完成。前置放大器接收并放大红外测角仪的信号，然后输送给控制箱。内电光轴指示器电路用来检测光学瞄准具的光轴是否跟红外测角仪的光轴平行。基准分解器产生基准信号以便使红外测角仪的信号以它作为测量基准。

控制箱把红外测角仪探测到的误差信号转换成误差电压，然后将误差电压跟回转体内

瞄准线角速度信号相加并综合上速度补偿、重力补偿、距离补偿等信号，形成控制指令，经遥控导线送给弹上电子舱以校正导弹的弹道。

为消除导弹在水平飞行时重力对弹道的影响，必须加入重力补偿信号。此外，由于陶的飞行速度变化急剧，从而引起气动力参数急剧变化，这对控制性能带来不利影响，为了改善控制系统质量必须进行速度补偿。最后，由于不同瞬间导弹的飞行距离不同，因此，对于同一个误差角，在不同距离上导弹对于瞄准线的线偏差是不等的。考虑到这个因素而加入距离补偿。

三脚架有三根可调支杆并可折迭。架上装有两个互成直角的水平仪。架腿可调，故武器可放在  $30^\circ$  的斜坡上。从车辆上卸下武器并作好发射准备所需时间不到两分钟。

在射手捕捉住目标并瞄准以后，即可准备发射。射手按下击发开关，即触发了武器系统的发射过程。发射过程自动进行，其动作时间顺序如下：

0 毫秒：按下击发开关。

75 毫秒：控制箱发出预备点火信号，激活弹上热电池并启动陀螺。

200 毫秒：陀螺转子达到 42000 转/分的额定转速。

800 毫秒：热电池完全激活。

1460 毫秒：从弹上电子舱向控制箱输送两个自平衡信号（俯仰通道、偏航通道各一个），进行导弹制导系统的自动调零。

1500 毫秒：控制箱发出点火信号，使起飞发动机点火；导弹在发射筒内开始运动。

1600 毫秒：弹翼开始张开（当弹翼张开到  $45^\circ$  时，接通一个开关，使弹上红外光源点亮。当弹翼张开到位时，接通另一个开关，使增速发动机点火，舵机气瓶电爆开关打开）。

2260 毫秒：陀螺的偏航稳定信号被短路。

3200 毫秒：增速发动机工作结束。

3260 毫秒：红外测角仪由宽视场转为窄视场。

5865 毫秒：舵机工作频率由 25 赫转为 12.5 赫。

## 七、龙反坦克导弹

龙是美国的单兵携带反坦克导弹。它采用无座力炮管式发射，光学跟踪和有线制导，是一种轻型武器，全武器系统重 14 公斤其中跟踪装置 3 公斤。用来代替美军原装备的 90 毫米无后座力炮。最大射程 1000 米，飞行时间 11 秒。

龙反坦克导弹武器系统包括一个可多次使用的光学跟踪器和一次消耗掉的导弹及发射筒。导弹的构造见图 10-7。

导弹在工厂内就装在发射筒里，因而发射筒又是导弹的包装筒。靠近发射筒的前端有个两脚可折叠的支架，发射时靠这两脚支架和射手的肩部构成三点支撑，这样比三脚支架减轻不少重量，并便于射手对目标进行瞄准。

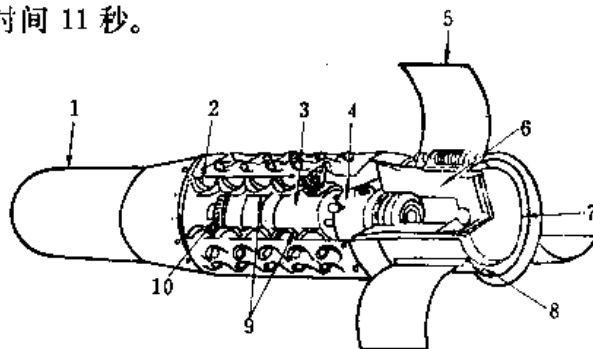


图10-7 龙式导弹的结构  
1—战斗部；2—发动机；3—热电池；4—陀螺；5—弹翼；6—控制信号计算机；7—曳光组件；8—线管；9—发动机点火电路板；10—引信保险装置。

发射管是玻璃钢制的滑膛管，发射管上还装有背带、光学跟踪器的安装座和双脚支架。发射管后部是一装有发射药的气体发生器，发射击发时气体发生器产生高压气体将导弹推出发射管。平时发射管前端盖有保护盖。由于龙的推力室安装在发射管内而不是安装在导弹上，所以使导弹的重量减少有利于提高飞行速度。

龙导弹的头部是锥孔装药战斗部和压电引信。导弹中部装有 60 个小型固体火箭发动机。导弹的后部装有制导系统的电子设备、电池、陀螺、曳光管、卷线轴和三片弧形折迭尾翼。

弧形尾翼具有  $2^\circ$  安装角，平时折迭在弹体上，在导弹发射离开发射管后靠弹簧力立即张开，以保证导弹飞行中的稳定性，并赋予导弹 4 转/秒的转速。

60 个固体发动机组装机于弹体中部蒙皮下面，每个发动机是一个独立装置，发动机的排列是沿弹轴方向共 12 排，每排五个。发动机的喷管是向侧后方向倾斜的。发动机燃烧时间为 18 毫秒。导弹发射后，小发动机工作时，喷出的气流是侧后向的。这就给导弹提供了向前和侧向的推力分量。

龙式导弹的控制方案是独特的。这 60 个固体发动机既是动力装置又是操纵装置。如果导弹的飞行方向是正确的，那么，每隔 400 毫秒，导弹的制导系统即发出一个控制指令，使恰好位于导弹下方的一对发动机点火；所产生的推力冲量恰好补偿重力对弹道的影响。如果导弹的飞行方向不正确，那么，导弹的制导系统所发出的控制指令，可在适当的时刻使一对处于适当位置的发动机点火，所产生的推力冲量，既能修正飞行方向的偏差又能补偿重力的影响。

发动机总是成对地点火，一前一后同重心成等距离，这样可避免导弹剧烈地摆动。

## 八、铜斑蛇反坦克导弹

铜斑蛇是美国研制的 155 毫米激光半主动末段制导炮弹。是从榴弹炮中发射的，可直接命中 4~16 公里范围内的坦克。预计在 80 年代初期将生产并装备部队。

铜斑蛇导弹武器系统可分为三大部分：末端制导的弹丸、火炮及火控系统、目标指示器及其运载工具。

目标指示器通常由激光测距仪、激光照射器、瞄准装置及电池等组成。当瞄准手发现并确定了准备攻击的目标之后，即用激光测距仪确定目标的位置及运动参数，并通过信息传输系统把这些数据传送给火炮阵地；随后，瞄准手就用激光照射器照射目标（目标指示器也可以由直升飞机载运，甚至以无人驾驶飞行器载运）。

火炮阵地收到这些信息之后，即在火控系统的指挥下，用制式 155 毫米榴弹炮将铜斑蛇导弹发射出去。在预定的弹道点上，弹上导引头根据激光照射器在目标上照出的光斑捕获目标，并向目标寻的导引飞行。

铜斑蛇导弹由四大部分组成：

寻的器、电子舱、战斗部和控制舱，尾部有四片可折迭的尾翼（兼控制舵）。如图 10-8 所示（后来在研制过程中，又在弹身中部增加了四片可折迭的弹翼，据说可使射程增加到 20 公里）。

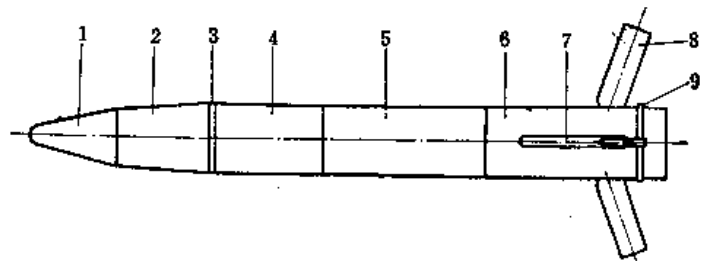


图 10-8 铜斑蛇导弹

1—风帽；2—自动寻的组件；3—前定心带；4—电子舱；5—战斗部；6—控制舱；7—尾翼槽；8—尾翼（兼控制舵）；9—紧套带。

寻的器的外形是带圆顶的锥形，在圆顶的后面是光学主透镜，里面还有导引头陀螺转子、反射镜、次透镜、线圈组等等。

电子舱中包含了各种电子组件。舱外是前定心带。

战斗部为锥孔装药聚能战斗部。

控制舱壳体上有8个槽放置折迭弹翼及尾翼。外面有后定心带及聚丙烯制成的滑动密闭弹带。舱内装有姿态陀螺仪、热电池组、高压气瓶及舵机等。

弹上无发动机，依靠炮口动能飞过全射程。调整炮口速度及射角，即可调整射程。

铜斑蛇导弹在发射过程中的加速度最大可达 $7200g$ 。利用发射时的巨大过载，可以触发热电池的激活过程。但巨大的过载对弹上构件造成严重的强度问题，特别是两个陀螺，在发射时必须锁住，并且用特殊的载荷支撑装置把转子的轴承保护起来。

膛腔内原有来复线，为了不使铜斑蛇导弹出炮口后的转速太高，在弹尾部安置了滑动密闭弹带。发射时，弹带沿膛内来复线一边前进一边旋转，而弹带同弹丸之间可以相对滑动。这样，导弹的转速将比常规弹丸小得多，在出炮口时为 $15\sim 20$ 转/秒（这个转速是弹体摆动频率的 $4\sim 5$ 倍）。

出口后，滑动弹带从弹丸上脱落。原来折迭着的尾翼在离心力作用下展开。尾翼具有 $2^\circ$ 的倾斜安装角，使导弹在无动力飞行中能够把转速维持在 $6\sim 18$ 转/秒的范围内。

利用弹上程序器，在预定的弹道点上使姿态陀螺启动。控制舱中的姿态陀螺是用来提供垂直基准的。在陀螺启动之前，它的转子轴同导弹纵轴一致。启动之后，转子轴保持在启动瞬间的方向上。在姿态陀螺启动数秒钟以后，弹丸的速度矢量将向下转过一个角度，相应地，弹体纵轴也转过一个角度（图10-9）。这个角度可为姿态陀螺所感知。这个角度所在的平面即是铅垂平面。

当弹上铅垂基准形成以后，导引头陀螺即被启动。接着，气瓶及舵机被打开，准备执行控制指令。导引头陀螺也能敏感出导弹的偏航运动及俯仰运动。对姿态陀螺及导引头陀螺提供的信号进行解算，可以获得关于导弹滚转倾斜角的信息。利用此信息，通过滚转稳定回路，使舵机动作，在1秒钟之内即可使弹体的滚转运动停止下来。此后，直到命中目标，在滚转稳定回路的控制之下，导弹的滚转倾斜误差通常小于 $30^\circ$ 。

导引头陀螺被启动以后，在电磁力矩的作用下，使其转子轴总跟随着弹轴，直到捕获目标。

导引头陀螺转子上有一个反光镜。目标一旦进入导引头视场，目标上的激光斑即通过导引头的光学系统照射到一个光电敏感元件上，并产生适当的指令，驱动导引头陀螺转子进动，并通过改变转子上的反光镜角度，使目标光斑趋近于敏感元件的中心。这样使导引头始终跟踪目标。导引头陀螺转子的进动又将激起一个信号，将此信号经过自动驾驶仪即转化为俯仰和偏航的控制指令送给舵机。

在偏航控制指令中叠加有滚转稳定控制指令。而在俯仰控制指令中则叠加有重力补偿

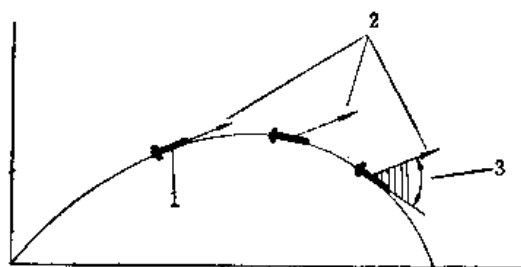


图10-9 铜斑蛇导弹上铅垂基准的形成  
1—陀螺启动；2—陀螺旋转轴的方向；3—在铅垂平面内陀螺所测得的角度。

指令。

重力补偿指令是为了克服重力引起弹道下沉而加入的。弹道下沉现象将使导弹在目标前方落地而形成近弹。

采用其他的办法也可以克服弹道下沉问题。最简单的办法是采用较大的导航常数（参阅第六章），但是导航常数增大之后，随机干扰（如激光光斑的跳动及电路中的噪声等）对导弹运动的影响将要增大，运动的稳定性也将降低。

采用重力补偿指令的办法，只略为增加系统的复杂性（如必须建立弹上的铅垂基准等），而不会带来其他不利影响。

### 附录三 关于坐标系的规定

本书中所采用的坐标系如下：

#### 一、地面坐标系 $oxyz$

地面坐标系同地面静止地相联。原点  $o$  为导弹的发射点， $ox$  轴水平地指向导弹发射的正前方， $oy$  轴铅直向上， $oz$  轴水平向右，组成右手坐标系。

#### 二、弹上平移坐标系 $o_1xyz$

弹上平移坐标系  $o_1xyz$  的原点  $o_1$  为导弹的重心，各轴  $o_1x$ 、 $o_1y$  及  $o_1z$  同地面坐标系的相应各轴保持平行。弹上平移坐标系的原点  $o_1$  在地面坐标系  $oxyz$  中的投影决定着导弹的空间位置。

#### 三、弹体坐标系 $o_1x_1y_1z_1$

弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  同弹体固联，其原点  $o_1$  仍为弹体重心。 $o_1x_1$  轴即为弹体的纵轴，向前为正，当弹体无滚转时， $o_1y_1$  轴位于通过  $o_1x_1$  的铅垂平面内且向上为正。在飞行过程中，弹体坐标系的三个轴的方向表示弹体的空间姿态。可认为弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  是从弹上平移坐标系  $o_1xyz$ ，经过三个旋转而形成的（参见图 10-10）：第一，先以  $o_1y$  为轴，将  $o_1xyz$  旋转一个适当的角度  $\psi$ ，形成新系  $o_1x'y'z'$ ；第二，再以  $o_1z'$  为轴，将  $o_1x'y'z'$  旋转一个适当的角度  $\theta$ ，形成新系  $o_1x_1y'_1z'_1$ ；第三，再以  $o_1x_1$  为轴，将  $o_1x_1y'_1z'_1$  旋转一个适当的角度  $\gamma$ ，即可形成弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$ 。其中，角度  $\psi$  称为“偏航角”，乃是  $o_1x_1$  轴同  $o_1x$  轴之夹角在水平面上的投影；角度  $\theta$  称为“俯仰角”，乃是  $o_1x_1$  轴同  $o_1x$  轴之夹角在通过  $o_1x_1$  轴的铅垂面上的投影；角度  $\gamma$  称为

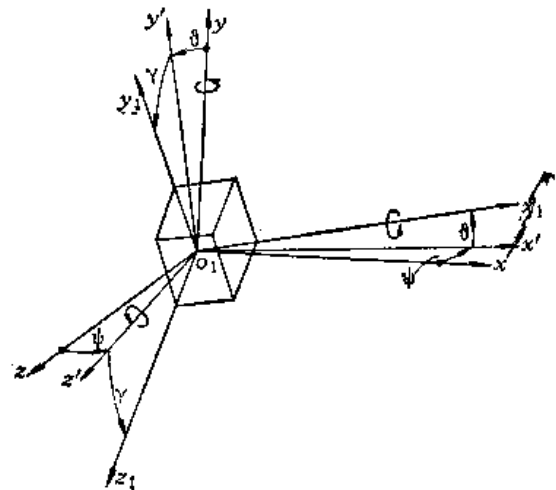


图10-10 弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  的形成

“倾斜角”，乃是  $o_1y_1$  轴同  $o_1y$  轴之间的夹角在垂直于  $o_1x_1$  轴之平面上的投影。这些角度的正负方向可按右手定则决定，即右手握住旋转轴线，姆指指向轴端，其他四指的方向就是旋转的正方向。

#### 四、弹道坐标系 $o_1x_2y_2z_2$

弹道坐标系的  $o_1x_2$  轴同导弹的速度向量  $V$  重合,  $o_1y_2$  轴位于包含  $o_1x_2$  轴的铅垂平面内。弹道坐标系的  $o_1x_2$  轴同弹上平移坐标系  $o_1x$  轴之间的夹角决定着弹道切线的方向; 这个角度在水平面上的投影称为弹道偏角  $\Psi$ ; 这个角度在通过  $o_1x_2$  轴的铅垂面上的投影称为弹道倾角  $\Theta$ 。可认为弹道坐标系  $o_1x_2y_2z_2$  是从弹上平移坐标系  $o_1xyz$  旋转过来的 (图 10-11); 第一, 先以  $o_1y$  为轴, 把  $o_1xyz$  旋转一个角度  $\Psi$ , 得到新系  $o_1x''y_2z_2$ ; 第二, 再以  $o_1z_2$  为轴, 旋转一个角度  $\Theta$ , 即得到  $o_1x_2y_2z_2$ 。角度  $\Psi$  及  $\Theta$  的正负皆按右手定则规定。

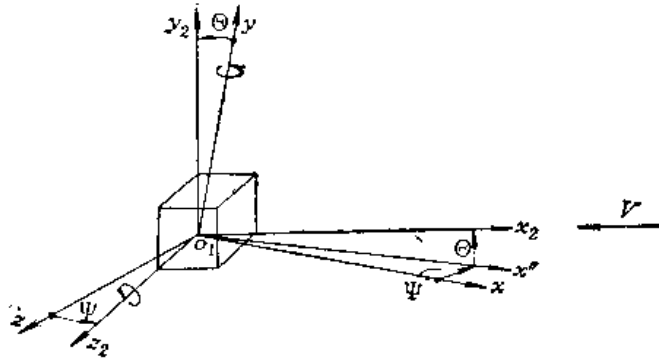


图10-11 弹道坐标系  $o_1x_2y_2z_2$  的形成

#### 五、准弹体坐标系 $o_1x_3y_3z_3$

在弹体无滚转, 即  $\gamma = 0$  的特定情况下, 弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  完全重合于准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  (故  $x_3o_1y_3$  为铅垂平面)。当弹体滚转时, 弹体坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  就在准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  中绕  $o_1x_3$  轴滚转。或可把准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  看做是从弹道坐标系  $o_1x_2y_2z_2$  经过两次旋转而形成的。先绕  $o_1y_2$  轴旋转一个角度  $\beta$ , 形成新系  $o_1x''y_2z_3$ ; 再绕  $o_1z_3$  轴旋转一个角度  $\alpha$ , 即可形成  $o_1x_3y_3z_3$  (图 10-12)。

角度  $\alpha$ , 称为攻角, 乃是速度向量  $V$  (或  $o_1x_2$  轴) 同弹体纵轴  $o_1x_3$  (或  $o_1x_1$ ) 之夹角在铅垂面  $x_3o_1y_3$  中之投影; 角度  $\beta$ , 称为侧滑角, 乃是  $V$  同  $o_1x_3$  之夹角在包含  $V$  且垂直于铅垂面  $x_3o_1y_3$  的平面中之投影<sup>●</sup>。

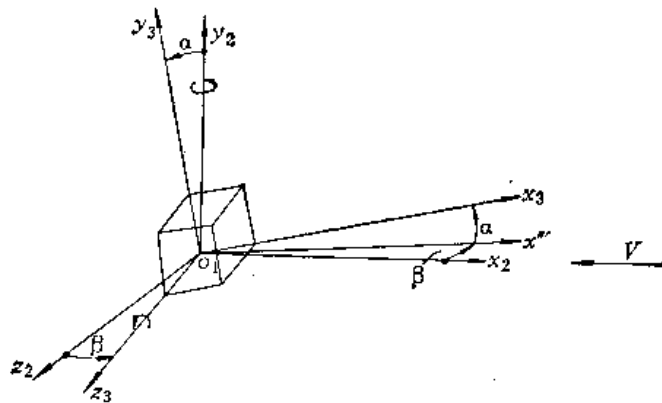


图10-12 准弹体坐标系  $o_1x_3y_3z_3$  的形成

● 本书中关于攻角  $\alpha$  及侧滑角  $\beta$  的规定, 同某些传统的规定 (如第四章 [4]) 略有不同; 传统的规定不适用于导弹弹体有滚转的情况。



## 附录四 拉氏变换简表

序号	$f(t)$	$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
1	单位脉冲函数 $\delta(t)$	1
2	单位阶跃函数 $1(t)$	$\frac{1}{p}$
3	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
5	$e^{-Ct} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+C)^2 + \omega^2}$
6	$\frac{1}{\omega} \sqrt{(A-C)^2 + \omega^2} \cdot e^{-Ct} \sin(\omega t + \phi)$ 其中 $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{A-C}$	$\frac{p+A}{(p+C)^2 + \omega^2}$
7	$\frac{1}{\omega_n^2} + \frac{1}{\omega \omega_n} e^{-Ct} \cdot \sin(\omega t + \phi)$ 其中 $\omega_n^2 = C^2 + \omega^2$ ; $\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{-C}$	$\frac{1}{p[(p+C)^2 + \omega^2]}$
8	$\frac{A}{\omega_n^2} + \frac{1}{\omega \omega_n} \sqrt{(A-C)^2 + \omega^2} \cdot e^{-Ct} \cdot \sin(\omega t + \phi)$ 其中 $\omega_n^2 = C^2 + \omega^2$ ; $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{A-C} - \tan^{-1} \frac{\omega}{-C}$	$\frac{p+A}{p[(p+C)^2 + \omega^2]}$
9	$\frac{A_0 + \sqrt{(C^2 - \omega^2 - A_1 C + A_0)^2 + \omega^2 (A_1 - 2C)^2}}{\omega \omega_n} e^{-Ct} \sin(\omega t + \phi)$ 其中 $\omega_n^2 = C^2 + \omega^2$ ; $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega (A_1 - 2C)}{C^2 - \omega^2 - A_1 C + A_0} - \tan^{-1} \frac{\omega}{-C}$	$\frac{p^2 + A_1 p + A_0}{p[(p+C)^2 + \omega^2]}$
10	$\frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4C^2 \Omega^2}} \left[ \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t + \phi_1) + \frac{e^{-Ct}}{\omega} \sin(\omega t + \phi_2) \right]$ 其中 $\omega_n^2 = C^2 + \omega^2$ ; $\phi_1 = -\tan^{-1} \frac{2C\Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2}$ ; $\phi_2 = -\tan^{-1} \frac{-2C\omega}{C^2 - \omega^2 + \Omega^2}$	$\frac{1}{(p^2 + \Omega^2)[(p+C)^2 + \omega^2]}$
11	$\frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4C^2 \Omega^2}} \left[ \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t + \Psi_1) + \frac{\sqrt{(A-C)^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-Ct} \sin(\omega t + \Psi_2) \right]$ 其中 $\omega_n^2 = C^2 + \omega^2$ ; $\Psi_1 = \tan^{-1} \frac{\Omega}{A} - \tan^{-1} \frac{2C\Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2}$ ; $\Psi_2 = \tan^{-1} \frac{\omega}{A-C} - \tan^{-1} \frac{-2C\omega}{C^2 - \omega^2 + \Omega^2}$	$\frac{p+A}{(p^2 + \Omega^2)[(p+C)^2 + \omega^2]}$
12	$\frac{1}{\omega_n^2} \left[ t - \frac{2C}{\omega_n^2} + \frac{1}{\omega} e^{-Ct} \sin(\omega t + \phi) \right]$ 其中 $\omega_n^2 = C^2 + \omega^2$ ; $\phi = -2 \tan^{-1} \frac{\omega}{-C}$	$\frac{1}{p^2[(p+C)^2 + \omega^2]}$
13	$\frac{1}{\omega_n^2} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{2Ct}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^2} + 4 \frac{C^2}{\omega_n^4} + \frac{e^{-Ct}}{\omega_n \omega} \sin(\omega t + \phi) \right]$ 其中 $\omega_n^2 = C^2 + \omega^2$ ; $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega(\omega_n^2 - 4C^2)}{C(3\omega_n^2 - 4C^2)}$	$\frac{1}{p^3[(p+C)^2 + \omega^2]}$
14	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$

附录五 正态分布函数 $\Phi(x)$ 表

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2811	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3079	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3689	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4297	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

## 附录六 弹道表(按“加尔涅定律”)

 $\Theta_0 = 45^\circ$  (单位:  $X$ —米;  $v_0, v_c$ —米/秒;  $C$ —米<sup>2</sup>/千克力)

$\begin{matrix} v_0 \\ C \end{matrix}$	400			450			500		
	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$
0	16310	400	45°-00'	20640	450	45°-00'	25484	500	45°-00'
0.1	14283	355	47-24	17500	385	48-12	20960	420	48-56
0.2	12957	328	49-09	15454	349	50-04	17962	362	51-25
0.3	11911	311	50-36	13933	327	51-26	15946	337	52-52
0.4	11063	295	51-48	12752	310	52-43	14515	321	54-01
0.5	10360	281	52-51	11812	296	53-57	13218	307	55-09
0.6	9765	268	53-54	11038	282	55-01	12295	293	56-08
0.7	9250	257	54-51	10378	269	56-03	11458	281	57-06
0.8	8792	248	55-41	9803	258	56-57	10757	269	57-58
0.9	8375	239	56-26	9296	248	57-43	10186	259	58-43
1.0	7991	231	57-07	8845	239	58-21	9650	249	59-22
1.1	7676	224	57-48	8383	231	58-58	9203	243	59-59
1.2	7380	217	58-24	8047	224	59-33	8816	237	60-35
1.3	7104	211	59-00	7734	218	60-06	8438	231	61-09
1.4	6954	206	59-35	7451	212	60-37	8070	225	61-41
1.5	6619	202	60-07	7185	207	61-06	7717	219	62-11

 $\Theta_0 = 45^\circ$ 

(续)

$\begin{matrix} v_0 \\ C \end{matrix}$	550			600			650		
	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$
0	30836	550	45°-00'	36698	600	45°-00'	43068	650	45°-00'
0.1	24654	450	49-40	28802	480	50-24	33404	509	51-08
0.2	20598	379	52-46	23562	399	54-08	26854	414	55-29
0.3	18030	345	54-17	20314	355	55-42	22798	365	57-07
0.4	16214	331	55-20	18028	336	56-38	19962	339	57-57
0.5	14678	317	56-20	16210	322	57-32	17813	328	58-43
0.6	13546	303	57-15	14837	308	58-22	16168	318	59-29
0.7	12580	290	58-09	13719	295	59-12	14869	305	60-15
0.8	11766	277	58-58	12778	283	59-58	13790	293	60-59
0.9	11077	266	59-43	11968	271	60-43	12858	281	61-43
1.0	10450	256	60-23	11250	261	61-24	12050	270	62-24
1.1	9934	250	61-01	10641	255	62-03	11348	260	63-02
1.2	9462	244	61-38	10099	248	62-40	10736	251	63-38
1.3	9027	237	62-13	9613	240	63-15	10199	243	64-12
1.4	8623	230	62-45	9174	233	63-47	9724	236	64-44
1.5	8245	224	63-16	8773	227	64-18	9301	229	65-14

$\Theta_0 = 25^\circ$ 

$C$	400			450			500		
	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$
0	12494	400	25°-00'	15813	450	25°-00'	19522	500	25°-00'
0.1	11063	351	27-07	13565	374	28-19	16430	402	28-46
0.2	10112	321	38-32	12074	333	30-19	14239	353	30-49
0.3	9432	303	29-24	11089	315	31-20	12750	324	32-21
0.4	8885	286	30-16	10288	298	32-01	11720	304	33-27
0.5	8418	272	31-10	9627	282	32-50	10930	287	34-20
0.6	8008	259	32-02	9089	268	33-37	10179	275	35-07
0.7	7648	248	32-47	8651	256	34-22	9582	263	35-48
0.8	7334	238	33-29	8259	245	35-06	9037	252	36-28
0.9	7062	230	34-11	7886	236	35-48	8665	241	37-07
1.0	6816	222	34-52	7557	227	36-27	8300	232	37-44
1.1	6593	215	35-28	7277	220	37-02	7966	223	38-21
1.2	6382	208	36-02	7026	213	37-37	7664	216	38-57
1.3	6185	202	36-37	6790	207	38-10	7388	210	39-32
1.4	5997	197	37-09	6573	201	38-43	7134	204	40-06
1.5	5818	192	37-32	6380	196	39-15	6899	198	40-39

 $\Theta_0 = 25^\circ$ 

(续)

$C$	550			600			650		
	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$
0	23621	550	25°-00'	28111	600	25°-00'	32992	650	25°-00'
0.1	19461	431	29-09	22822	459	29-31	26284	488	29-54
0.2	16609	366	31-48	19124	379	32-54	21715	392	34-16
0.3	14570	333	33-32	16538	341	34-51	18583	339	36-22
0.4	13170	311	34-44	14739	318	36-12	16392	316	37-42
0.5	12130	294	35-41	13450	300	37-15	14880	302	38-46
0.6	11303	280	36-32	12440	286	38-09	13631	289	39-38
0.7	10600	268	37-19	11622	274	38-52	12638	277	40-22
0.8	9997	257	38-01	10926	262	39-32	11816	265	41-00
0.9	9482	246	38-38	10323	251	40-09	11123	255	41-35
1.0	9044	236	39-12	9796	240	40-43	10532	246	42-05
1.1	8641	227	39-50	9335	230	41-20	10012	234	42-42
1.2	8280	219	40-28	8922	222	41-54	9124	225	43-16
1.3	7955	212	41-04	8550	215	42-26	8748	218	43-46
1.4	7661	206	41-38	8214	208	42-56	8409	211	44-14
1.5	7394	200	42-10	7910	202	43-24	8102	205	44-42

$\Theta_0 = 5^\circ$ 

$\begin{matrix} v_0 \\ C \end{matrix}$	400			450			500		
	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$
0	2832	400	5°-00'	3585	450	5°-00'	4426	500	5°-00'
0.1	2746	382	5-09	3452	425	5-13	4228	466	5-14
0.2	2665	366	5-18	3330	403	5-25	4084	437	5-28
0.3	2588	351	5-26	3217	383	5-36	3901	411	5-41
0.4	2519	339	5-33	3112	366	5-47	3751	388	5-53
0.5	2455	328	5-40	3014	350	5-56	3605	368	6-05
0.6	2396	320	5-46	2922	338	6-04	3477	352	6-17
0.7	2343	313	5-52	2837	327	6-11	3360	338	6-27
0.8	2294	307	5-57	2758	318	6-18	3255	328	6-37
0.9	2248	301	6-01	2686	311	6-24	3160	318	6-47
1.0	2207	296	6-06	2621	305	6-31	3075	311	6-56
1.1	2169	291	6-09	2563	300	6-35	2990	303	7-03
1.2	2132	287	6-12	2509	295	6-40	2915	296	7-09
1.3	2098	283	6-15	2460	290	6-44	2850	290	7-14
1.4	2066	280	6-18	2414	285	6-48	2785	286	7-18
1.5	2036	276	6-20	2370	281	6-51	2725	281	7-22

 $\Theta_0 = 5^\circ$ 

(续)

$\begin{matrix} v_0 \\ C \end{matrix}$	550			600			650		
	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$	$X$	$v_c$	$-\Theta_c$
0	5356	550	5°-00'	6374	600	5°-00'	7478	650	5°-00'
0.1	5087	508	5-16	6024	549	5-18	7035	590	5-20
0.2	4843	472	5-32	5701	506	5-35	6622	540	5-40
0.3	4634	438	5-47	5423	468	5-53	6248	496	6-00
0.4	4432	411	6-02	5168	433	6-10	5922	456	6-19
0.5	4245	386	6-16	4925	403	6-27	5626	422	6-38
0.6	4080	365	6-30	4710	380	6-43	5370	394	6-57
0.7	3920	349	6-37	4520	361	6-59	5130	372	7-15
0.8	3780	336	6-56	4340	346	7-14	4910	352	7-32
0.9	3655	326	7-08	4175	333	7-28	4715	340	7-48
1.0	3546	317	7-18	4035	322	7-40	4545	328	8-01
1.1	3445	308	7-27	3905	313	7-50	4395	318	8-13
1.2	3355	300	7-34	3785	305	7-59	4265	309	8-24
1.3	3270	293	7-41	3675	298	8-06	4135	302	8-33
1.4	3190	287	7-47	3575	291	8-12	4015	295	8-40
1.5	3115	282	7-51	3480	285	8-17	3900	289	8-46

附录七 计算导弹滚转角速度的 $I(x)$ 函数表

$$I(x) = \int_0^x e^{\xi^2} d\xi$$

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0601	0.0701	0.0802	0.0902
0.1	0.1003	0.1104	0.1206	0.1307	0.1409	0.1511	0.1614	0.1717	0.1820	0.1923
0.2	0.2027	0.2131	0.2236	0.2341	0.2447	0.2553	0.2660	0.2767	0.2875	0.2983
0.3	0.3092	0.3202	0.3313	0.3424	0.3536	0.3648	0.3762	0.3876	0.3991	0.4107
0.4	0.4224	0.4342	0.4461	0.4580	0.4701	0.4823	0.4946	0.5070	0.5196	0.5322
0.5	0.5450	0.5579	0.5709	0.5841	0.5974	0.6109	0.6245	0.6382	0.6522	0.6662
0.6	0.6805	0.6949	0.7095	0.7243	0.7393	0.7544	0.7698	0.7853	0.8011	0.8171
0.7	0.8333	0.8497	0.8664	0.8833	0.9005	0.9179	0.9356	0.9536	0.9718	0.9903
0.8	1.0091	1.0282	1.0477	1.0647	1.0875	1.1079	1.1287	1.1498	1.1713	1.1932
0.9	1.2155	1.2382	1.2613	1.2848	1.3088	1.3332	1.3581	1.3835	1.4093	1.4357
1.0	1.4630	1.4900	1.5180	1.5470	1.5760	1.6060	1.6360	1.6670	1.6990	1.7318
1.1	1.7650	1.7989	1.8336	1.8690	1.9053	1.9424	1.9804	2.0192	2.0590	2.0997
1.2	2.1414	2.1842	2.2279	2.2728	2.3187	2.3659	2.4122	2.4637	2.5145	2.5667
1.3	2.6202	2.6751	2.7315	2.7893	2.8488	2.9098	2.9726	3.0370	3.1032	3.1713
1.4	3.2414	3.3134	3.3874	3.4636	3.5420	3.6227	3.7058	3.7913	3.8794	3.9702
1.5	4.0637	4.1600	4.2593	4.3616	4.4671	4.5760	4.6882	4.8040	4.9235	5.0469
1.6	5.1742	5.3056	5.4413	5.5816	5.7265	5.8762	6.0309	6.1909	6.3563	6.5274
1.7	6.7043	6.8873	7.0768	7.2728	7.4758	7.6859	7.9035	8.1290	8.3625	8.6045
1.8	8.8554	9.1154	9.3850	9.6646	9.9547	10.2556	10.5678	10.8919	11.2283	11.5777
1.9	11.9405	12.3173	12.7088	13.1156	13.5384	13.9780	14.4345	14.9039	15.4043	15.9187
2.0	16.4540									

## 符号表

- $A$ ——复姿态角,  $A = \psi + j\theta$  (§ 5-5);
- $A(\omega)$ ——振幅频率特性 (§ 5-1);
- $A$ ——同诱导阻力有关的系数 (§ 7-1);  
决定于滚转阻尼力矩的常数 (§ 7-5);
- $a$ ——加速度;
- $a_N$ ——法向加速度;
- $a_{N,K}$ ——导弹沿理想运动学弹道运动的法向加速度 (或称“理想法向加速度”);
- $a_1$ ——动力系数,  $a_1 = -m_x^a \rho v S L^2 / (2J_x)$ ;
- $a_2$ ——动力系数,  $a_2 = -m_x^a \rho v^2 S L / (2J_x)$ ;
- $a_3$ ——动力系数, 当导弹不滚转时,  $a_3 = -L_K |F_{K,\max}| / J_x$ ;  
当导弹滚转时,  $a_3 = -L_K |F_{-1,\max}| / J_x$ ;
- $a_4$ ——动力系数,  $a_4 = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D^* + F \right) / (mv)$ ;
- $a_5$ ——动力系数, 当导弹不滚转时,  $a_5 = |F_{K,\max}| / (mv)$ ;  
当导弹滚转时,  $a_5 = |F_{-1,\max}| / (mv)$ ;

$a_6$ ——动力系数,  $a_6 = \frac{J_x}{J_y} \omega_x$ ;

$a_7$ ——动力系数,  $a_7 = -M_x^p/J_x = -\rho v^2 S L m_x^p/(2J_x)$ ;

$a_8$ ——动力系数,  $a_8 = -Y^p/(mv) = -\rho v^2 S C_y^p/(2mv)$ ;

$B$ ——复攻角,  $B = \beta + j\alpha$  (§ 5-5);

$B$ ——决定于空气动力滚转力矩  $M_{x,a}$  及导线张力滚转力矩  $M_{x,r}$  的常数 (§ 7-5);

$b$ ——装甲钢板的厚度(第二章);

$b$ ——翼弦长(第七章);

$b_p$ ——平均翼弦长;

$b_m$ 、 $b_m$ ——翼根弦长、翼梢弦长;

$[B]$ ——应变矩阵(第八章);

$b_1$ ——动力系数,  $b_1 = -m_y^p S L^2 \rho v/(2J_y)$ ;

$b_2$ ——动力系数,  $b_2 = -m_y^p S L \rho v^2/(2J_y)$ ;

$b_3$ ——动力系数, 当导弹不滚转时,  $b_3 = -L_K |F_{K,\max}|/J_y$ ;

当导弹滚转时,  $b_3 = -L_K |F_{\cdot 1,\max}|/J_y$ ;

$b_4$ ——动力系数,  $b_4 = \left( -\frac{1}{2} \rho v^2 S C_x^p + F \right) / (mv)$ ;

$b_5$ ——动力系数, 当导弹不滚转时,  $b_5 = |F_{K,\max}|/(mv)$ ;

当导弹滚转时,  $b_5 = |F_{\cdot 1,\max}|/(mv)$ ;

$b_6$ ——动力系数,  $b_6 = \frac{J_x}{J_y} \omega_x$ ;

$b_7$ ——动力系数,  $b_7 = M_y^a/J_y = \rho v^2 S L m_y^a/J_y$ ;

$b_8$ ——动力系数,  $b_8 = -Z^a/(mv) = -\rho v^2 S C_z^a/(2mv)$ ;

$b'_1$ —— $b'_1 = b_1/v$ ;

$b'_2$ —— $b'_2 = b_2/v^2$ ;

$b'_4$ —— $b'_4 = -C_x^p S \rho/(2m)$ ;

$C$ ——积分常数, 见式(3-5-13)及图3-6(第三章);

$C$ ——复航向角,  $C = \Psi + j\Theta$ (第五章);

$C$ ——弹道系数, 见式(6-1-17)——(第六章);

$C$ ——同喷气滚转力矩  $M_{x,p}$  有关的常数(第七章);

$C'$ ——积分常数  $C$  的广义值, 见式(3-5-15)——(第三章);

$C_x$ ——导弹的空气阻力系数;

$C_{x,0}$ ——导弹的零攻角阻力系数;

$C_{x,l}$ ——导弹的诱导阻力系数;

$C_y$ ——导弹的空气动力升力系数;

$C_y^a$ ——升力系数对攻角的导数(或斜率),  $C_y^a = \frac{\partial C_y}{\partial \alpha}$ ;

$C_y^p$ ——升力系数对侧滑角的导数,  $C_y^p = \frac{\partial C_y}{\partial \beta}$ , 即马格努斯力系数的导数;

- $[C_y^*]$ —— $C_y^*$ 的设计目标值;  
 $(C_y^*)_u$ ——孤立弹翼的升力系数导数;  
 $(C_y^*)_{w(b)}$ ——通过弹身的一对假想弹翼的升力系数导数(第七章);  
 $C_{y0(b)}$ ——外伸在弹身外面的弹翼的升力系数(第八章);  
 $C_{y切面}$ ——所研究的翼段的局部升力系数;  
 $C_x$ ——侧力系数;  
 $C_x^a$ ——侧力系数对攻角 $\alpha$ 的导数,  $C_x^a = \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}$ , 即马格努斯力系数导数;  
 $C_x^\beta$ ——侧力系数对侧滑角 $\beta$ 的导数,  $C_x^\beta = \frac{\partial C_x}{\partial \beta}$ ;  
 $D$ ——弹身直径; 或战斗部直径(只见于§2-1);  
 $D$ ——复合位移,  $D = -z + jy$ (§5-5);  
 $D$ ——弯曲刚度,  $D = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)}$ (第八章);  
 $D_K(p)$ ——系统开环传递函数 $W(p)$ 的分母;  
 $D_T$ ——线轴直径;  
 $d$ ——炸药柱直径, 或药型罩直径(第二章);  
 $E$ ——随机量的概率偏差(第四章);  
 $E$ ——单位质量的弹体所具有之动能(第六章);  
 $F$ ——杨氏弹性模量(第八章);  
 $E(p)$ ——导弹系统的角误差传递函数, 见(5-3-9)式(第五章);  
 $E_G$ ——在抛射弹道落点处, 单位质量的弹体所具有的动能(第六章);  
 $E_n(p)$ ——导弹系统的线误差传递函数, 见(5-3-10)式(第五章);  
 $F$ ——推力;  
 $F_0, F_{-1}, F_{+1}, \dots$ —— $F_K$ 矢量的各旋转谐量; 在导弹右旋滚转情况下, 其中 $F_{-1}$ 即周期平均舵控力;  
 $F_K$ ——作用在导弹的舵(或操纵器)上的控制力, 或称舵控力;  
 $F_{K,y}, F_{K,z}$ —— $F_K$ 在 $o_1y_3$ 及 $(-o_1z_3)$ 轴上的投影;  
 $F_t$ ——作用在飞行器上的各种主动外力;  
 $F_p$ ——作用在飞行器上的扰动力;  
 $f$ ——安全系数(第八章);  
 $f$ ——无量纲的舵控力,  $f = F_K/|F_{K,max}|$ ;  
 $f_y, f_z$ —— $f$ 在 $o_1y_3$ 及 $(-o_1z_3)$ 轴上的投影;  
 $f_n$ ——把 $f(t)$ 在弹体坐标系 $o_1z_1y_1$ 中分解为指数函数形式的傅立叶级数时, 所得到的各傅立叶系数( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  
 $f_s$ ——脉冲调宽的指令信号的每秒重复周数,  $f_s = \frac{1}{T}$ ;  
 $G$ ——材料的剪切模量(第八章);  
 $G(p)$ ——第二代反坦克导弹系统的开环传递函数, 见(5-3-4)式;  
 $g$ ——重力加速度;  
 $g_0$ ——重力加速度在标准纬度海平面处之值;



- $H$ ——导引头捕获目标（或导弹启控）时之高度（§ 6-1）；
- $H$ ——导引头陀螺转子的动量矩（§ 6-2）；
- $H(p)$ ——导弹的动态线偏差对于导弹的理想弹道法向加速度的传递函数，见（5-3-15）式等；
- $H_f$ ——锥孔装药的最有利炸高；
- $H_a$ 、 $H_h$ 、 $H_{\psi_0}$ 及 $H_g$ ——特征函数，分别代表弹体初始扰动角速度 $\dot{\theta}_0$ （或 $\dot{\psi}_0$ ）、推力偏心 $h_T$ 、出口速度方向的初始偏差 $\Psi_0$ 及重力加速度 $g$ 对于弹道线偏差的影响（第四章）；
- $h$ ——偏移参量，即直线运动的目标之轨迹对于瞄准控制站的最近距离（第四章及第五章中的（5-3-12）、（5-3-27）两式中）；
- $h(t)$ ——单位过渡函数（§ 5-1）；
- $h$ ——动态误差（§ 5-3）；
- $h$ ——脱靶量（§ 6-5）；
- $h$ ——板的厚度（第八章）；
- $h_T$ ——推力偏心；
- $h_c$ ——弹体的质量中心偏离对称轴的距离；
- $h_r$ ——定向器来复线的螺距；
- $h_0$ ——瞬间脱靶量（§ 6-5）；
- $h_0$ 、 $h_1$ 、 $h_2$ 、……——导入段及其各分段的距离（第四章）；
- $h_0$ 、 $h_1$ 、 $h_2$ 、……——动态误差系数，见（5-3-17）式（第五章）；
- $I(x)$ ——计算转速的专用函数，见（7-5-22）式及附录  $t$ ；
- $I_s$ ——火箭发动机的比推力（或称比冲量），即每秒消耗一公斤重的推进剂时所产生的推力（或每一公斤重的推进剂所产生的冲量）；
- $i$ ——续航发动机的比推力对起飞发动机比推力之比值， $i = I_s/I_0^0$ （§ 3-5）；
- $i$ ——弹形系数（§ 6-1）；
- $J_x$ 、 $J_y$ 、 $J_z$ ——导弹对于弹体坐标系的  $o_1x_1$ 、 $o_1y_1$ 、 $o_1z_1$  轴的转动惯量；
- $j$ ——虚数单位， $j = \sqrt{-1}$ ；
- $K$ ——运动学弹道的曲率（§ 4-1）；
- $K$ ——弹体对于过重心横轴的回转半径， $K = \sqrt{\frac{J_y}{m}}$ （§ 4-2）；
- $K$ ——指令系数（§ 4-3 及第五~七章）；
- $K$ ——波动系数（第八章）；
- $[K]^e$ ——单元刚度矩阵（第八章）；
- $K_y$ 、 $K_z$ ——俯仰及偏航方向的指令系数；
- $k$ ——破甲深度的修正系数（§ 2-1）；
- $k$ ——放大系数（或称“传递系数”）；对于各种环节的放大系数，用下角标表示其输入量，上角标表示其输出量，如  $k_{\tau}^e$  表示弹体环节在

输入指令  $K$ 、输出攻角  $\alpha$  时的放大系数，余类推；

$k$  ——比例导航法的导航比(或导航常数)；

$L$  ——参考长度，通常取为导弹弹体的全长；

$L(\omega)$  ——对数幅频特性；

$L_f$  ——战斗部静破甲深度；

$L_k$  ——由舵控力的作用点到导弹重心的距离，若操纵器位于导弹重心后方，则定义  $L_k < 0$ ；

$L_r$  ——由弹体重心至发动机喷管喉部断面的距离；

$\Delta L$  ——破甲裕量；

$l$  ——弹翼全翼展(包括弹身直径在内)；

$l_w$  ——孤立弹翼的翼展；

$M$  ——望远镜的放大倍率(第二章)；

$M$  ——马赫数；

$M$  ——弯矩(第八章)；

$M$  ——导引头陀螺校正电机的输出力矩(第六章)；

$M_k$  ——舵控力矩， $M_k = F_k L_k$ ；

$M_k(p)$  ——开环传递函数  $W(p)$  的分子(§ 5-2)；

$M_R$  ——二阶振荡环节在共振频率处的相对振幅(第五章)；

$M_x$  ——滚转力矩；

$M_{x,a}$  ——空气动力滚转力矩，见(7-5-3)式；

$M_{x,p}$  ——喷气滚转力矩，见(7-5-2)式；

$M_{x,r}$  ——导线张力引起的滚转力矩，见(7-5-7)式；

$M_{x,d}$  ——滚转阻尼力矩，见(7-5-5)式；

$M_y$  ——空气动力偏航力矩；

$M_y^a$  —— $M_y^a = \frac{\partial M_y}{\partial \alpha}$ ，即马格努斯力矩导数；

$M_y^b$  —— $M_y^b = \frac{\partial M_y}{\partial \beta}$ ，空气动力偏航恢复力矩的导数；

$M_y(\alpha, \delta)|_{\alpha_x=0}$  ——由  $\alpha$  及  $\delta$  引起的马格努斯力矩；

$M_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\beta=0}$  ——由  $\alpha$  及  $\bar{\omega}_x$  引起的马格努斯力矩；

$M_z$  ——空气动力俯仰力矩；

$M_z^a$  —— $M_z^a = -\frac{\partial M_z}{\partial \alpha}$ ，空气动力俯仰恢复力矩的导数；

$M_z^b$  —— $M_z^b = \frac{\partial M_z}{\partial \beta}$ ，即马格努斯力矩导数；

$m$  ——并联元件数目(第一章)；

$m$  ——导弹质量；

$\dot{m}$  ——导弹质量变化率， $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$  ( $\dot{m} \leq 0$ )；

$m_0$  ——导弹的初质量；

$m_c$  ——导弹上发动机壳体的质量；

$m_s$ ——发动机推进剂燃完时的导弹质量，或称空质量；

$m_p$ ——导弹的有效载荷（战斗部及控制部）的质量；

$m_s$ ——导弹上弹体结构件的质量；

$m_T$ ——导弹发动机中推进剂的质量；

$\dot{m}_T$ ——推进剂的秒消耗量， $\dot{m}_T \geq 0$ ；

$m_z^\delta$ ——空气动力滚转力矩系数对于弹翼差偏角  $\delta$  的导数，按 (7-5-4) 式计算；

$\bar{m}_z^{\omega_x}$ ——滚转阻尼力矩系数对于无量纲滚转角速度  $\bar{\omega}_x$  的导数，按 (7-5-6) 式计算；

$m_y^\beta$ 、 $m_z^\alpha$ ——导弹的俯仰和偏航恢复力矩系数导数， $m_y^\beta = -\left(\frac{\partial M_y}{\partial \beta}\right) / \left(\frac{1}{2} \rho v^2 SL\right)$ ， $m_z^\alpha = -\left(\frac{\partial M_z}{\partial \alpha}\right) / \left(\frac{1}{2} \rho v^2 SL\right)$ ；

$m_y^{\omega_y}$ 、 $m_z^{\omega_z}$ ——导弹的俯仰和偏航阻尼力矩系数导数， $m_y^{\omega_y} = -\left(\frac{\partial M_y}{\partial \omega_y}\right) / \left(\frac{1}{2} \rho v SL^2\right)$ ， $m_z^{\omega_z} = -\left(\frac{\partial M_z}{\partial \omega_z}\right) / \left(\frac{1}{2} \rho v SL^2\right)$ ；

$m_y(\alpha, \delta)|_{\omega_x=0}$ ——马格努斯力矩系数， $m_y(\alpha, \delta)|_{\omega_x=0} = \frac{M_y(\alpha, \delta)|_{\omega_x=0}}{\frac{1}{2} \rho v^2 SL}$ ；

$m_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}$ ——马格努斯力矩系数， $m_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0} = \frac{M_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}}{\frac{1}{2} \rho v^2 SL}$ ；

$m_y^\alpha$ 、 $m_z^\beta$ ——马格努斯力矩系数导数，例如

$$m_y^\alpha = m_y^\alpha(\delta, \omega_x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [m_y(\alpha, \delta)|_{\omega_x=0} + m_y(\alpha, \bar{\omega}_x)|_{\delta=0}]；$$

$N$ ——有效导航比，见 (6-3-27) 式；

$N$ ——轴向力 (第八章)；

$n$ ——系统中的元件数目 (第一章)；

$n$ ——过载，见式 (4-1-37) 或 (4-1-38)，有时特指法向过载；

$n$ ——同有效导航比有关的参数， $n = N - 2$  (§ 6-4)；

$n_{\text{可用}}$ 、 $n_{\text{需用}}$ 、 $n_{\text{使用}}$ ——可用过载、需用过载、使用过载；

$n_0$ ——推力初重比， $n_0 = F/(m_0 g)$ ；

$n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$ ——过载矢量在弹道坐标系上的投影；

$n_{x_1}$ 、 $n_{y_1}$ 、 $n_{z_1}$ ——过载矢量在弹体坐标系上的投影；

$n_{y,0}$ 、 $n_{z,0}$ ——导弹重心处的  $n_y$ 、 $n_z$  值；

$n_p$ ——复合的过载，见式 (4-3-87)；

$P$ ——综合参量，见式 (5-5-53)；

$P'$ ——综合参量，见式 (5-5-138)；

$P_{\text{设计}}$ 、 $P_{\text{使用}}$ ——导弹的设计载荷、使用载荷；

$P_d$ ——导弹武器系统摧毁目标的全概率；

- $P_f$ ——导弹在发射和飞行过程中的可靠度；  
 $P_k$ ——在命中并可靠起爆条件下，导弹毁伤目标的概率；  
 $P_r$ ——导弹系统的可靠度；  
 $P_{r,e}$ ——并联元件组合的可靠度；  
 $P_{r,s}$ ——导弹系统中各元件的可靠度；  
 $P_{r,w}$ ——导弹战斗部的可靠度；  
 $p$ ——概率密度(第一章)；  
 $p$ ——导弹对目标的速度比， $p = v/v_T$ (第四章)；  
 $p$ ——拉氏变换运算符(第五章)；  
 $p$ ——作用在板的单位面积上的横向载荷；  
 $Q$ ——综合参量，见式(5-5-53)；  
 $Q'$ ——综合参量，见式(5-5-138)；  
 $Q$ ——剪力(第八章)；  
 $q$ ——弹体沿抛射弹道被动飞行时的重量， $q = mg$ 但以〔千克力〕为单位(第六章)；  
 $q_y$ ——单位长度翼展上的升力；  
 $q'_y$ ——由于弹翼安装角引起的单位长度翼展上的升力；  
 $q''_y$ ——由于导弹滚动引起的单位长度翼展上的升力；  
 $R$ ——升阻比(第三章、第七章)；  
 $R$ ——弹道的曲率半径(第四章)；  
 $R$ ——导引头的有效作用距离(第六章)；  
 $R$ ——综合参量  $R = +\sqrt{P^2 + Q^2}$  (第五章)；  
 $R'$ ——综合参量， $R' = +\sqrt{P'^2 + Q'^2}$  (第五章)；  
 $R(\tau)$ ——自相关函数，式(5-3-33)；  
 $R$ ——弹体的半径(第八章)；  
 $R_p$ ——喷管组中各喷管喉部中心对于弹轴的距离；  
 $R_\psi, R_{\psi_0}, R_h$ 及  $R_g$ ——特征函数，分别代表弹体的初始扰动角速度  $\dot{\psi}_0$ (或  $\psi_0$ )、初速的方向偏差  $\psi_0$ 、推力偏心  $h_T$  及重力加速度  $g$  对于弹道角偏差的影响；  
 $r$ ——控制站到导弹的距离(第四、五章)；  
 $r$ ——导弹至目标的距离(第六章)；  
 $r_0$ ——启控时导弹至目标的距离(第六章)；  
 $r_D$ ——停控时导弹至目标的距离(第六章)；  
 $r_T$ ——控制站至目标的距离(第四章)；  
 $S$ ——参考面积，通常取弹身的横截面积；  
 $S(\omega)$ ——无限随机过程的功率谱密度，式(5-3-41)；  
 $S_T$ ——目标在立靶板上的投影面积(第一章)；  
 $S_T(\omega)$ ——有限随机过程的功率谱密度，式(5-3-40)；  
 $S_w$ ——一对孤立弹翼的面积(第七章)；